ANALYSE RÉELLE

Jean-Yves CHEMIN
Laboratoire J.-L. Lions, Case 187
Université Pierre et Marie CURIE, 4 Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05, France
Télécopie: 01 44 27 72 00, adresse électronique: chemin@ann.jussieu.fr

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Définition des espaces métriques

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application d de $X \times X$ dans $\mathbf{R}^+$ telle que*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Le couple (X,d) est appelé un espace métrique.

Quelques exemples

- Prenons $X = \mathbf{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$. Cela définit un espace métrique.
- Prenons $X = \mathbf{R}^N$ et choisissons les différentes distances suivantes:

$$\begin{aligned} d_e(x,y) &\overset{\text{déf}}{=} \left(\sum_{j=1}^{N} (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ d_\infty(x,y) &\overset{\text{déf}}{=} \max_{1 \leq j \leq N} |x_j - y_j| \\ d_1(x,y) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|. \end{aligned}$$

- Prenons à nouveau $X = \mathbf{R}$, considérons une application injective f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et définissons
$$d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|.$$
L'application d_f est une distance sur X.
- Les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques que nous étudierons plus en détail au chapitre 2.

Définition 1.1.2 *Soient (X,d) un espace métrique, x un point de X et α un réel strictement positif. On appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon α, et l'on note $B(x,\alpha)$ (resp. $B_f(x,\alpha)$) l'ensemble des points y de X tels que $d(x,y) < \alpha$ (resp. $d(x,y) \leq \alpha$).*

Soit A une partie de X. On dit que A est une partie bornée de X si et seulement si il existe un réel strictement positif α et un point x de X tels que A soit inclus dans $B(x,\alpha)$.

Exercice 1.1.1 *Soit A une partie non vide et bornée d'un espace métrique (X, d). Démontrez qu'il existe un plus petit réel δ tel que*

$$\forall (x, y) \in A \times A\,,\ d(x, y) \leq \delta.$$

On note $\delta(A)$ ce réel et on l'appelle le diamètre de A.

La notion de distance permet de définir de manière abstraite, simple et générale, le concept de limite d'une suite et celui de fonction continue.

Définition 1.1.3 (convergence des suites) *Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d) et ℓ un point de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\ n_0 \,/\ n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 (continuité des fonctions) *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On considère une fonction f de X dans Y et un point x_0 de X. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\ \alpha > 0 \,/\ d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.1 (composition des fonctions continues) *Soient (X, d), (Y, δ) et (Z, ρ) trois espaces métriques, f et g deux fonctions respectivement de X dans Y et de Y dans Z. Soit x_0 un point de X tel que f soit continue en x_0 et g le soit en $f(x_0)$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.*

Démonstration de la proposition 1.1.1 La fonction g étant continue en $f(x_0)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \alpha > 0 \,/\ \delta(y, f(x_0)) < \alpha \Longrightarrow \rho(g(y), (g \circ f)(x_0)) < \varepsilon.$$

La fonction f étant continue en x_0, on a

$$\exists \beta > 0 \,/\ d(x, x_0) < \beta \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \alpha.$$

Le réel β étant ainsi choisi pour chaque ε, on en déduit alors que

$$\exists \beta > 0 \,/\ d(x, x_0) < \beta \Longrightarrow \rho(g \circ f(x), (g \circ f)(x_0)) < \varepsilon.$$

Ceci conclue la démonstration.

Proposition 1.1.2 (suite et fonctions continues) *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, f une fonction de X dans Y et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ et que la fonction f est continue en ℓ. Alors la suite d'éléments de Y définie par $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(\ell)$.*

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la proposition précédente et est laissée en exercice au lecteur.

Définition 1.1.5 (Intérieur et adhérence) *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie quelconque de X.*

- *On appelle intérieur de A et l'on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points x de X tels qu'il existe une boule ouverte $B(x,\alpha)$ (avec $\alpha > 0$) incluse dans A.*
- *On appelle adhérence de A et l'on note $\overline{A}$ l'ensemble des points x de X tels que, pour toute boule ouverte $B(x,\alpha)$ (avec $\alpha > 0$), l'intersection de $B(x,\alpha)$ avec A soit non vide.*
- *On dit que A est dense dans X si et seulement si $\overline{A} = X$.*

Remarque Il est clair d'après la définition que $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.

Exercice 1.1.2 *Soit A une partie finie d'un espace métrique (X,d). Alors $\overline{A} = A$.*

Proposition 1.1.3 *L'intérieur d'une boule ouverte est elle-même. L'adhérence d'une boule fermée est elle-même.*

Démonstration de la proposition 1.1.3 Soit y un point de la boule ouverte $B(x,\alpha)$, considérons la boule ouverte de centre y et de rayon $\alpha - d(x,y)$ (qui est un nombre strictement positif). D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \alpha - d(x,y) = \alpha.$$

Considérons maintenant un point y de l'adhérence de la boule fermée de centre x et de rayon α. Par définition, pour tout réel strictement positif β, il existe un point z appartenant à $B(y,\beta) \cap B_f(x,\alpha)$. À nouveau d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \beta + \alpha.$$

Ainsi donc, pour tout β strictement positif, $d(x,y) < \alpha + \beta$ et donc $d(x,y) \leq \alpha$.

Remarque La démonstration ci-dessus démontre que l'adhérence de $B(x_0,\alpha)$ est incluse dans $B_f(x_0,\alpha)$.

Proposition 1.1.4 *Soit A une partie d'un espace métrique (X,d). On a*

$$(\overset{\circ}{A})^c = \overline{A^c} \quad \textit{et} \quad \overline{A}^c = (\overset{\circ}{A^c})\,.$$

Démonstration de la proposition 1.1.4 Un point x de X appartient à $(\overset{\circ}{A})^c$ si et seulement si

$$\forall \alpha > 0\,,\ B(x,\alpha) \cap A^c \neq \emptyset,$$

ce qui signifie exactement que x appartient à l'adhérence du complémentaire de A. Un point x appartient à $(\overline{A})^c$ si et seulement si

$$\exists \alpha > 0\,,\ B(x,\alpha) \cap A = \emptyset,$$

c'est-à-dire $B(x,\alpha) \subset A^c$, ce qui signifie que $x \in (\overset{\circ}{A^c})$. La proposition est démontrée.

Proposition 1.1.5 *Soit A une partie d'un espace métrique (X,d). Un point x de X appartient à $\overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A tellle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.*

Démonstration de la proposition 1.1.8 Supposons que x soit limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A. Pour tout réel strictement positif α, il existe un entier n_0 tel que x_{n_0} appartienne à $B(x,\alpha)$ ce qui implique que $B(x,\alpha)\cap A\neq\emptyset$. Donc $x\in\overline{A}$.

Réciproquement, supposons que $x\in\overline{A}$. Alors, pour tout entier strictement positif n, il existe un élément a_n de X tel que

$$a_n\in A\cap B(x,n^{-1})$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite ainsi définie. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$d(a_n,x)\leq\frac{1}{n}\cdot$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc vers x et la proposition est démontrée.

Le concept suivant sera très important pour la suite du cours.

Définition 1.1.6 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X,d). On définit l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ que l'on note* $\mathrm{Adh}(x_n)$ *par*

$$\mathrm{Adh}(x_n)\stackrel{\text{déf}}{=}\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\overline{A}_n\quad\text{avec}\quad A_n\stackrel{\text{déf}}{=}\{x_m\,,m\geq n\}.$$

Exemples Dans $\mathbf{R}$ muni de la distance $|x-y|$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_n=n$ est telle que $\mathrm{Adh}(x_n)=\emptyset$ et la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $y_n=(-1)^{n+1}$ est telle que $\mathrm{Adh}(x_n)=\{-1,1\}$.

Théorème 1.1.1 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X,d). Un point ℓ de X appartient à* $\mathrm{Adh}(x_n)$ *si et seulement si il existe une fonction strictement croissante ϕ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty}x_{\phi(n)}=\ell.$$

Démonstration du théorème 1.1.1 Avant d'entamer la démonstration proprement dite, remarquons qu'une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ vérifie

$$\forall n\in\mathbf{N}\,,\ \phi(n)\geq n.\tag{1.1}$$

Démontrons cette propriété par récurrence. Elle est bien sûr vraie pour $n=0$. Supposons la réalisée pour n. Comme ϕ est strictement croissante, on a $\phi(n+1)>\phi(n)\geq n$. Ceci implique que $\phi(n+1)\geq n+1$. En particulier, la suite $(\phi(n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers l'infini avec n.

Revenons à notre démonstration. Si ℓ appartient à $\mathrm{Adh}(x_n)$, on définit par récurrence la fonction de la manière suivante: on choisit $\phi(0)=0$ et puis, on définit $\phi(n+1)$ à partir de $\phi(n)$ comme

$$\phi(n+1)\stackrel{\text{déf}}{=}\min\Big\{m>\phi(n)\,/d(x_m,\ell)<\frac{1}{n+1}\Big\}.$$

Par construction, la fonction ϕ est strictement croissante et nous avons, pour tout $n\geq1$,

$$d(x_{\phi(n)},\ell)\leq\frac{1}{n}\quad\text{et donc}\quad\lim_{n\to\infty}x_{\phi(n)}=\ell.$$

Réciproquement, s'il existe une fonction strictement croissante ϕ telle que $\lim_{n\to\infty}x_{\phi(n)}=\ell$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n\geq n_0\,,\ d(x(\phi(n)),\ell)<\varepsilon.$$

Comme, d'après (1.1), $\phi(n) \geq n$, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0\,, \forall n \in \mathbf{N}\,,\ \exists m \geq n\ /\ d(x_m, \ell) < \varepsilon,$$

ce qui signifie exactement que $\ell \in \mathrm{Adh}(x_n)$.

Proposition 1.1.6 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'un espace métrique (X, d) que l'on suppose convergeant vers un point ℓ de X. Alors* $\mathrm{Adh}(x_n) = \{\ell\}$.

Démonstration de la Proposition 1.1.6 Par définition de la limite d'une suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que l'ensemble A_{n_0} de la définition ci-dessus soit inclus dans la boule ouverte $B(\ell, \varepsilon)$. Donc soit x un point de X distinct de ℓ, en prenant ε strictement inférieur à $d(\ell, x)$, on trouve que $x \notin \overline{A}_{n_0}$ et donc que $x \notin \overline{A}_n$ pour tout $n \geq n_0$. D'où la proposition.

Remarque Il est possible qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit telle que $\mathrm{Adh(x_n)} = \{\ell\}$ et ne converge pas. Considérons par exemple la suite de nombres réels définie par

$$x_{2n} = 2n \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\,\cdot$$

Bien que cette suite ne converge pas, on a $\mathrm{Adh}(x_n) = \{0\}$.

Définition 1.1.7 (des parties ouvertes et fermées) *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). On dit que A est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$ et que A est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Remarques

- La proposition 1.1.3 dit exactement que les boules ouvertes sont des ouverts et que les boules fermées sont des fermés (ce qui est rassurant quant à la cohérence de la terminologie).
- D'après la proposition 1.1.4, le complémentaire d'un ouvert est un fermé et réciproquement.
- L'ensemble X est à la fois ouvert et fermé. On convient qu'il en est de même pour l'ensemble vide.

Proposition 1.1.7 *Toute réunion d'ouverts en est un. Toute intersection finie d'ouverts en est un. Toute intersection de fermés en est un. Toute réunion finie de fermés en est un.*

Démonstration de la Proposition 1.1.7 Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille quelconque d'ouverts et x un point de $U \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $x \in U_\lambda$. Comme U_λ est ouvert (ce qui signifie égal à son intérieur),

$$\exists \alpha > 0\ /\ B(x, \alpha) \subset U_\lambda \subset U.$$

Soit $U = \bigcap_{j=1}^{N}$ où les U_j sont des ouverts. Pour tout $j \in \{1, \cdots N\}$, il existe un réel strictement positif α_j tel que $B(x, \alpha) \subset U_j$. Soit $\alpha \overset{\text{déf}}{=} \min\{\alpha_j\,,\ j \in \{1, \cdots N\}\}$. Pour tout j, la boule ouverte $B(x, \alpha)$ est incluse dans U_j et donc $B(x, \alpha) \subset U$.

Théorème 1.1.2 (Caractérisation des applications continues) *Soit f une application entre deux espaces métriques (X,d) et (Y,δ). Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

- *L'application f est continue en tout point de X,*
- *l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert*
- *l'image réciproquee d'un fermé est un fermé.*

Démonstration du Théorème 1.1.2 Supposons f continue en tout point de X et considérons un ouvert U de (Y,δ) et un point x de $f^{-1}(U)$. L'ensemble U étant ouvert, il existe par définition un réel strictement positif ε_0 tel que $B(f(x),\varepsilon_0) \subset U$. La fonction f étant continue en x,

$$\exists \alpha\,,\ f(B(x,\alpha)) \subset B(f(x),\varepsilon_0).$$

Ainsi donc

$$B(x,\alpha) \subset f^{-1}\Big(f(B(x),\alpha)\Big) \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon_0)) \subset f^{-1}(U).$$

Réciproquement, soit x_0 un point de X. Pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(f(x_0),\varepsilon)$ est un ouvert de (Y,δ). Par hypothèse, $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ est un ouvert de (X,d). Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x_0,\alpha)$ soit inclus dans $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ et donc que

$$f(B(x_0,\alpha)) \subset f\Big(f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))\Big) \subset B(f(x_0),\varepsilon).$$

L'équivalence entre les points deux et trois résultent du fait que les complémentaires des ouverts sont les fermés (et réciproquement) et que

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{x \in X\ /\ f(x) \in U\} \\ &= \{x \in X\ /\ f(x) \in U^c\}^c \\ &= (f^{-1}(U^c))^c. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.8 *Soient (X,d) un espace métrique et A une partie de X. Alors*

$$\overline{A} = \{x \in X\,,\ \exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}\ /\ \lim_{n\to\infty} a_n = x\}.$$

Supposons que x soit limite d'une suite d'éléments de A. Pour tout ouvert U contenant x, il existe un n_0 tel que x_{n_0} appartienne à U. Donc $x \in \overline{A}$. Réciproquement, supposons que $x \in \overline{A}$. Alors, pour tout entier strictement positif n, il existe un élément a_n de X tel que

$$a_n \in A \cap B(x,n^{-1})$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite ainsi définie. Elle converge visiblement vers x.

Définition 1.1.8 *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques; on considère une fonction f de X dans Y.*

- *On dit que la fonction f est uniformément continue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \alpha > 0\ /\ d(x,x') < \alpha \Rightarrow \delta(f(x),f(x')) < \varepsilon;$$

- *On dit que la fonction f est localement hölderienne d'exposant $r \in]0,1]$ si et seulement si il existe une constante k telle que*

$$\forall (x,x') \in X \times X\ ,\ d(x,x') \leq 1 \Rightarrow \delta(f(x),f(x')) \leq k d(x,x')^r.$$

- *Lorsque $r = 1$, on dit que la fonction f est localement k-lipschitzienne.*
- *Lorsque $r = 1$ et que la condition $d(x,x') \leq 1$ peut être omise, on dit que la fonction f est k-lipschitzienne.*

Exercice 1.1.3 *Soit x_0 un point d'un espace métrique (X,d). Démontrez que l'application définie par*

$$x \mapsto d(x,x_0)$$

est 1*-lipschitzienne.*

Exercice 1.1.4 *Démontrez que l'application définie sur* $\mathbf{R}$ *par*

$$x \mapsto |x|^r \quad avec \quad r \in]0,1]$$

est hölderienne d'exposant r.

On peut s'interroger sur les effets d'un changement de distance sur les propriétés d'un espace métrique.

Définition 1.1.9 *Soit X un ensemble, on considère deux distances d et δ sur X. On dit que les deux distances sont topologiquement (resp. unifomément, resp. fortement) équivalentes si et seulement si l'application* Id *est continue (resp. uniformément continue, resp. lipschitzienne) de (X,d) dans (X,δ) et de (X,δ) dans (X,d).*

Remarque Les ouverts associés à deux distances topologiquement équivalentes sont les mêmes; ainsi donc les fonctions continues, les suites convergentes sont les mêmes.

Proposition 1.1.9 *Soient X un ensemble et d et δ deux distances sur X. Les propriétés suivantes sont alors satisfaites.*

Les distances d et δ sont topologiquement équivalentes si et seulement si

$$\forall x\ ,\forall \varepsilon\ ,\exists \eta\ /\ d(x,y) < \eta \Longrightarrow \delta(x,y) < \varepsilon \quad et \quad \delta(x,y) < \eta \Longrightarrow d(x,y) < \varepsilon.$$

Les distances d et δ sont uniformément équivalentes si et seulement si

$$\forall \varepsilon\ ,\exists \eta\ /\ d(x,y) < \eta \Longrightarrow \delta(x,y) < \varepsilon \quad et \quad \delta(x,y) < \eta \Longrightarrow d(x,y) < \varepsilon.$$

Les distances d et δ sont fortement équivalentes si et seulement si

$$\exists C\ /\ C^{-1} d(x,y) \leq \delta(x,y) \leq C d(x,y).$$

La démonstration de cette proposition n'est qu'une application immédiate des définitions; elle est laissée au lecteur.

Nous allons maintenant exposer quelques propriétés des espaces métriques.

Définition 1.1.10 *Soient A une partie d'un espace métrique (X,d) et x un point de X. On appelle distance du point x à l'ensemble A la quantité*

$$d(x,A) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Exercice 1.1.5 *Démontrez que $\overline{A}$ est l'ensemble des points x de X tels que $d(x,A)=0$.*

Proposition 1.1.10 *Soit A une partie d'un espace métrique (X,d). La fonction*

$$d_A \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbf{R}^+ \\ x & \mapsto & d(x,A) \end{array} \right.$$

est lipschitzienne de rapport 1.

Démonstration de la Proposition 1.1.10 D'après l'inégalité triangulaire, on a, pour tout (x,y) de X^2 et tout point a de A,

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a).$$

La borne inférieure étant un minorant, nous avons, pour tout $(x,y) \in X^2$ et tout point a de A,

$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a) \quad \text{et donc} \quad d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a)$$

La borne inférieure étant le plus grand des minorants, nous en déduisons que

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A) \quad \text{et donc} \quad d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$$

D'où la proposition en permutant le rôle de x et y.

Proposition 1.1.11 (Séparation de deux fermés disjoints) *Soient A et B deux parties fermées disjointes d'un espace métrique (X,d); il existe une fonction continue de (X,d) dans $[0,1]$ telle que $f_{|A}=0$ et $f_{|B}=1$.*

Pour démontrer cela, il suffit de vérifier que convient la fonction f définie par

$$f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}.$$

Cette fonction distance à un ensemble permet de construire des partitions de l'unité. Voici ce dont il s'agit.

Théorème 1.1.3 *Soient (X,d) un espace métrique et $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts localement finie (ce qui signifie que, pour tout point x de X, il existe un réel $\alpha>0$ tel que $U_n \cap B(x,\alpha) = \emptyset$ sauf pour un nombre fini d'indice n) tel que*

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_n = X.$$

Alors il existe une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de (X,d) dans l'intervalle $[0,1]$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(x) = 1 \quad et \quad f_{n|X\setminus U_n} = 0.$$

Démonstration du théoreme 1.1.3 Posons

$$F_n \stackrel{\text{déf}}{=} U_n^c \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} d(x, F_n).$$

Remarquons que, grâce à l'exercice 1.1.5, $\varphi_n(x) = 0$ si et seulement si $x \in F_n$. Donc φ_n est strictement positive sur U_n et nulle sur F_n. Comme la famille $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est localement finie, pour tout x de X, il existe un α strictement positif tel qu'il n'existe qu'un nombre fini d'indice n tels que φ_n ne soit pas identiquement nulle sur $B(x, \alpha)$. Donc, sur la boule $B(x, \alpha)$, la fonction

$$S(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\in\mathbf{N}} \varphi_n(x)$$

est une somme finie. La fonction S est donc continue sur $B(x, \alpha)$. La formule ci-dessus définit donc une fonction continue sur X. De plus, la fonction S est strictement positive sur chaque ouvert U_n, donc partout puisque la famille d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ recouvre X. On pose alors

$$f_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\varphi_n(x)}{S(x)}$$

et le théorème est démontré.

1.2 Espaces complets

Définition 1.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique, on appelle suite de Cauchy de X toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X telle que*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ /\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall m \geq n_0\,,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.1 *Toute suite de Cauchy d'un espace métrique est bornée.*

En effet, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $m \geq n_0$, on ait $d(x_n, x_m) \leq 1$. Ainsi donc, on a

$$\sup_{(n,m)\in\mathbf{N}^2} d(x_n, x_m) \leq 1 + \max_{(n,m)\in\{0,\ldots,n_0\}^2} d(x_n, x_m).$$

D'où la proposition.

Proposition 1.2.2 *Dans un espace métrique (X, d), toute suite convergente est de Cauchy et toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.*

Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergente vers une limite ℓ. Pour tout ε strictement positif, il existe un entier n_0 tel que l'on ait

$$\forall n \geq n_0\,,\ d(x_n, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Donc, si n et m sont deux entiers plus grands que n_0, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, \ell) + d(\ell, x_m) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Considérons maintenant une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et supposons qu'elle ait une valeur d'adhérence ℓ. La suite étant de Cauchy, il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall m \geq n_0\,,\ d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La suite ayant ℓ pour valeur d'adhérence, il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que

$$d(x_{n_1}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit alors que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, \ell) < \varepsilon.$$

D'où la proposition.

Définition 1.2.2 *Soit (X, d) un espace métrique, on dit que cet espace est complet si et seulement si toute suite de Cauchy est convergente.*

Lorsqu'un espace (X, d) est complet, cela permet de démontrer l'existence de certains objets. Le théorème suivant en est l'illustration la plus spectaculaire.

Théorème 1.2.1 (de point fixe de Picard) *Soit f une application d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même telle qu'il existe un réel k de l'intervalle $]0, 1[$ vérifiant*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Il existe alors un unique point fixe z tel que $f(z) = z$.

Étant donné un élément x_0 de X, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

On peut écrire que

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\ &\leq kd(x_n, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Par itération multiplicative, on trouve que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Ainsi, pour tout couple d'entiers (n, p) , on a

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{m=1}^{p} d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{m=1}^{p} k^{n+m-1} \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc de Cauchy. Soit z sa limite. Comme la fonction f est lipschitzienne, donc continue, on obtient, en passant à la limite dans la relation de définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ que $z = f(z)$.

Il nous reste à démontrer l'unicité. Soient z_1 et z_2 deux solutions de $z = f(z)$. On a, d'après l'hypothèse faite sur f que

$$d(z_1, z_2) \leq kd(z_1, z_2).$$

Le fait que k soit strictement inférieur à 1 assure que $d(z_1, z_2) = 0$, donc que $z_1 = z_2$. Le théorème est ainsi démontré.

Remarques Ce théorème est à la base d'innombrables théorèmes d'existence et d'unicité. Un exemple: le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et d'unicité pour les équations différentielles ordinaires.

Donnons maintenant quelques exemples d'espaces complets. Un exemple fondamental d'espace complet: c'est l'espace $\mathbf{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$. Nous allons maintenant examiner comment fabriquer des espaces complets à partir d'espaces complets déjà connus. Dit autrement, cela signifie que l'on va rechercher les opérations sur les ensembles qui laissent stable la propriété d'espace complet.

Proposition 1.2.3 *Soit $(X_1,d_1),\cdots,(X_N,d_N)$ une famille de N espaces métriques complets. Si l'on pose*

$$X = X_1 \times \cdots \times X_N \quad et \quad d((x_1,\cdots,x_N),(y_1,\cdots,y_N)) = \max_{1\leq j\leq N} d_j(x_j,y_j),$$

alors l'espace (X,d) est un espace complet.

La démonstration est laissée en exercice.

Exercice 1.2.1 *Démontrer le même résultat en prenant*

$$\delta((x_1,\cdots,x_N),(y_1,\cdots,y_N)) = \sum_{j=1}^{N} d_j(x_j,y_j)$$

ou bien encore

$$\widetilde{d}((x_1,\cdots,x_N),(y_1,\cdots,y_N)) = \left(\sum_{j=1}^{N} d_j(x_j,y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme le montre la proposition suivante, les espaces de fonctions à valeurs dans des espaces complets forment une classe d'exemples importants d'espaces complets.

Théorème 1.2.2 *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, désignons par $\mathcal{B}(X,Y)$ (resp. $\mathcal{C}(X,Y)$) l'espace des fonctions bornées (resp. bornées et continues) de X dans Y et définissons une distance D sur $\mathcal{B}(X,Y)$ par*

$$D(f,g) = \sup_{x\in X} \delta(f(x),g(x)).$$

Si l'espace (Y,δ) est complet, alors les espaces $(\mathcal{B}(X,Y),D)$ et $(\mathcal{C}(X,Y),D)$ le sont aussi.

Démonstration du théorème 1.2.2 Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}(X,Y),D)$. Par définition, on a

$$\forall\varepsilon\,,\ \exists n_0\,/\,\forall n\geq n_0\,,\ \forall p\,,\ \forall x\in X\,,\ \delta(f_n(x),f_{n+p}(x)) < \varepsilon. \tag{1.2}$$

En particulier, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de Y. Comme cet espace est complet, cette suite est convergente. Donc, pour tout x de X, il existe un élément de Y, noté $f(x)$, tel que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Vérifions que $f\in\mathcal{B}(X,Y)$. D'après l'inégalité (1.2) appliquée par exemple avec $\varepsilon = 1$, on a

$$\forall p\,,\ \forall x\in X\,,\ \delta(f_{n_0}(x),f_{n_0+p}(x)) < 1.$$

Par passage à la limite lorsque p tend vers l'infini, on obtient

$$\forall x \in X\,,\ \delta(f_{n_0}(x), f(x)) \leq 1.$$

La fonction f_{n_0} étant bornée, la fonction f l'est également. Il faut maintenant vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f dans l'espace $(\mathcal{B}(X,Y), D)$. Pour ce faire, passons à la limite lorsque p tend vers l'infini dans l'inégalité (1.2), ce qui donne

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ /\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall x \in X\,,\ \delta(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre que $(\mathcal{B}(X,Y), D)$ est complet. Pour démontrer que $(\mathcal{C}(X,Y), D)$ est complet, il suffit que démontrer qu'il est fermé grâce à la proposition suivante.

Proposition 1.2.4 *Soient (X,d) un espace complet et A une partie de X. Alors l'espace métrique (A,d) est complet si et seulement si A est une partie fermée de X.*

Supposons que A soit fermée. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de A. C'est une suite de Cauchy d'éléments de X. Donc, puisque X est complet, elle converge vers un élément de X désigné par a_∞. Cet élément de X est limite d'une suite d'éléments de A qui est un fermé de X. Donc a_∞ appartient à A, ce qui prouve que A est complet.

Réciproquement, supposons que A soit complet. Considérons un élément x de X tel qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A dont la limite soit x. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite convergente (dans X), c'est donc une suite de Cauchy dans X, donc aussi dans A. Comme A est complet, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans A. L'unicité de la limite dans l'espace X entraîne que $x \in A$. D'où la proposition.

Revenons à la démonstration du théorème 1.2.2. Il s'agit donc de démontrer que, si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$ converge vers $f \in \mathcal{B}(X,Y)$ au sens de D, alors $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.[1] Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$\forall x \in X\,,\ \delta(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

La fonction f_{n_0} étant continue, pour tout x_0 de X, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d(x, x_0) < \alpha \Longrightarrow \delta(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

L'utilisation répétée de l'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\delta(f(x), f(x_0)) \leq \delta(f(x), f_{n_0}(x)) + \delta(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \delta(f_{n_0}(x_0), f(x_0)).$$

On en déduit que

$$d(x, x_0) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème 1.2.3 (de prolongement des fonctions uniformément continues) *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, A une partie dense de X, et f une application uniformément continue de (A,d) dans (Y,δ). Si Y est complet, alors il existe une unique application uniformément continue $\widetilde{f}$ de (X,d) dans (Y,δ) telle que $\widetilde{f}_{|A} = f$.*

[1] Le lecteur aura reconnu qu'il s'agit de démontrer qu'une limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue.

Démonstration du théorème 1.2.3 Considérons un élément x de X et essayons de définir $\widetilde{f}(x)$. L'ensemble A étant dense, la proposition 1.1.8 nous assure qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x. La fonction f est uniformément continue, ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \alpha \,/\, \forall (a,b) \in A^2\,,\ d(a,b) < \alpha \Rightarrow \delta(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

Mais la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy car convergente. Donc il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall p\,,\ d(a_n, a_{n+p}) < \alpha.$$

Donc la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de Y, donc elle converge vers une limite y.

Une première chose à vérifier: cette limite y est indépendante de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ choisie. En effet, soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites convergeant vers x. Par un raisonnement analogue au précédent, l'uniforme continuité de la fonction f sur A assure que

$$\lim_{n\to\infty} \delta(f(a_n), f(b_n)) = 0.$$

Donc la limite y est bien indépendante du choix de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On peut alors définir la fonction $\widetilde{f}$ par

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \text{ pour toute suite } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \,/\, \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Comme la fonction f est continue sur A, il est clair que $\widetilde{f}_{|A} = f$. Vérifions maintenant que la fonction $\widetilde{f}$ est uniformément continue sur X. Le fait que la fonction f soit uniformément continue sur A se traduit par

$$\forall \varepsilon\,,\ \exists \alpha \,/\, \forall (a,b) \in A^2\,,\ d(a,b) < \alpha \Rightarrow \delta(f(a), f(b)) < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Considérons maintenant un couple (x, y) d'éléments de X tels que $d(x, y) < \alpha$. Il existe alors deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A telles que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = y.$$

Il existe donc un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, b_n) < \alpha.$$

Donc, d'après la relation (1.3), on a

$$\delta(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon.$$

Par passage à la limite, on obtient que

$$d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)) \leq \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous allons maintenant démontrer un théorème profond, dont nous verrons par exemple au chapitre 2 qu'il implique des propriétés que l'on serait bien en peine de démontrer autrement. Avant d'énoncer (et de démontrer) ce théorème, nous allons établir le lemme suivant.

Lemme 1.2.1 *Soit (X,d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de X dont le diamètre tend vers 0. Il existe alors un élément x de X tel que*

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n = \{x\}.$$

Démonstration du lemme 1.2.1 On choisit dans chaque F_n un élément que l'on désignera par x_n. Comme la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, pour tout entier p, on sait que x_{n+p} appartient à F_n, donc que $d(x_n, x_{n+p}) \leq \delta(F_n)$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément x de X qui appartient bien sûr à l'intersection des F_n. Soit y un élément de cette intersection. On a alors

$$\forall n\,,\ d(x,y) \leq \delta(F_n)$$

et donc $d(x,y) = 0$; d'où le lemme.

Énonçons maintenant le théorème de Baire.

Théorème 1.2.4 (de Baire) *Soit (X,d) un espace métrique complet, on considère une suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ouverts denses dans X. Alors $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} U_n$ est dense.*

Démonstration du théorème 1.2.4 Soit V un ouvert quelconque de X, nous allons démontrer que $\bigcap_n U_n \cap V \neq \emptyset$, ce qui assurera le théorème.

L'ouvert U_0 est dense, donc $U_0 \cap V$ est un ouvert non vide. Donc il existe un réel strictement positif α_0 (que l'on peut supposer inférieur à 1) et un point x_0 de X tels que

$$B_f(x_0, \alpha_0) \subset U_0 \cap V. \tag{1.4}$$

L'ouvert U_1 est dense, donc l'ensemble $U_1 \cap B(x_0, \alpha_0)$ est un ouvert non vide. Donc il existe un réel strictement positif α_1 (que l'on peut supposer inférieur à $1/2$) et un point x_1 de X tels que

$$B_f(x_1, \alpha_1) \subset U_1 \cap B(x_0, \alpha_0).$$

Nous allons procéder par récurrence et supposer construite une suite $(x_j)_{0\leq j\leq n}$ d'éléments de X et une suite $(\alpha_j)_{0\leq j\leq n}$ telles que, pour tout $j \leq n$, on ait

$$\alpha_j \leq \frac{1}{j+1} \quad \text{et} \quad B_f(x_j, \alpha_j) \subset U_j \cap B(x_{j-1}, \alpha_{j-1}). \tag{1.5}$$

L'ouvert U_{n+1} est dense, donc l'ouvert $U_{n+1} \cap B(x_n, \alpha_n)$ est non vide. Il existe donc un réel strictement positif α_{n+1} (que l'on peut supposer inférieur à $1/(n+2)$) et un point x_{n+1} de X telles que

$$B_f(x_{n+1}, \alpha_{n+1}) \subset B(x_n, \alpha_n) \cap U_{n+1}.$$

On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X et une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs qui tend vers 0 et telle que

$$\forall m \geq n\,,\ x_m \in B(x_n, \alpha_n). \tag{1.6}$$

Comme la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Donc elle converge dans X qui est complet. Appelons x sa limite. D'après la relation (1.6), le point x appartient à $B_f(x_n, \alpha_n)$ pour tout entier n. Vu les relations (1.4) et (1.5), on a

$$\forall n \in \mathbf{N}\,,\ x \in V \cap \bigcap_{j\leq n} U_j.$$

Le théorème de Baire est ainsi démontré.

On utilise souvent l'énoncé suivant qui n'est rien d'autre que le théorème de Baire "passé au complémentaire".

Théorème 1.2.5 *Soit (X, d) un espace métrique complet, on considère une suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fermés d'intérieur vide dans X. Alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est d'intérieur vide.*

Nous utiliserons souvent le théorème de Baire sous la forme de ce corollaire, dont la démonstration, très facile, est laissée en exercice.

Corollaire 1.2.1 *Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés d'un espace métrique complet (X, d) dont la réunion est X. Alors il existe un entier n_0 tel que $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$.*

Dit autrement, un espace métrique complet n'est pas réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, ce qui est le cas d'un espace notoirement non complet, l'espace $\mathbf{Q}$.

Pour conclure cette section sur les espaces complets, nous allons examiner l'invariance de la propriété d'être complet par changement de distance.

Proposition 1.2.5 *Soient d et δ deux distances uniformément équivalentes sur X. Toute suite de Cauchy pour l'une est une suite de Cauchy pour l'autre.*

En effet, considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de Cauchy pour la distance d. Pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif η tel que

$$d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(x, y) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta(x, y) < \eta \Longrightarrow d(x, y) < \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant de Cauchy, il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall m \geq n_0\,,\ d(x_n, x_m) < \eta\,;$$

il existe ainsi un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall m \geq n_0\,,\ \delta(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

D'où la proposition.

Proposition 1.2.6 *Soient d et δ deux distances uniformément équivalentes sur X; si (X, d) est complet, alors (X, δ) l'est aussi.*

En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de (X, δ), d'après la proposition 1.2.5, c'est une suite de Cauchy pour la distance d. Mais comme (X, d) est complet, c'est une suite convergente pour d, donc pour δ puisque les distances d et δ étant uniformément équivalentes, sont topologiquement équivalentes.

1.3 La notion de compacité

Définition 1.3.1 *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est compacte si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A.*

Proposition 1.3.1 *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Si A est compacte, alors A est fermée et bornée.*

Démonstration de la proposition 1.3.1 Soit x un point de $\overline{A}$. D'après la proposition 1.1.8, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Comme A est supposée compacte, il existe une fonction d'extraction ϕ et un point ℓ de A tel que $\lim_{n\to\infty} a_{\phi(n)} = \ell$. Comme le suite $(a_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x, l'unicité de la limite implique que $\ell = x$ et donc que $x \in A$. Donc A est une partie fermée de X.

Démontrons maintenant qu'une partie compacte est bornée. Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suite d'éléments de A telles que

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \delta(A).$$

Comme A est compact, il existe une fonction d'extraction ϕ_0 et un point a de A tel que la suite $(x_{\phi_0(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a. De même, il existe une fonction d'extraction ϕ_1 et un point b de A tel que la suite $(y_{\phi_0\circ\phi_1(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers b. Par passage à la limite, on a

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} d(x_{\phi_0\circ\phi_1(n)}, y_{\phi_0\circ\phi_1(n)}) = d(a, b).$$

Donc $\delta(A)$ est fini et donc A est bornée.

Exercice 1.3.1 *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Le fermé $\overline{A}$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans X.*

ATTENTION! Il est presque toujours faux que les fermés bornés d'un espace métrique soient compacts. Les deux exemples suivants sont révélateurs.

Considérons l'espace $]0, 1[$ muni de la distance usuelle. C'est un ensemble borné. L'intervalle $]0, 1[$ est fermé dans lui-même, comme tout espace métrique. Cependant, la suite définie par

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

n'a aucune valeur d'adhérence dans $]0, 1[$ puisqu'elle converge vers 1. Donc cet espace n'est pas compact.

Considérons maintenant l'espace $\mathbf{R}$ muni de la distance définie par

$$\widetilde{d}(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Cette distance définit sur $\mathbf{R}$ est topologiquement équivalente à la distance $d(x, y) = |x - y|$ (exercice : vérifiez-le!). L'ensemble $\mathbf{R}$ est borné pour la distance $\widetilde{d}$. Il est fermé dans lui-même. Le lecteur se convaincra (et démontrera) que l'espace $(\mathbf{R}, \widetilde{d})$ n'est pas compact. Il lui suffira de considérer la suite $x_n = n$ qui ne converge pas dans $(\mathbf{R}, \widetilde{d})$.
Conclusion: Sauf dans le cas particulier de $\mathbf{R}^d$, muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$,

$$\textbf{fermé et borné} \quad \neq \quad \textbf{compact}.$$

Proposition 1.3.2 *Soit A une partie compacte d'un espace métrique (X, d). Si B est un fermé de X inclus dans A, alors B est aussi compact.*

Démonstration de la proposition 1.3.2 Soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de B. Comme B est inclus dans A qui est compacte, il existe une fonction d'extraction ϕ telle que $(b_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in A$. Comme B est un fermé de X, alors $\ell \in \overline{B} = B$. Donc B est compacte.

Le premier exemple (fondamental) de partie compacte donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.3.3 *Les intervalles $[a,b]$ sont des parties compactes de $(\mathbf{R}, |x-y|)$.*

Démonstration de la proposition 1.3.3 Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de l'intervalle $[a,b]$. L'ensemble $A_n \overset{\text{déf}}{=} \{x_m\,,\ m \geq n\}$ est une partie majorée de réels qui admet donc une borne supérieure que l'on note M_n. La suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante donc convergente. Le lecteur se convaincra aisément que la limite de la suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une valeur d'adhérence (c'est même la plus grande).

On en déduit la proposition suivante:

Proposition 1.3.4 *Dans le cas très exceptionnel de l'espace métrique $(\mathbf{R}, |x-y|)$, les parties fermées et bornées sont compactes.*

La proposition suivante permet de trouver beaucoup d'espaces compacts.

Proposition 1.3.5 *Soit $(X_1,d_1),\cdots,(X_N,d_N)$ une famille de N espaces métriques. Posons*

$$X = X_1 \times \cdots \times X_N \quad et \quad d((x_1,\cdots,x_N),(y_1,\cdots,y_N)) = \max_{1\leq j\leq N} d_j(x_j,y_j).$$

Soit, pour chaque j, une partie compacte A_j de X_j, alors la partie $A \overset{\text{déf}}{=} A_1 \times \cdots \times A_N$ est une partie compacte de X. En particulier, un produit fini d'espaces compacts est compact.

Démonstration de la proposition 1.3.5 Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite déléments de A. Par définition, il existe pour chaque j une suite $(x_n^j)_{n\in\mathbf{N}}$ de A_j telle que $x_n = (x_n^1,\cdots,x_n^N)$. Par définition d'une partie compacte, il existe une fonction d'extraction ϕ_1 et un point a_1 de A_1 tel que

$$\lim x^1_{\phi_1(n)} = a_1.$$

De même, il existe une fonction d'extraction ϕ_2 et un point a_2 de A_2 tel que

$$\lim x^2_{\phi_1\circ\phi_2(n)} = a_2.$$

En itérant N fois le processus, on construit une fonction d'extraction ϕ en posant

$$\phi \overset{\text{déf}}{=} \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_N$$

telle que,pour tout $j \in \{1,\cdots,N\}$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} x^j_{\phi(n)} = a_j.$$

Par définition de la distance sur X, cela implique que la suite $x_{\phi(n)}$ converge vers $(a_1,\cdots,a_N)$. D'où le résultat.

Corollaire 1.3.1 *Dans le cas* **très exceptionnel** *de l'espace $(\mathbf{R}^d, |x-y|)$, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Exercice 1.3.2 *Démontrer le même résultat en prenant*

$$\delta((x_1,\cdots,x_N),(y_1,\cdots,y_N)) = \sum_{j=1}^{N} d_j(x_j,y_j)$$

ou bien encore

$$\widetilde{d}((x_1,\cdots,x_N),(y_1,\cdots,y_N)) = \left(\sum_{j=1}^{N} d_j(x_j,y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.3.1 *Soit (X, d) un espace métrique. Il est compact si et seulement si pour toute famille $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'ouverts de X recouvrant X, c'est-à-dire telle que*

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,$$

on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(\lambda_j)_{1\leq j\leq N}$ telle que

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j}.$$

d'éléments de X possède une valeur d'adhérence.

Démonstration du théorème 1.3.1 Il s'agit de déduire d'une propriété sur les suites, une propriété sur les recouvrements d'ouverts. Une première étape consiste à le faire dans le cas des boules.

Lemme 1.3.1 *Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors, pour tout réel strictement positif α, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon α.*

Démonstration du lemme 1.3.1 Démontrons ce lemme par contraposition. Supposons qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on ne puisse recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon α. Soit x_0 un élément quelconque de X. Il existe un élément x_1 de X n'appartenant pas à $B(x_0, \alpha)$. Soit $(x_0, \cdots, x_p)$ un p-uplet d'éléments de X tel que, pour tout $m \neq n$, on ait $d(x_m, x_n) \geq \alpha$. Par hypothèse,

$$\bigcup_{n=1}^{p} B(x_n, \alpha) \neq X.$$

Donc, il existe un point x_{p+1} de X qui n'appartient pas à la réunion de boules ci-dessus. Par récurrence, nous construisons ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$m \neq n \Rightarrow d(x_m, x_n) \geq \alpha.$$

Une telle suite n'a bien sûr pas de valeur d'adhérence (exercice, vérifiez-le!). D'où le lemme.

Le lemme suivant, crucial pour la présente démonstration du théorème 1.3.1, sera utile pour d'autres propriétés des espaces compacts.

Lemme 1.3.2 (de Lebesgue) *Soit (X, d) un espace métrique et F une partie compacte de X. Pour toute famille $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'ouverts de X recouvrant F, il existe un nombre réel α strictement positif tel que*

$$\forall x \in F\,,\ \exists\lambda \in \Lambda\ /\ B(x, \alpha) \subset U_\lambda.$$

Démonstration du lemme 1.3.2 Pour démontrer ce lemme, considérons la fonction δ définie par

$$\delta \left\{ \begin{array}{rcl} F & \rightarrow & \mathbf{R}_+^\star \\ x & \mapsto & \sup\{\beta\ /\ \exists\lambda\ /\ B(x, \beta) \subset U_\lambda\}. \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction δ possède un minimum implique le lemme. Pour démontrer cela, établissons tout d'abord l'assertion suivante.

$$\forall\varepsilon\,,\ \forall x \in F\,,\ \exists\beta\ /\ d(x, y) < \beta \Longrightarrow \delta(y) > \delta(x) - \varepsilon. \tag{1.7}$$

Soient x un point de F et ε un réel strictement positifinférieur à $\delta(x)$. Supposons que y soit un point de F tel que $d(x,y) < \varepsilon/2$. L'inégalité triangulaire implique alors que

$$B(y, \delta(x) - \varepsilon) \subset B(x, \delta(x) - \varepsilon/2) \subset U_\lambda.$$

Et donc l'assertion (1.7) est démontrée.

Considérons maintenant une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de F telle que $\lim_{n\to\infty} \delta(x_n) = \inf_{x\in F} \delta(x)$. Par hypothèse, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite convergeant vers un point x_∞ de F. On note toujours $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cette suite extraite. D'après l'assertion (1.7), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \delta(x_n) > \delta(x_\infty) - \varepsilon.$$

Par passage à la limite, on en déduit que

$$\inf_{x\in F} \delta(x) \geq \delta(x_\infty) - \varepsilon,$$

et ce pour tout réel strictement positif ε. Il en résulte que $\delta(x_\infty) = \inf_{x\in F} \delta(x)$, ce qui conclut la démonstration du lemme.

La conjonction des deux lemmes 1.3.1 et 1.3.2 implique immédiatement le théorème.

La proposition suivante est une définition équivalente de la compacité qui est souvent utilisée.

Proposition 1.3.6 *Soit (X,d) un espace métrique. Il est compact si et seulement si pour toute famille de fermés $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que*

$$\forall N\,,\ \forall(\lambda_1\cdots,\lambda_N) \in \Lambda^N\ /\ \bigcap_{j=1}^{N} F_{\lambda_j} \neq \emptyset, \Longrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset. \tag{1.8}$$

Démonstration de la proposition 1.3.6 Procédons par contraposition. La proposition dit que (X,d) est compact si et seulement si, pour toute famille de ferms $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset \Longrightarrow \exists(\lambda_1,\cdots\lambda_N) \in \Lambda^N\ \bigcap_{j=1}^{N} F_{\lambda_j} = \emptyset. \tag{1.9}$$

Posons $U_\lambda = X \setminus F_\lambda$; c'est un ouvert. Le fait que l'intersection des F_λ soit vide est équivalent au fait que la famille des U_λ recouvre X. De même,le fait que l'intersection des F_{λ_j} soit vide est équivalent au fait que la famille des U_{λ_j} recouvre X. L'assertion (1.9) and thus (1.8) est équivalente au fait que (X,d) soit compact.

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X.$$

De même, on peut écrire que, pour toute famille finie $(\lambda_1,\cdots,\lambda_N) \in \Lambda^N$,

$$\bigcap_{j=1}^{N} F_{\lambda_j} = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j} = X.$$

D'où la proposition.

Théorème 1.3.2 (de Heine) *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques et f une application continue de X dans Y. Alors, pour toute partie compacte A de X, $f(A)$ est une partie compacte de Y. De plus, si X est compact, alors f est une application uniformément continue de X dans Y.*

Démonstration du théorème 1.3.2 Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $f(A)$. Par définition, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A telle que $y_n = f(a_n)$. Comme A est une partie compacte de X, il existe un point a' de A et une fonction d'extraction ϕ telle que

$$\lim_{n\to\infty} a_{\phi(n)} = a'$$

La fonction f étant continue, on a

$$\lim_{n\to\infty} y_{\phi(n)} = f(a') \in f(A).$$

Ceci démontre le premier point du théorème.

Pour démontrer le second point, observons que, par définition d'une fonction continue, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in X$, il existe α_x telle que l'on ait

$$d(x,x') < \alpha_x \Rightarrow \delta(f(x),f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'ensemble des boules $B(x,\alpha_x/2)$ forme un recouvrement de X par des ouverts. On en extrait un sous-recouvrement fini $(B(x_j,\alpha_{x_j}/2))_{1\le j\le N}$. On pose alors

$$\alpha = \inf_{1\le j\le N} \alpha_{x_j}.$$

Soit $(x,x') \in X^2$ tel que $d(x,x') < \alpha/2$. Comme la famille $(B(x_j,\alpha_{x_j}/2))_{1\le j\le N}$ recouvre X, il existe un indice $j \in \{1,\cdots,N\}$ tel que $B(x,\alpha/2) \subset B(x_j,\alpha_{x_j})$. Mais alors, le point x' appartient à $B(x_j,\alpha_{x_j})$ et l'on a ainsi

$$\begin{aligned}\delta(f(x),f(x')) &\le \delta(f(x),f(x_j)) + \delta(f(x_j),f(x')) \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

D'où le théorème.

Corollaire 1.3.2 *Soit f une fonction continue de (X,d) dans $(\mathbf{R},|x-y|)$. Si (X,d) est compact, alors la fonction f admet un minimum et un maximum, c'est-à-dire qu'il existe x_m et x_M dans X tels que*

$$\forall x \in X\,,\ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M).$$

Exercice 1.3.3 *Démontrez ce théorème en utilisant le lemme 1.3.2 de Lebesgue.*

Les relations entre le concept d'espaces complets et d'espaces compacts sont décrites par les deux énoncés suivants.

Proposition 1.3.7 *Soit (X,d) un espace métrique compact, il est alors complet.*

Démonstration de la proposition 1.3.7 En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de X. Comme l'espace X est compact, cetter suite admet une valeur d'adhérence et la proposition 1.2.2 nous dit qu'une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge; d'où la proposition.

La réciproque de cette proposition est bien sûr fausse. Par exemple, $\mathbf{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$ est un espace métrique complet qui n'est pas compact. Cependant, dans le cas des espaces métriques complets, on peut trouver une caractérisation des ensembles compacts uniquement en termes de boules.

Théorème 1.3.3 *Soit (X,d) un espace métrique complet, on considère une partie A de X. L'adhérence de A est compacte si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists (x_j)_{1\leq j\leq N} \,/\, A = \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j,\varepsilon). \tag{1.10}$$

Considérons une suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A. Il existe une infinité d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartenant à une boule (fermée) de rayon $1/2$. Il existe une infinité d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans une boule (fermée) de rayon $1/4$.

On définit ainsi par récurrence une suite décroissante de fermés $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$, dont le diamètre tend vers 0 et telle que chaque fermé F_n contienne une infinité d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comme l'espace métrique (X,d) est complet, d'après le lemme 1.2.1, il existe un élément x de X tel que x appartienne à l'intersection des F_n. Démontrons que x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Soit ε un réel strictement positif, on choisit F_n tel que $\delta(F_n) < \varepsilon$. Par construction des F_n, il existe une infinité d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dont la distance à x est inférieure à ε. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet donc une valeur d'adhérence dans $\overline{A}$. C'est un exercice facile et laissé au lecteur que de démontrer que $\overline{A}$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence, ce qui démontre le théorème.

Remarque L'hypothèse de complétude de l'espace métrique (X,d) est essentielle. Considérons l'intervalle $]0,1[$ dans $\mathbf{Q}$. Il est clair que l'hypothèse (1.10) est satisfaite, mais que l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbf{Q}$ n'est pas compact.

Théorème 1.3.4 (d'Ascoli) *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Supposons que (X,d) soit compact et (Y,δ) complet. On considère une partie A de $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y muni de la distance*

$$D(f,g) = \sup_{x\in X} \delta(f(x),g(x)).$$

Faisons les deux hypothèses suivantes :

i) La partie A est équicontinue i.e.

$$\forall x \in X\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \alpha > 0 \,/\, d(x,x') < \alpha \Rightarrow \forall f \in A\,,\ \delta(f(x),f(x')) < \varepsilon\,;$$

ii) pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x)\,,\ f \in A\}$ est d'adhérence compacte.

Alors A est d'adhérence compacte.

Démonstration du théorème 1.3.4 Pour démontrer ce théorème, nous allons tout d'abord observer que la première hypothèse se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in X\,,\ \forall f \in A\,,\ d(x,x') < \alpha \Rightarrow \delta(f(x),f(x')) < \varepsilon\,; \tag{1.11}$$

La démonstration de cette assertion est exactement la même que celle du théorème 1.3.2 ci-dessus (exercice : écrivez-la!). Nous allons maintenant énoncer un lemme montrant que les parties A qui sont uniformément équicontinues (c'est-à-dire qui vérifient l'assertion (1.11) ci-dessus) ont une propriété très spéciale vis-à-vis de la convergence.

Lemme 1.3.3 *Soient A une partie uniformément équicontinue de $\mathcal{C}(X,Y)$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de A. On a l'équivalence suivante*

$$\forall x \in X\,,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{C}(X,Y) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} D(f_n,f) = 0.$$

Démonstration du lemme 1.3.3 Il n'y a quelque chose à démontrer que de gauche à droite. Soit ε un réel strictement positif arbitraire. Par hypothèse, il existe un réel α strictement positif tel que

$$d(x,x') < \alpha \Rightarrow \forall n\,,\ \delta(f_n(x),f_n(x')) < \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Par passage à la limite, on obtient immédiatement que la fonction f est uniformément continue de X dans Y. On recouvre le compact X par une famille finie de boules $(B(x_j,\alpha))_{1\le j\le N_\varepsilon}$. Ainsi donc, on a

$$\begin{aligned}\delta(f_n(x),f(x)) &\le \delta(f_n(x),f_n(x_j)) + \delta(f_n(x_j),f(x_j)) + \delta(f(x_j),f(x))\\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1\le j\le N_\varepsilon} \delta(f_n(x_j),f(x_j)).\end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe n_0 tel que

$$\forall n \ge n_0\,,\ \max_{1\le j\le N_\varepsilon} \delta(f_n(x_j),f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

D'où le lemme.

Revenons à la démonstration du théorème d'Ascoli et considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A. Nous allons en extraire une sous-suite convergente.

Nous démontrerons très bientôt que dans tout espace compact, il existe une partie dénombrable dense (voir théorème 1.4.1) que l'on note $\mathcal{X} \overset{\text{déf}}{=} \{x_p, p\in\mathbf{N}\}$. Par hypothèse, l'ensemble

$$\{f(x_0)\,,\ f\in A\}$$

est d'adhérence compacte. Donc il existe une fonction φ_0 strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_{\varphi_0(n)}(x_0) = \ell(x_0).$$

De même, il existe un point $\ell(x_1)$ de Y et une fonction φ_1 strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}(x_1) = \ell(x_1).$$

On définit ainsi par récurrence une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que

$$\forall p\in\mathbf{N}\,,\ \forall k\le p\,,\ \lim_{n\to\infty} f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}(x_k) = \ell(x_k).$$

On définit alors la fonction ψ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ par

$$\psi(n) = \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n).$$

C'est une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$. En effet, observons tout d'abord que toute fonction μ strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ vérifie $\mu(n)\ge n$. Donc, si $n<m$, on a

$$\psi(n) = \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n) < \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n\circ\varphi_{n+1}\circ\varphi_m(m) = \psi(m).$$

Par construction, la suite extraite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$\forall p \in \mathbf{N}\,,\ \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x_p) = \ell(x_p). \tag{1.12}$$

Démontrons maintenant que la fonction ℓ est uniformément continue sur $\mathcal{X}$. Soit ε un réel strictement positif, on considère un réel α vérifiant l'assertion (1.11). Pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $d(x_p,x_q)<\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\delta(\ell(x_p),\ell(x_q)) &\leq \delta(\ell(x_p),f_{\psi(n)}(x_p)) + \delta(f_{\psi(n)}(x_p),f_{\psi(n)}(x_q)) + \delta(f_{\psi(n)}(x_q),\ell(x_q))\\ &\leq \varepsilon + \delta(\ell(x_p),f_{\psi(n)}(x_p)) + \delta(f_{\psi(n)}(x_q),\ell(x_q)).\end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour tout n, on obtient, en passant à la limite $n\to\infty$,

$$d(x_p,x_q)<\alpha \Rightarrow d(\ell(x_p),\ell(x_q))\leq\varepsilon.$$

La fonction ℓ étant uniformément continue sur la partie dense $\mathcal{X}$ et l'espace Y étant complet, on peut appliquer le théorème 1.2.3 qui affirme que l'on peut prolonger ℓ en une fonction uniformément continue sur X tout entier. Cette fonction est définie par

$$\ell(x) = \lim_{p\to\infty} \ell(y_p)\,,\ (y_p)_{p\in\mathbf{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbf{N}} \,/\, \lim_{p\to\infty} y_p = x. \tag{1.13}$$

D'après le lemme 1.3.3, il suffit de démontrer que

$$\forall x \in X\,,\ \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x) = \ell(x).$$

La réunion de A et de $\{\ell\}$ est naturellement une partie uniformément équicontinue. Soit ε un réel strictement positif arbitraire et x un élément de X. Il existe un réel strictement positif α tel que

$$\forall n\in\mathbf{N}\,,\ d(x,x')<\alpha \Rightarrow \sup_{n\in\mathbf{N}} \delta(f_{\psi(n)}(x),f_{\psi(n)}(x')) + \delta(\ell(x),\ell(x')) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe un entier p tel que

$$d(x,x_p)<\alpha.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\delta(f_{\psi(n)}(x),\ell(x)) &\leq \delta(f_{\psi(n)}(x),f_{\psi(n)}(x_p)) + \delta(f_{\psi(n)}(x_p),\ell(x_p)) + \delta(\ell(x_p),\ell(x))\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \delta(f_{\psi(n)}(x_p),\ell(x_p)).\end{aligned}$$

La relation (1.12) permet de conclure la démonstration du théorème d'Ascoli.

Exercice 1.3.4 *Démontrez la réciproque du théorème d'Ascoli, à savoir que si une partie A de $\mathcal{C}(X,Y)$ est compacte, alors elle vérifie les conditions i) et ii) de l'énoncé du théorème d'Ascoli.*

Exercice 1.3.5 *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques compacts. Démontrez que l'ensemble des fonctions k-lipschitziennes de (X,d) dans (Y,δ) est compact dans $\mathcal{C}(X,Y)$.*

Exercice 1.3.6 *Soit (X,d) un espace métrique compact. On considère l'ensemble $X^{\mathbf{N}}$ des suites d'éléments de X.*

1) On définit l'application $d_{\mathbf{N}}$ de $X^{\mathbf{N}} \times X^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}^+$ par

$$d_{\mathbf{N}}((x_n)_{n\in\mathbf{N}},(y_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{d(x_n,y_n),1\}.$$

Démontrer que $d_{\mathbf{N}}$ est une distance sur $X^{\mathbf{N}}$.

2) Soit $(x^{(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $X^{\mathbf{N}}$ et x un élément de $X^{\mathbf{N}}$. Démontrez que

$$\lim_{p\to\infty} x^{(p)} = x \quad \text{si et seulement si} \quad \forall n \in \mathbf{N}\,,\ \lim_{p\to\infty} x_n^{(p)} = x_n.$$

3) Démontrez que $(X^{\mathbf{N}}, d_{\mathbf{N}})$ est compact.

4) Démontrez que U est un ouvert de $(X^{\mathbf{N}}, d_{\mathbf{N}})$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe une partie finie J de $\mathbf{N}$ et un réel strictement positif α tel que

$$\forall y \in X^{\mathbf{N}}\,,\ \forall j \in J\,,\ d(y_j,x_j) < \alpha \Rightarrow y \in U.$$

Exercice 1.3.7 *Exhiber une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui soit une suite bornée de l'espace des fonctions Lipschitziennes, telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ mais $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tende pas vers 0 dans l'espace des fonctions lipschiztiennes de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.*

1.4 Espaces séparables

Cette notion est moins fondamentale que celle d'espace complet ou compact. Cependant, elle nous sera utile à plusieurs reprises dans la suite du cours.

Définition 1.4.1 *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que (X,d) est séparable si et seulement si il existe une suite dense dans X.*

Dit autrement, cette définition signifie que, dans un espace métrique séparable (X,d), il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X telle que

$$\forall x \in X\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists m \,/\, d(x,x_m) < \varepsilon.$$

Exemple. L'espace $\mathbf{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$ est séparable, car la suite des rationnels est dense dans $\mathbf{R}$.

Proposition 1.4.1 *Soit $(X_1,d_1),\cdots,(X_N,d_N)$ une famille de N espaces métriques séparables. Si l'on pose*

$$X = X_1 \times \cdots \times X_N \quad et \quad d((x_1,\cdots,x_N),(y_1,\cdots,y_N)) = \max_{1\le j\le N} d_j(x_j,y_j),$$

alors l'espace (X,d) est un espace séparable.

Démonstration de la proposition 1.4.1 Pour chaque espace X_j, il existe une partie dénombrable D_j dense dans X_j. Considérons un point $x = (x_1, \cdots, x_N)$ quelconque de X et posons $D = D_1 \times \cdots \times D_N$. Cette partie D de X est dénombrable en tant que produit fini de parties dénombrables. De plus, comme D_j est dense dans X_j, pour tout ε strictement positif et tout j compris entre 1 et N, il existe un y_j appartenant à D_j tel que l'on ait

$$d_j(x_j, y_j) < \varepsilon.$$

Par définition de la distance d, on a $d(x, y) < \varepsilon$. La proposition est ainsi démontrée.

Proposition 1.4.2 *Soient (X, d) un espace métrique séparable et A une partie quelconque de X. L'espace métrique (A, d) est séparable.*

Démonstration de la proposition 1.4.2 Pour démontrer cette proposition, désignons par $\mathbf{D}$ une partie dénombrable dense de X. Pour tout entier n et tout x de $\mathbf{D}$, on choisit un élément $a_{x,n}$ de $B(x, n^{-1}) \cap A$ si cet ensemble est non vide. S'il est vide, on prend un quelconque élément de A. On a ainsi défini une partie dénombrable $\widetilde{\mathbf{D}} \overset{\text{déf}}{=} (a_{x,n})_{(x,n)\in \mathbf{D}\times\mathbf{N}}$ de A.

Démontrons que $\widetilde{\mathbf{D}}$ est dense dans A. Soit a un élément de A. Il existe un élément x de $\mathbf{D}$ tel que $d(x, a) < n^{-1}$. Par définition de $\widetilde{\mathbf{D}}$, l'élément $a_{x,n}$ appartient à $\widetilde{\mathbf{D}} \cap B(x, n^{-1})$. Donc, il en résulte que

$$d(a, a_{x,n}) \leq d(a, x) + d(x, a_{x,n},) < \frac{2}{n},$$

d'où la proposition.

Théorème 1.4.1 *Tout espace métrique (X, d) qui est compact est séparable.*

Démonstration du théorème 1.4.1 Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des boules de rayon n^{-1}. Cet ensemble constitue bien évidemment un recouvrement ouvert de X. L'hypothèse de compacité fait que nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini. Désignons, pour chaque entier n, par $(x_{j,n})_{1\leq j\leq J(n)}$ une suite telle que

$$X = \bigcup_{j=1}^{J(n)} B(x_{j,n}, n^{-1}).$$

Soit D l'ensemble défini par

$$\{x_{j,n}\,,\ 1 \leq j \leq J(n)\,,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Cet ensemble D est dénombrable. Démontrons qu'il est dense. Pour cela, considérons un réel strictement positif ε arbitraire et un point x quelconque de X. On choisit alors un entier n tel que n soit strictement supérieur à l'inverse de ε. Par définition des $(x_{j,n})$, il existe un entier j tel que

$$d(x, x_{j,n}) < \frac{1}{n}\cdot$$

Vu le choix de l'entier n, le théorème est démontré.

Nous allons maintenant donner un exemple d'espace métrique non séparable.

Proposition 1.4.3 *Soit X l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ muni de la distance*

$$d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

L'espace métrique (X, d) ainsi défini n'est pas séparable.

Démonstration de la proposition 1.4.3 Considérons l'ensemble A défini par

$$A = \{\mathbf{1}_P, P \in \mathcal{P}([0,1])\},$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des parties de X. Remarquons deux choses. Tout d'abord, remarquons que, si $P \neq Q$, alors $d(\mathbf{1}_P, \mathbf{1}_Q) = 1$. Ensuite, l'ensemble $\mathcal{P}([0,1])$, donc aussi l'ensemble A, n'est pas dénombrable. La démonstration de la proposition se conclut grâce au lemme suivant.

Lemme 1.4.1 *Soit (X,d) un espace métrique. S'il existe une partie non dénombrable A et un réel α strictement positif tels que*

$$\forall (x_1,x_2) \in A^2\,,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow d(x_1,x_2) \geq \alpha,$$

alors l'espace (X,d) n'est pas séparable.

Démonstration du lemme 1.4.1 Soit D une partie dense dans X. Pour tout $a \in A$, il existe un élément z de D tel que

$$d(a,z) \leq \frac{\alpha}{3}\cdot$$

Soient a_1 et a_2 deux éléments de A distincts. On leur associe deux éléments z_1 et z_2 de D vérifiant l'inégalité ci-dessus. Mais alors, on a

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq d(a_1,a_2)\\
&\leq d(a_1,z_1) + d(a_2,z_2) + d(z_1,z_2)\\
&\leq \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + d(z_1,z_2)\\
&\leq \frac{2\alpha}{3} + d(z_1,z_2).
\end{aligned}$$

Donc z_1 est différent de z_2. Donc si une partie est dense, elle ne peut être dénombrable. Le lemme est ainsi démontré.

1.5 Quelques remarques sur la topologie des ouverts de $\mathbf{R}^d$

Le but de cette section est essentiellement de démontrer quelques résultats qui nous serons utiles dans la suite. Ici, lorsque nous ferons référence à des propriétés métriques, on supposera toujours $\mathbf{R}^d$ muni de la distance associée à la norme euclidienne.

Rappelons à nouveau que, sauf dans le cas très particulier de $\mathbf{R}^d$,

$$\textbf{fermé et borné} \quad \neq \quad \textbf{compact}.$$

Il est cependant possible de décrire les compacts d'un ouvert de $\mathbf{R}^d$ grâce au théorème suivant.

Théorème 1.5.1 (de caractérisation des compacts d'un ouvert de $\mathbf{R}^d$) *Soit A une partie fermée et bornée d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$. Alors*

$$A \text{ est compacte} \iff \inf_{x\in A} d(x, X\setminus\Omega) > 0.$$

Démonstration du théorème 1.5.1 Supposons A compacte. Comme Ω est ouvert, pour tout x de A, $d(x, X \setminus \Omega)$ est strictement positif. D'après l'exercice 1.1.5, on sait que la fonction distance d'un point à un ensemble est continue. Le corollaire 1.3.2 nous dit que l'infimum est atteint, donc il est strictement positif.

Réciproquement, soit A une partie fermée et bornée de Ω vérifiant

$$\delta \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{x \in A} d(x, X \setminus \Omega) > 0.$$

Pour démontrer que A est compacte, il suffit de démontrer que A est une partie fermée de $\mathbf{R}^d$. Comme A est fermée dans Ω, cela signifie qu'il existe un fermé B de $\mathbf{R}^d$ tel que $A = B \cap \Omega$. Soit $\Omega_{\delta/2}$ le fermé défini par

$$\Omega_{\delta/2} \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \,/\, d(x, X \setminus \Omega) \geq \delta/2\}.$$

On a les relations ensemblistes suivantes

$$A = A \cap \Omega_{\delta/2} = B \cap \Omega \cap \Omega_{\delta/2} = B \cap \Omega_{\delta/2}.$$

L'ensemble $B \cap \Omega_{\delta/2}$ est un fermé de $\mathbf{R}^d$ en tant qu'intersection de deux fermés, donc A est une partie fermée de $\mathbf{R}^d$.

Le résultat suivant nous sera également utile

Théorème 1.5.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$, il existe une suite de compacts $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que*

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n = \Omega \quad \textit{et} \quad K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1},$$
$$\forall K \textit{ compact de } \Omega\,,\ \exists n \,/\, K \subset \overset{\circ}{K}_n\,.$$

Démonstration du théorème 1.5.2 Il suffit de poser

$$K_n \stackrel{\text{déf}}{=} B(0,n) \cap \left\{ x \in \mathbf{R}^d \,/\, d(x, \mathbf{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme Ω est un ouvert, pour tout x de X, $d(x, \mathbf{R}^d \setminus \Omega)$ est strictement positif. Donc, il existe un entier n tel que $x \in K_n$. De plus,

$$K_n \subset \overset{\circ}{B}(0, n+1) \cap \left\{ x \in \mathbf{R}^d \,/\, d(x, \mathbf{R}^d \setminus \Omega) > \frac{1}{n} \right\} \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}\,.$$

D'où le premier point du théorème. Quant au second, il d'observer que

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overset{\circ}{K}_{n+1} = \Omega$$

puique $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

Définition 1.5.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$, on appelle suite exhaustive de compacts toute suite de compacts qui vérifie les conclusions du théorème 1.5.2 ci-dessus.*

Chapitre 2

Espaces normés, de Banach

Dans toute la suite du cours, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

2.1 Définition des espaces normés

Définition 2.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. On dit qu'une application N de E dans $\mathbf{R}^+$ est une semi-norme sur E si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$,
- *Pour tout λ appartenant à $\mathbf{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*

On dit qu'une application N de E dans $\mathbf{R}^+$ est une norme sur E si et seulement si c'est une semi-norme telle que $N(x) = 0$ implique que $x = 0$.

Notations Très souvent, on désigne une norme par $\|\cdot\|_E$ ou bien par $\|\cdot\|$.
Exemples On considère sur $\mathbf{R}^d$ la norme euclidienne usuelle; c'est une norme au sens précédent. Soit X un ensemble, on considère l'espace des fonctions bornées de X dans $\mathbf{K}$. On définit alors l'application

$$f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)| \, ;$$

c'est une norme au sens ci-dessus.

Parmi tous les exemples que l'on peut donner, il en est de très importants, notamment celui-ci.

Théorème 2.1.1 *Soit (X, μ) un espace mesuré. Pour tout réel $p \in [1, +\infty]$, on considère l'espace $L^p(X, d\mu)$. L'application de $L^p(X, d\mu)$ dans $\mathbf{R}^+$ définie*

$$\begin{aligned} &\text{pour } p < +\infty \quad \text{par} \quad f \mapsto \|f\|_{L^p} \overset{\text{déf}}{=} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \\ &\text{pour } p = +\infty \quad \text{par} \quad f \mapsto \text{supess}(|\text{f}|) \end{aligned}$$

est une norme.

Définition 2.1.2 *Soient E un espace vectoriel et N une norme sur E; le couple (E, N) est appelé un espace normé.*

La proposition suivante va munir naturellement un espace normé d'une structure d'espace métrique.

Proposition 2.1.1 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, alors l'application définie par*

$$\begin{cases} E \times E & \to & \mathbf{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{cases}$$

est une distance sur E, appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

L'évidente démonstration est laissée en exercice.
Convention: Sauf mention expresse du contraire, on considérera toujours l'espace E muni de la structure métrique ainsi définie.

Nous pouvons dès maintenant percevoir de très grandes différences entre la dimension finie et la dimension infine. En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues puisque ce sont des polynômes homogènes de degré 1. Il n'en va pas de même en dimension infinie. Par exemple, soit E l'espace des fonctions C^1 de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ muni de la norme $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Considérons l'application δ_0' définie par

$$\delta_0' \begin{cases} E & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f'(0). \end{cases}$$

La forme linéaire n'est pas continue (exercice: vérifiez-le !)

Une autre différence qui s'avérera capitale est que la boule unité d'un espace de dimension infinie n'est jamais compacte. On a le théorème suivant, dont la démonstration sera vue en exercice.

Théorème 2.1.2 (de Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé; la dimension de E est finie si et seulement si la boule unité fermée de E est compacte.*

Définition 2.1.3 *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$; on dit que A est totale si et seulement si l'espace vectoriel engendré par A est dense dans E.*

Exercice 2.1.1 *Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la famille définie par $e_n(p) = \delta_{n,p}$. Démontrez que cette famille est totale dans $\ell^p(\mathbf{N})$.*

Comme nous avons une structure d'espace métrique, nous pouvons définir la notion de fonction continue. Sur un espace vectoriel, la classe des applications linéaires joue évidemment un rôle privilégié. Leur continuité se vérifie de manière très simple.

Théorème 2.1.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et ℓ une application linéaire de E dans F. L'application ℓ est lipschitzienne si et seulement si il existe un ouvert U de E tel que ℓ soit bornée sur U, c'est-à-dire tel que*

$$\sup_{x\in U} \|\ell(x)\|_F < \infty.$$

Démonstration du théorème 2.1.3 Il est clair qu'il existe un ouvert sur lequel une application lipschitzienne est bornée (par exemple n'importe quelle boule). Réciproquement, considérons un ouvert U sur lequel l'application linéaire ℓ est bornée. Soit x_0 appartenant à U. L'ensemble $U - x_0$ est un ouvert (exercice: démontrez-le!) contenant l'origine. Par définition d'un ouvert, il existe une boule ouverte de centre 0 et de rayon α incluse dans $U - x_0$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} M \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x\in B(0,\alpha)} \|\ell(x)\| &\leq \sup_{x\in U-x_0} \|\ell(x)\| \\ &\leq \sup_{y\in U} \|\ell(y-x_0)\| \\ &\leq \sup_{y\in U} \|\ell(y)\| + \|\ell(x_0)\|. \end{aligned}$$

Donc l'application ℓ est bornée sur une boule de centre 0 et de rayon α. Pour tout y de $E\backslash\{0\}$, on a

$$\frac{\alpha}{2\|y\|_E} y \in B(0,\alpha).$$

On en déduit que

$$\left\| \ell\left(\frac{\alpha}{2\|y\|_E} y\right) \right\| \leq M.$$

Par linéarité de ℓ et homogénéité de la norme, on trouve que

$$\forall y \in E\,,\ \|\ell(y)\|_F \leq \frac{2M}{\alpha}\|y\|_E.$$

Cette inégalité étant vraie pour $y = x - x'$, la démonstration du théorème est achevée.

Théorème 2.1.4 *Soient $((E_j, \|\cdot\|_j))_{1\leq j\leq N}$ une famille d'espaces vectoriels normés et $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On considère une application N-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_N$ dans F. Cette application f est continue de $E_1 \times \cdots \times E_N$ dans F si et seulement si*

$$\sup_{\|x_1\|_1\leq 1,\cdots,\|x_N\|_N\leq 1} \|f(x_1,\cdots,x_N)\| < \infty.$$

De plus, si f est continue de $E_1 \times \cdots \times E_N$ dans F, alors elle est lipschitztienne sur les ensembles bornés de $E_1 \times \cdots \times E_N$.

La démonstration de ce théorème sera vue en exercice.

Proposition 2.1.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés; on désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. L'application définie par*

$$\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)} \stackrel{déf}{=} \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|\ell(x)\|_F$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration de la proposition 2.1.2 Il est très facile de démontrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Vérifions les trois propriétés définissant une norme. Supposons que $\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$. Ceci implique que $\ell(x) = 0$ pour tout x de la boule unité (c'est ainsi que l'on nomme usuellement la boule de centre 0 et de rayon 1). Alors, pour tout $x \neq 0$,

$$\ell\left(\frac{x}{2\|x\|_E}\right) = \frac{1}{2\|x\|_E}\ell(x) = 0$$

On en déduit que $\ell(x) = 0$ et donc que $\ell = 0$. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\|\ell_1(x) + \ell_2(x)\|_F \leq \|\ell_1(x)\|_F + \|\ell_2(x)\|_F$$

Ainsi donc, pour tout x de E de norme inférieure à 1, on a

$$\|\ell_1(x) + \ell_2(x)\|_F \leq \|\ell_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|\ell_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on en déduit que

$$\|\ell_1 + \ell_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|\ell_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|\ell_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Enfin, soient $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\|\lambda\ell(x)\|_F = |\lambda| \times \|\ell(x)\|_F.$$

D'où il résulte que

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\lambda\ell(x)\|_F = |\lambda| \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\ell(x)\|_F.$$

D'où la proposition.

Proposition 2.1.3 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés et (ℓ_1, ℓ_2) un élément de $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$. La composée $\ell_2 \circ \ell_1$ appartient à $\mathcal{L}(E, G)$ et*

$$\|\ell_2 \circ \ell_1\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|\ell_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|\ell_2\|_{\mathcal{L}(F,G)}.$$

Démonstration de la proposition 2.1.3 Pour démontrer cela, il sufit d'observer que

$$\begin{aligned} \|\ell_2 \circ \ell_1(x)\|_G &\leq \|\ell_2\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|\ell_1(x)\|_F \\ &\leq \|\ell_2\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|\ell_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E. \end{aligned}$$

Remarques Si $E = F = G$, on pose alors $\mathcal{L}(E) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{L}(E, E)$. Pour tout $(\ell_1, \ell_2) \in \mathcal{L}(E)^2$,

$$\|\ell_2 \circ \ell_1\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|\ell_1\|_{\mathcal{L}(E)} \|\ell_2\|_{\mathcal{L}(F)}. \tag{2.1}$$

2.2 Espaces de Banach

Définition 2.2.1 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si l'espace métrique (E, d) où d est la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ (i.e. $d(x, y) = \|x - y\|$) est un espace complet.*

Exemples L'espace $\mathbf{R}^d$ muni de la norme euclidienne est un espace complet. Plus généralement, tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est un espace de Banach. Soient E un espace de Banach et X un ensemble; l'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{B}(X,E)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$$

est un espace de Banach.

Soit $C^k(\mathbf{S})$ l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques et k fois continûment dérivables. muni de la norme

$$\|f\|_k \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x \in [0,2\pi] \\ j \leq k}} |f^{(j)}(x)|$$

est un espace de Banach.

Remarque Les espaces normés que nous rencontrerons seront toujours complets. Le théorème suivant est la raison essentielle du succès de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Théorème 2.2.1 *Soit (X, μ) un espace mesuré. Pour tout réel p appartenant à l'intervalle $[1, +\infty]$, l'espace $(L^p(X, d\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach.*

La proposition suivante va nous fournir un nouvel exemple très important.

Proposition 2.2.1 *Soient E un espace normé et F un espace de Banach. Alors l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme définie dans la proposition 2.1.2 est un espace de Banach.*

Démonstration de la proposition 2.2.1 Considérons une suite de Cauchy $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{L}(E, F)$. D'après la définition de la norme sur l'espace $\mathcal{L}(E, F)$, on en déduit que, pour tout x de E, la suite $(\ell_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de F. L'espace F étant supposé complet, il existe, pour tout x de E, un élément de F, noté $\ell(x)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n(x) = \ell(x).$$

Il suffit maintenant de démontrer que ℓ appartient à $\mathcal{L}(E, F)$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n = \ell \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}(E, F).$$

L'unicité de la limite assure très facilement que ℓ est une application linéaire. Comme la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, elle est bornée (proposition 1.2.1). Il existe donc une constante C telle que

$$\sup_{\substack{n\in\mathbf{N} \\ \|x\|_E\leq 1}} \|\ell_n(x)\|_F \leq C.$$

Par passage à la limite, on en déduit que

$$\sup_{\|x\|_E\leq 1} \|\ell(x)\|_F \leq C.$$

Donc, l'application linéaire ℓ est continue. Démontrons la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers ℓ dans $\mathcal{L}(E, F)$. La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant de Cauchy, pour tout ε strictement positif, il existe un entier n_0 tel que l'on ait, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\sup_{\substack{\|x\|_E\leq 1 \\ p\in\mathbf{N}}} \|\ell_n(x) - \ell_{n+p}(x)\|_F < \varepsilon.$$

Par passage à la limite lorsque p tend vers l'infini, on obtient

$$\sup_{\|x\|_E\leq 1} \|\ell_n(x) - \ell(x)\|_F \leq \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

Théorème 2.2.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, G un sous-espace dense de E et ℓ une application linéaire continue de G dans F. Supposons que F soit complet. Il existe alors un unique élément $\widetilde{\ell}$ de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $\widetilde{\ell}_{|G} = \ell$.*

Démonstration du théorème 2.2.2 Il suffit d'appliquer le théorème 1.2.3 et de vérifier que le prolongement ainsi obtenu est linéaire, ce qui est un exercice facile laissé au lecteur.

Proposition 2.2.2 *Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors, si la série $(\|x_n\|_E)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, alors la suite*

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n \quad \textit{est convergente.}$$

Démonstration de la proposition 2.2.2 En effet, on a

$$\begin{aligned} \|S_{N+P} - S_N\| &= \left\| \sum_{n=N+1}^{N+P} x_n \right\| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \|x_n\|. \end{aligned}$$

L'hypothèse de sommabilité implique que, pour tout ε strictement positif, il existe un entier N_0 tel que

$$\forall N \geq N_0\,,\ \forall P\,,\ \sum_{n=N+1}^{N+P} \|x_n\| < \varepsilon.$$

La suite $(S_N)_{N\in\mathbf{N}}$ est donc de Cauchy, ce qui, vu que l'espace E est de Banach, assure la proposition.

Théorème 2.2.3 *Si E est un espace normé tel que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on ait*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \|x_n\|_E < \infty \Rightarrow S_N \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{N} x_n \quad \textit{converge,}$$

alors l'espace E est de Banach.

Démonstration du théorème 2.2.3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de E, nous allons extraire de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente, ce qui, d'après la proposition 1.2.2, assurera le résultat.

On définit l'application ϕ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ par $\phi(0) = 0$ et

$$\phi(n+1) \overset{\text{déf}}{=} \min\left\{ m \geq \phi(n)+1\,,\ \sup_{p\geq 0} \|a_m - a_{m+p}\| \leq \frac{1}{(2+n)^2} \right\}.$$

Ainsi donc, on a, pour tout entier n,

$$\|a_{\phi(n+1)} - a_{\phi(n)}\| \leq \frac{1}{(1+n)^2}.$$

Posons $x_n \overset{\text{déf}}{=} a_{\phi(n+1)} - a_{\phi(n)}$. On a

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \|x_n\| \leq \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{(1+n)^2} < \infty.$$

Donc par hypothèse, la suite

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n = a_{\phi(N)} - a_0$$

converge; d'où le théorème.

Exercice 2.2.1 *Soient E et F deux espaces normés tels que F soit complet. On considère une suite bornée $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E, dense dans E et une application linéaire ℓ de G dans F telle que*

$$\forall x \in G\,,\ \lim_{n\to\infty} \ell_n(x) = \ell(x).$$

Démontrez que l'on peut prolonger ℓ en un élément $\widetilde{\ell}$ de $\mathcal{L}(E,F)$ et que

$$\forall x \in E\,,\ \lim_{n\to\infty} \ell_n(x) = \widetilde{\ell}(x).$$

Exercice 2.2.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés tels que E soit un espace de Banach. Si $\imath$ est une isométrie de E dans F, alors $\imath(E)$ est fermé dans F.*

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences du théorème 1.2.4.

Théorème 2.2.4 (de Banach-Steinhaus) *Soient E et F deux espaces normés et $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$. Supposons que E soit complet. Supposons que, pour tout x de E, la limite de la suite $(\ell_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ existe; désignons la par $\ell(x)$.*

Alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathcal{L}(E,F)$, ce qui implique en particulier que ℓ appartient à $\mathcal{L}(E,F)$. De plus, on a

$$\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\ell_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Démonstration du théorème 2.2.4 La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *Soient E et F deux espaces normés et $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$. Supposons que E soit complet. Supposons que, pour tout x de E, la suite $(\ell_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite bornée de F.*

Alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration du lemme 2.2.1 Considérons les ensembles $F_{n,p}$ définis par

$$F_{n,p} = \{x \in E \,/\, \|\ell_n(x)\|_F \leq p\}.$$

Ces ensembles $F_{n,p}$ sont des fermés en tant qu'image réciproque de fermés par une application continue. Donc les ensembles F_p définis par

$$F_p \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_{n,p}$$

sont des ensembles fermés car ce sont des intersections de fermés. De plus, soit x un élément quelconque de E. La suite $(\ell_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est supposée bornée. Donc, il existe un entier p tel que x appartienne à F_p. Cela signifie que la réunion de tous les F_p est l'espace E tout entier. D'après le corollaire 1.2.1 du théorème 1.2.4 de Baire, il existe un entier p_0 tel que $\overset{\circ}{F}_{p_0} \neq \emptyset$. Donc, il existe un point x_0 et un réel strictement positif α tel que $B(x_0,\alpha)$ soit inclus dans F_{p_0}. On a donc

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ \|x\|\leq\alpha}} \|\ell_n(x)\|_F &\leq \sup_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ \|x\|\leq\alpha}} \|\ell_n(x+x_0)\|_F + \|\ell_n(x_0)\|_F \\
&\leq \sup_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ x\in B(x_0,\alpha)}} \|\ell_n(x)\|_F + \|\ell_n(x_0)\|_F \\
&\leq 2p_0.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x de E de norme plus petite que 1, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\ell_n(x)\|_F &\leq \alpha^{-1}\Big\|\ell_n\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\Big\|_F \\ &\leq \frac{2p_0}{\alpha}\,. \end{aligned}$$

Donc la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathcal{L}(E,F)$.

Revenons à la démonstration du théorème. Par passage à la limite, on obtient alors que,

$$\forall x \in B(x_0,\alpha)\,,\ \|\ell(x)\| \leq 2p_0.$$

Démontrons maintenant la majoration de la norme de ℓ. Soit x un élément de E de norme 1. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \|\ell(x)\|_F &= \lim_{n\to\infty} \|\ell_n(x)\|_F \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|\ell_n(x)\|_F \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \|\ell_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \quad (\text{car } \|x\|_E = 1). \end{aligned}$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Remarque L'inégalité majorant la norme de ℓ peut être stricte comme le montre l'exemple suivant.

On considère l'espace $\ell^1(\mathbf{N})$ des suites à valeurs complexes absolument convergentes. C'est bien sûr un espace de Banach. On considère la suite de formes linéaires $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$e_n((x_p)_{p\in\mathbf{N}}) \stackrel{\text{déf}}{=} x_n.$$

C'est un exercice facile de démontrer que

$$\forall x \in \ell^1(\mathbf{N})\,,\ \lim_{n\to\infty} e_n(x) = 0.$$

Il est très facile d'observer que $\|\ell_n\|_{\mathcal{L}(E,\mathbf{C})} = 1$.

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 2.2.5 (de Banach) *Soient E et F deux espaces de Banach et A un élément de $\mathcal{L}(E,F)$. Si A est bijective, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

2.3 Inverses et spectre dans $\mathcal{L}(E)$

L'un des résultats de base sur les éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est le suivant.

Théorème 2.3.1 *Soit E un espace de Banach; l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui sont à distance strictement inférieure à 1 de* Id *sont inversibles dans $\mathcal{L}(E)$. Dit autrement,*

$$\forall \ell \in B_{\mathcal{L}(E)}(\mathrm{Id},1)\,,\ \exists!\, \ell^{-1} \in \mathcal{L}(E) \,/\, \ell\circ\ell^{-1} = \ell^{-1}\circ\ell = \mathrm{Id}\,.$$

Démonstration du théorème 2.3.1 Posons

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (\ell - \mathrm{Id})^n.$$

D'après la proposition 2.2.2, la suite $(S_N)_{N\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément ℓ^{-1} de $\mathcal{L}(E)$ dès que $\|\ell - \mathrm{Id}\,\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} S_N\ell &= S_N(\mathrm{Id} + \ell - \mathrm{Id}) \\ &= \mathrm{Id} - (-1)^{N+1}(\ell - \mathrm{Id})^{N+1} \\ &= \ell S_N. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on conclut la démonstration de ce théorème.

Corollaire 2.3.1 *L'ensemble $U(E)$ des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est un ouvert et l'application* Inv *définie par*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} U(E) & \to & U(E) \\ \ell & \mapsto & \ell^{-1} \end{array} \right.$$

est continue.

Démonstration du corollaire 2.3.1 Soit ℓ_0 un élément de $U(E)$. Considérons alors un élément ℓ de $\mathcal{L}(E)$ tel que

$$\|\ell - \ell_0\|_{\mathcal{L}(E)} < \frac{1}{\|\ell_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}}.$$

D'après l'inégalité (2.1), il vient

$$\|\ell \circ \ell_0 - \mathrm{Id}\,\|_{\mathcal{L}(E)} < 1.$$

D'après le théorème précédent, $\ell \circ \ell_0$ est inversible, donc ℓ aussi. L'ensemble $U(E)$ est donc ouvert.

Démontrons la continuité sur la boule (ouverte) de centre Id et de rayon 1. On peut écrire, pour deux éléments ℓ_1 et ℓ_2 de la boule de centre Id et de rayon α strictement inférieur à 1, que

$$\ell_1^{-1} - \ell_2^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n ((\ell_1 - \mathrm{Id})^n - (\ell_2 - \mathrm{Id})^n).$$

En utilisant le fait que, si a et b sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, on a, grâce au fait que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre normée,

$$\begin{aligned} \|a^n - b^n\| &\leq \|a - b\| \times \left\| \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} b^m \right\| \\ &\leq \|a - b\| n (\|a\|^{n-1} + \|b\|^{n-1}). \end{aligned}$$

Ainsi donc, on a

$$\|(\ell_1 - \mathrm{Id})^n - (\ell - \mathrm{Id})^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|\ell_1 - \ell_2\|_{\mathcal{L}(E)} n (\|\ell_1 - \mathrm{Id}\,\|_{\mathcal{L}(E)}^{n-1} + \|\ell_2 - \mathrm{Id}\,\|_{\mathcal{L}(E)}^{n-1})$$

Comme nous avons supposé que ℓ_1 et ℓ_2 appartenaient à la boule de centre Id et de rayon α, on a

$$\|(\ell_1 - \mathrm{Id})^n - (\ell - \mathrm{Id})^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 2n\alpha^{n-1} \|\ell_1 - \ell_2\|_{\mathcal{L}(E)}$$

Comme α est supposé strictement inférieur à 1, on a

$$\|\ell_1^{-1} - \ell_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C\|\ell_1 - \ell_2\|_{\mathcal{L}(E)}.$$

Pour achever la démonstration du corollaire, il reste à observer que, si ℓ_0 appartient à $U(E)$ et que $\ell \in B(\ell_0, \|\ell_0^{-1}\|^{-1})$, alors $\ell^{-1} = (\ell_0^{-1} \circ \ell)^{-1} \circ \ell_0^{-1}$. Pour ce faire, écrivons que

$$\ell\ell_0^{-1} - \mathrm{Id} = \ell\ell_0^{-1} - \ell_0\ell_0^{-1} = (\ell - \ell_0)\ell_0^{-1}.$$

Comme on a supposé que $\ell \in B(\ell_0, \|\ell_0^{-1}\|^{-1})$, on a

$$\|\ell\ell_0^{-1} - \mathrm{Id}\,\| \leq \|\ell - \ell_0\|\|\ell_0^{-1}\| < 1.$$

Ainsi donc $\ell\ell_0^{-1}$ est inversible et

$$\ell\left(\ell_0^{-1}((\ell\ell_0^{-1})^{-1})\right) = (\ell\ell_0^{-1})(\ell\ell_0^{-1})^{-1} = \mathrm{Id}\,.$$

Le corollaire 2.3.1 est démontré.

Exercice 2.3.1 *Démontrer que l'application* Inv *est analytique sur* $U(E)$.

Exercice 2.3.2 *Soient E un espace de Banach et I un intervalle de* $\mathbf{R}$*, on désigne par $\mathcal{C}(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans E. On se donne une fonction continue A de I dans $\mathcal{L}(E)$ et l'on fixe un réel t_0 dans l'intervalle I. On définit alors, pour tout réel λ, l'espace F_λ des fonctions f de $\mathcal{C}(I, E)$ telles que*

$$\|f\|_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t\in I} e^{-\lambda\int_{[t_0,t]}\|A(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}d\tau}\|f(t)\|_E < \infty.$$

1) Démontrer que, muni de la norme définie ci-dessus, F_λ est un espace de Banach.

2) Démontrer qu'il existe un réel strictement positif λ_0 tel que, pour tout $\lambda > \lambda_0$, l'application définie par

$$\mathcal{A}\left\{\begin{array}{ccc} F_\lambda & \to & F_\lambda \\ f & \mapsto & t \mapsto f(t) + \displaystyle\int_{t_0}^t A(\tau)f(\tau)d\tau \end{array}\right.$$

appartient à $U(F_\lambda)$.

3) Soit $f_0 \in \mathcal{C}(I, E)$, posons $f = \mathcal{A}^{-1}f_0$. Calculez $\mathcal{A}'(t) - \mathcal{A}(t)f(t)$. Quel théorème connu a-t-on ainsi redémontré?

Définition 2.3.1 *Soient E un espace de Banach sur* $\mathbf{K}$ *et u un élément de $\mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de u et l'on note* $\mathrm{Sp}(u)$ *l'ensemble des éléments λ de* $\mathbf{K}$ *tels que $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ ne soit pas inversible.*

ATTENTION ! En dimension finie, il n'existe qu'une seule façon, pour une application linéaire, de ne pas être inversible. En effet, soit ℓ une application linéaire de E dans E, l'espace E étant supposé être de dimension finie. L'algèbre linéaire élémentaire dit que

$$\ell \text{ bijective} \Leftrightarrow \ell \text{ surjective} \Leftrightarrow \ell \text{ injective}.$$

L'application réciproque ℓ^{-1} est linéaire donc continue puisque nous sommes en dimension finie.

Il en va tout autrement en dimension infinie. Par exemple, soit $E = \ell^\infty(\mathbf{N})$ muni de la norme

$$\|(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_{\ell^\infty(\mathbf{N})} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|.$$

C'est un espace de Banach. Soit ℓ_1 l'application linéaire définie par

$$\ell_1 \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} & \mapsto & (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \,/\, y_n = x_{n+1}. \end{array} \right.$$

L'application ℓ_1 est surjective, mais pas injective. Considérons ℓ_2 définie par

$$\ell_2 \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} & \mapsto & (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \,/\, y_n = x_{n-1} \quad \text{si} \quad n \geq 1\,,\ 0 \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$

L'application ℓ_2 est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\ell_2 x\| = \|x\|$, mais elle n'est pas surjective.

Proposition 2.3.1 *Soient E un espace de Banach sur $\mathbf{K}$ et u un élément de $\mathcal{L}(E)$. Le spectre de u est un fermé inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $\|u\|_{\mathcal{L}(E)}$.*

Démonstration de la proposition 2.3.1 L'application L_u définie par

$$L_u \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \to & \mathcal{L}(E) \\ \lambda & \mapsto & u - \lambda\,\mathrm{Id} \end{array} \right.$$

est une application continue de $\mathbf{K}$ dans $\mathcal{L}(E)$. Or, par définition de $\mathrm{Sp}(u)$, le spectre est l'image réciproque par l'application continue L_u du fermé $\mathcal{L}(E) \setminus U(E)$; donc le spectre est fermé. De plus, si $\lambda > \|u\|_{\mathcal{L}(E)}$, écrivons

$$u - \lambda\,\mathrm{Id} = \lambda\left(\frac{1}{\lambda}u - \mathrm{Id}\right).$$

Ainsi donc, $\lambda^{-1}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \in B(\mathrm{Id}, 1)$, donc est inversible, et donc $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ aussi.

Théorème 2.3.2 *Soient E un espace de Banach sur $\mathbf{C}$ et u un élément de $\mathcal{L}(E)$. Le spectre de u est alors non vide.*

Démonstration du théorème 2.3.2 Supposons que le spectre de u soit vide. On considère alors l'appplication L_u^{-1} définie par

$$L_u^{-1} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathcal{L}(E) \\ \lambda & \mapsto & (u - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}. \end{array} \right.$$

D'après l'exercice 2.3.1, l'application L_u^{-1} est analytique de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{L}(E)$. De plus, on a

$$L_u^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}u - \mathrm{Id}\right)^{-1}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_u^{-1}(\lambda) = 0.$$

Donc l'application L_u^{-1} est une application bornée de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{L}(E)$. Elle est donc constante, ce qui est absurde. Il en résulte que le spectre de u n'est pas vide.

ATTENTION ! Le corps de base est très important dans les questions de spectre et ceci n'a rien à avoir avec la dimension infinie. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'une rotation de l'espace réel de dimension deux a un spectre vide en tant qu'application linéaire de l'espace réel à deux dimensions.

2.4 Opérateurs compacts

Définition 2.4.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Un élément u de $\mathcal{L}(E,F)$ est dit compact si et seulement si pour toute partie bornée A, $u(A)$ est d'adhérence compacte.*

Exercice 2.4.1 *Démontrez que si l'image de u est de dimension finie, alors u est compact.*

Il existe une caractérisation en termes de suites des opérateurs compacts. La voici.

Théorème 2.4.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Un élément u de $\mathcal{L}(E,F)$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E, la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ possède une valeur d'adhérence.*

Démonstration du théorème 2.4.1 Supposons que u soit compact et considérons une quelconque suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Si $M \overset{\text{déf}}{=} \sup_n \|x_n\|_E$, la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est incluse dans $u(B_E(0,M))$ dont l'adhérence est compacte. On peut donc extraire de la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite convergente.

Réciproquement, soient A une partie bornée de E et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de l'adhérence de $u(A)$. Il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $u(A)$ telle que

$$d(y_n,z_n) \leq \frac{1}{n}\cdot$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence, donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aussi.

Proposition 2.4.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Un élément u de $\mathcal{L}(E,F)$ est compact si et seulement si $u(B_E(0,1))$ est d'adhérence compacte.*

Démonstration de la proposition 2.4.1 Si A est une partie bornée de E, il existe un réel strictement positif λ tel que $\lambda(B_E(0,1)$ contienne A. Mais alors l'adhérence de $u(A)$ est incluse dans $\lambda\overline{u(B_E(0,1))}$ qui est compact; d'où la proposition.

Théorème 2.4.2 *Soient E, F et G trois espaces de Banach*

- *L'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ qui sont compacts est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.*
- *Soient $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,G)$; alors l'opérateur $u\circ v$ est compact dès que u ou v l'est.*

Démonstration du théorème 2.4.2 Soient u et v deux opérateurs compacts de E dans F et λ un scalaire. Considérons une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E. Comme u est compact, il existe une fonction d'extraction ϕ telle que $(u(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. De même, comme v est compact, il existe une fonction d'extraction ψ telle que $(v(x_{\phi\circ\psi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. La suite $((\lambda u+v)(x_{\phi\circ\psi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et donc l'opérateur $\lambda u+v$ est compact.

Démontrons maintenant que ce sous-espace vectoriel est fermé. Soient u un élément de l'adhérence des opérateurs compacts et A une partie borné de E. D'après le théorème 1.3.3, il suffit de démontrer que, pour tout réel strictement positif ε, on peut recouvrir $u(A)$ par un nombre fini de boules de rayon ε. Soit ε un réel strictement positif, il existe un opérateur compact v tel que

$$\|u-v\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{\varepsilon}{2M(A)} \quad \text{avec} \quad M(A) \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x\in A}\|x\|.$$

Comme v est compact, il existe une suite finie $(x_j)_{1\leq j\leq N}$ d'éléments de A tel que

$$v(A) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, \varepsilon/2).$$

Ainsi donc, pour tout x de A, il existe un indice j tel que

$$\begin{aligned} \|u(x) - v(x_j)\| &< \|u(x) - v(x)\| + \|v(x) - v(x_j)\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où le premier point du théorème.

Démontrons le second. Pour ce faire, supposons u compact et considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E. Comme v est continue, la suite $(v(x_n)_{n\in\mathbf{N}})$ est bornée et, comme u est supposée compacte, on peut trouver une fonction d'extraction ϕ telle que $((u\circ v)(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Donc $u\circ v$ est compact.

Supposons maintenant v compact et considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E. On peut trouver une fonction d'extraction ϕ telle que $(v(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite convergente. Comme u est continue, $((u\circ v)(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Donc $u\circ v$ est compact.

Exercice 2.4.2 *Soit (X,d) un espace métrique compact. On considère sur l'espace $C^\alpha(X,\mathbf{K})$ des fonctions hölderiennes d'indice $\alpha\in]0,1]$ de X dans $\mathbf{K}$, la norme*

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{\substack{(x,y)\in X^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

1) Démontrez que cette norme munit $C^\alpha(X,\mathbf{K})$ d'une structure d'espace de Banach.

2) Démontrez que, pour tout α, l'inclusion de $C^\alpha(X,\mathbf{K})$ dans l'espace de Banach des fonctions continues de X dans $\mathbf{K}$ est compacte.

2.5 Le théorème de Stone-Weierstrass

Il s'agit de donner un critère de densité pour les sous-algèbres de $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$. Donnons tout d'abord une définition.

Définition 2.5.1 *Soient (X,d) un espace métrique et A une partie de $\mathcal{C}(X,\mathbf{K})$. On dit que A sépare les points de X si et seulement si pour tout couple (x,y) d'éléments de X tel que $x\neq y$, il existe une fonction f de A telle que $f(x)\neq f(y)$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de densité suivant.

Théorème 2.5.1 (de Stone-Weierstrass) *Soient (X,d) une espace métrique compact et A une sous algèbre de l'espace $C(X,\mathbf{R})$. Si A contient les fonctions constantes et si A sépare les points de X, alors A est dense dans $C(X,\mathbf{R})$.*

Démonstration du théorème 2.5.1 L'une des étapes essentielles de la démonstration est le lemme suivant, que nous allons admettre pour le moment.

Lemme 2.5.1 *Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbf{R})$. Pour toute fonction f de $\overline{A}$, la fonction $|f|$ appartient à $\overline{A}$.*

Remarque Comme $\max\{f,g\} = \dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ et $\min\{f,g\} = \dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$, si deux fonctions f et g appartiennent à A, alors leur minimum et leur maximum appartiennent à $\overline{A}$.

Revenons à la démonstration du théorème 2.5.1. Le fait que A soit supposée séparante implique que

$$(S^+) \qquad \forall (x_1,x_2) \in X^2 \,/ x_1 \neq x_2\,,\ \forall (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbf{R}^2\,,\ \exists h \in A \,/\ h(x_j) = \alpha_j.$$

Comme A est séparante, il existe $g \in A$ telle que $g(x_1) \neq g(x_2)$. On pose alors

$$h(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{g(z)-g(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}\,.$$

Considérons une fonction f de $\mathcal{C}(X;\mathbf{R})$. Soit x_0 un point de X et ε un réel strictement positif. Nous allons démontrer

$$\exists h_{x_0} \in \overline{A} \,/\ \forall z \in X\,,\ h_{x_0}(z) \leq f(z) + \varepsilon. \tag{2.2}$$

En effet, d'après l'assertion (S^+), pour tout y de X, il existe une fonction $h_{x_0,y}$ de A telle que h coïncide avec f aux points x_0 et y. Les deux fonctions f et $h_{x_0,y}$ sont continues. Il existe donc un réel strictement positif $\alpha_{x_0,y}$ tel que

$$d(z,y) < \alpha_{x_0,y} \Longrightarrow h_{x_0,y}(z) < f(y) + \varepsilon.$$

L'espace (X,d) étant supposé compact, on peut le recouvrir avec un nombre fini de boules du type ci-dessus, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie $(y_j)_{1\leq j\leq N}$ telle que

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} B(y_j, \alpha_{x_0,y_j}).$$

Posons $h_{x_0} \stackrel{\text{déf}}{=} \min\limits_{1\leq j\leq N} h_{x_0,y_j}$. D'après le lemme 2.5.1, la fonction $h_{x_0} \in \overline{A}$ et est telle que, pour tout $z \in X$, on ait $h_{x_0}(z) < f(z) + \varepsilon$. L'assertion (2.2) est donc démontrée.

Pour tout $x \in X$, il existe donc une fonction $h_x \in \overline{A}$ telle que

$$h_x(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in X\,,\ h_x(y) < f(y) + \varepsilon.$$

Les fonctions h_x et f étant continues, pour tout $y \in X$, il existe un réel strictement positif α_x tel que

$$\forall z \in B(x,\alpha_x)\,,\ h_x(z) > f(z) - \varepsilon.$$

À nouveau, on recouvre X par un nombre fini de telles boules, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_j)_{1\leq j\leq N}$ de points de X telle que

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, \alpha_{x_j}).$$

Posons $h \stackrel{\text{déf}}{=} \max\limits_{1\leq j\leq N} h_{x_j}$. D'après le lemme 2.5.1, la fonction h appartient à $\overline{A}$. De plus; elle vérifie

$$\forall y \in X\,,\ f(y) - \varepsilon < h(y) < f(y) + \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\|f - h\|_{\mathcal{C}(X,\mathbf{R})} < \varepsilon$. Le théorème est donc démontré pourvu bien sûr que nous démontrions le lemme 2.5.1.

Démonstration du lemme 2.5.1 Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer A fermé car A est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$, alors $\overline{A}$ aussi. (Exercice: démontrez-le!) La démonstration repose alors sur le lemme suivant, que nous admettons provisoirement.

Lemme 2.5.2 *Il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \sqrt{\cdot} \quad \textit{dans l'espace } C([0,1];\mathbf{R}).$$

Soit f un élément de A et posons

$$f_n \stackrel{\text{déf}}{=} P_n\Big(\frac{f^2}{\|f\|}\Big) \quad \text{avec bien sûr} \quad \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de A puisque A est une algèbre. D'après lemme 2.5.2, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\|f\|^{-1}\sqrt{f^2} = \|f\|^{-1}|f|$. Donc $|f| \in \overline{A}$. Le théorème 2.5.1 est démontré pourvu que l'on prouve le lemme 2.5.2.

Démonstration du lemme 2.5.2 Définissons par récurrence la suite de polynômes

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t)) \quad \text{et} \quad P_0 = 0.$$

Montrons par récurrence que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \le P_n(t) \le \sqrt{t}$. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons-le pour P_n. Le polynôme P_{n+1} est positif sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions positives. De plus, on a, comme P_n est positif sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned} t - P_{n+1}^2(t) &= t - \Big(P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t))^2\Big)^2 \\ &\ge t - P_n^2(t) \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

Comme $P_{n+1}(t) - P_n(t) = 1/2(t - P_n^2(t))$, pour tout $t \in [0,1]$, on a $P_{n+1}(t) \ge P_n(t)$. Pour tout $t \in [0,1]$, la suite $(P_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante majorée par $\sqrt{t}$, donc elle converge. Soit $\ell(t)$ la limite. Par passage à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on trouve que $t - \ell^2(t) = 0$. Le fait que la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément est assuré par le théorème suivant.

Théorème 2.5.2 (de Dini) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ telle que, pour tout x de X, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite croissante majorée. Si $g(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est une fonction continue sur X, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers g uniformément, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| = 0.$$

Démonstration du théorème 2.5.2 Pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante majorée; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier n_x tel que

$$g(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_{n_x}(x).$$

Les deux fonctions g et f_{n_x} sont des fonctions continues sur le compact (X, d); elles sont donc uniformément continues sur (X, d). Ainsi, il existe un réel strictement positif α_x tel que

$$d(y, y') < \alpha_x \Longrightarrow |g(y) - g(y')| + |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(y')| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

La famille $(B(x,\alpha_x))_{x\in X}$ recouvre le compact (X,d). On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_j)_{1\leq j\leq N}$ telle que

$$X=\bigcup_{j=1}^{N} B(x_j,\alpha_{x_j}).$$

Posons $n_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \max\limits_{1\leq j\leq N} n_{x_j}$. La suite $(f_n(y))_{n\in\mathbf{N}}$ étant une suite croissante, on a alors, pour tout $j\in\{1,\cdots,N\}$,

$$\begin{aligned} f_{n_0}(y) &\geq f_{n_{x_j}}(y)\\ &\geq f_{n_{x_j}}(x_j)-|f_{n_{x_j}}(y)-f_{n_{x_j}}(x_j)|\\ &\geq g(x_j)-\frac{\varepsilon}{2}-|f_{n_{x_j}}(y)-f_{n_{x_j}}(x_j)|\\ &\geq g(y)-\frac{\varepsilon}{2}-|g(y)-g(x_j)|-|f_{n_{x_j}}(y)-f_{n_{x_j}}(x_j)|. \end{aligned}$$

Soit j tel que $y\in B(x_j,\alpha_{x_j})$. Il vient

$$f_{n_0}(y)\geq g(y)-\varepsilon.$$

La suite $(f_n(y))_{n\in\mathbf{N}}$ étant croissante, on a,

$$n\geq n_0 \Longrightarrow \forall y\in X\ ,\ g(y)\geq f_n(y)>g(y)-\varepsilon.$$

Le théorème est alors démontré.

Signalons le corollaire suivant, qui est le théorème original de Weierstrass.

Corollaire 2.5.1 *Soit f une fonction continue sur une partie compacte X de $\mathbf{R}^d$ à valeurs réelles. Pour tout ε strictement positif, il existe un polynôme à d indéterminées P et à coefficients réels tel que*

$$\sup_{x\in X}|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

Autrement dit, les polynômes à coefficients réels sont denses dans l'espace des fonctions réelles continues sur un compact.

Le cas des fonctions à valeurs complexes est légèrement différent.

Théorème 2.5.3 *Soient (X,d) une espace métrique compact et A une sous-algèbre de l'espace $C(X,\mathbf{C})$. Si A contient les fonctions constantes, si A sépare les points de X et si A est stable par conjugaison, i.e. $f\in A\Rightarrow \overline{f}\in A$, alors A est dense dans $C(X,\mathbf{C})$.*

On a un corollaire analogue.

Corollaire 2.5.2 *Soit f une fonction continue sur une partie compacte X de $\mathbf{R}^d$ à valeurs complexes. Pour tout ε strictement positif, il existe un polynôme P à coefficients complexes à d indéterminées tel que*

$$\sup_{x\in X}|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

On peut déduire immédiatement de ces deux corollaires l'énoncé suivant.

Corollaire 2.5.3 *Si X est un espace compact, l'espace de Banach $C(X,\mathbf{K})$ est séparable.*

Chapitre 3

Dualité dans les espaces de Banach

3.1 Présentation du concept de dualité

La notion de dualité est certainement bien connue du lecteur en dimension finie. Dans le cadre des espaces vectoriels, on peut la voir simplement comme la transposition des matrices de coordonnées, les matrices lignes devenant des matrices colonnes. L'espace des formes linéaires sur un espace de dimension d est un espace vectoriel de dimension d. Nous étudierons ici le concept en dimension infinie. Des phénomènes fondamentalement nouveaux apparaissent. Il existe des formes linéaires non continues. Nous nous empressons de les ignorer. Plus dépaysant, l'ensemble des formes linéaires continues sur un espace vectoriel normé E pourra apparaître comme très différent de l'espace E.

Définition 3.1.1 *On appelle dual algébrique d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *et l'on note* $E^\star$ *l'ensemble des formes linéaires définies sur* E*.*

On appelle dual topologique d'un $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$ *et l'on note* E' *l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur* E*. On le munit de la norme*

$$\|\ell\|_{E'} \stackrel{déf}{=} \sup_{\|x\|\leq 1} |\ell(x)|.$$

Remarquons que, comme le montre l'exemple de la forme linéaire δ_0' définie page 32, les deux espaces ci-dessus définis ne coïncident pas. De plus, d'après la proposition 2.2.1, E' est un espace de Banach.

L'étude et la description de cet espace E' donne parfois lieu à des problèmes redoutables. Toutefois, dans de nombreux cas, nous verrons qu'il est possible de représenter très concrètement le dual.

Il existe une application bilinéaire naturelle entre un espace et son dual.

Proposition 3.1.1 *Soit* E *un espace vectoriel normé. Alors l'application* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *définie par*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left\{ \begin{array}{ccc} E'\times E & \to & \mathbf{K} \\ (\ell,x) & \mapsto & \langle \ell, x\rangle \stackrel{déf}{=} \ell(x). \end{array} \right.$$

est une application bilinéaire continue.

Démonstration de la proposition 3.1.1 Par définition de la norme sur E', on a

$$|\ell(x)| \leq \|\ell\|_{E'}\|x\| \quad \text{et ainsi donc} \quad |\langle \ell, x\rangle| \leq \|\ell\|_{E'}\|x\|.$$

Le théorème 2.1.4 de caractérisation des applications multilinéaires continues assure alors le résultat.

Le théorème suivant, que nous admettrons, doit être compris comme affirmant l'existence de suffisamment de formes linéaires continues sur un espace de Banach.

Théorème 3.1.1 (de Hahn-Banach) *Soient E un espace de Banach, F un sous-espace vectoriel de E et ℓ une forme linéaire continue sur F, c'est-à-dire telle que*

$$\exists C \,/\, \forall x \in F\,,\ |\langle \ell, x\rangle| \leq C\|x\|.$$

Il existe alors un élément $\widetilde{\ell}$ de E' tel que $\widetilde{\ell}_{|F} = \ell$ et tel que $\|\widetilde{\ell}\|_{E'} = \|\ell\|_{F'}$.

On utilisera en particulier le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.1 *Soit x un élément non nul d'un espace de Banach E. Il existe une forme linéaire continue ℓ telle que l'on ait*

$$\langle \ell, x\rangle = \|x\|_E \quad et \quad \|\ell\|_{E'} = 1.$$

Définition 3.1.2 (du bidual) *Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual. On appelle bidual de E et l'on note E'' le dual de E'.*

Proposition 3.1.2 *Soit ι l'application de E dans E'' définie par*

$$\iota \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & E'' \\ x & \mapsto & \iota(x) :\ \iota(x)(\ell) = \langle \ell, x\rangle (= \ell(x)). \end{array} \right.$$

Cette application ι est telle que $\|\iota(x)\|_{E''} = \|x\|$. C'est donc une injection isométrique de E dans E''.

Démonstration de la proposition 3.1.2 Le fait que $\|\iota\|_{\mathcal{L}(E,E'')} \leq 1$ résulte simplement du fait que

$$|\iota(x)(\ell)| \leq \|\ell\|_{E'}\|x\|_E.$$

Pour démontrer l'égalité, nous allons utiliser le corollaire 3.1.1 du théorème d'Hahn-Banach qui affirme que, pour tout élément x de E, il existe une forme linéaire ℓ telle que

$$\langle \ell, x\rangle = \|x\|_E \quad \text{et} \quad \|\ell\|_{E'} = 1,$$

ce qui siginifie que $\iota(x)(\ell) = \|x\|_E$; d'ou la proposition.

Définition 3.1.3 *On dit qu'un espace vectoriel normé est réflexif si et seulement si l'application ι vérifie $\iota(E) = E''$.*

Proposition 3.1.3 *Si E est un espace vectoriel normé réflexif, alors c'est un espace de Banach.*

Démonstration de la proposition 3.1.3 D'après la proposition ci-dessus, un espace réflexif est isométrique à son bidual qui, d'après la Proposition 2.2.1, est un espace de Banach, puisque c'est le dual de l'espace normé E'. D'où la proposition.

3.2 Identification d'un espace normé avec un dual

Cette section est très importante pour la suite du cours, notamment pour la théorie des distributions. Il nous arrivera fréquemment de dire que tel espace "est le dual" de tel autre. Il s'agit de comprendre précisément ce que cela veut dire.

Proposition 3.2.1 *Soient E et F deux espaces de Banach et B une forme bilinéaire continue sur $F \times E$. L'application δ_B définie par*

$$\delta_B \left\{ \begin{array}{lcl} F & \to & E' \\ y & \mapsto & \delta_B(y) : \ \langle \delta_B(y), x \rangle = B(y,x) \end{array} \right. \tag{3.1}$$

est un élément de $\mathcal{L}(F, E')$.

Démonstration de la proposition 3.2.1 Comme la forme bilinéaire B est continue, on peut écrire

$$|\langle \delta_B(y), x \rangle| \leq C \|y\|_F \|x\|_E.$$

Par définition de la norme sur E', on a

$$\|\delta_B(y)\|_{E'} \leq C \|y\|_F \ ;$$

d'où la proposition.

Définition 3.2.1 *Soient E et F deux espaces de Banach et B une forme bilinéaire continue sur $F \times E$. On dit que B identifie E' à F si et seulement si l'application δ_B définie par (3.1) est un isomorphisme de F sur E'.*

Dit autrement, cela signifie qu'il existe une constante C telle que, pour toute forme linéaire ℓ sur E, il existe un élément y de F tel que,

$$\forall x \in E \, , \ \langle \ell, x \rangle = B(x,y) \quad \text{et} \quad C^{-1} \|y\|_F \leq \|\ell\|_{E'} \leq C \|y\|_F.$$

Remarques D'après le théorème 2.2.5 de Banach, il suffit de démontrer que l'application δ_B est bijective.

Si E est réflexif, alors l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ identifie E à E''.

Théorème 3.2.1 *Soient $p \in [1, +\infty[$, $E = \ell^p(\mathbf{N})$ et $F = \ell^{p'}(\mathbf{N})$ avec $p' = p/(p-1)$. On considère la forme bilinéaire B suivante*

$$B \left\{ \begin{array}{lcl} F \times E & \to & \mathbf{K} \\ (y,x) & \mapsto & B(y,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n y_n. \end{array} \right.$$

La forme bilinéaire B identifie $(\ell^p(\mathbf{N}))'$ à $\ell^{p'}(\mathbf{N})$.

Démonstration du théorème 3.2.1 L'inégalité de Hölder dit que

$$|B(y,x)| \leq \|x\|_{\ell^p(\mathbf{N})} \|y\|_{\ell^{p'}(\mathbf{N})}. \tag{3.2}$$

Donc la forme bilinéaire B est continue. Démontrons que l'application δ_B est bijective. Soit φ une forme linéaire sur $\ell^p(\mathbf{N})$, cherchons une suite y de $\ell^{p'}(\mathbf{N})$ telle que

$$\forall x \in \ell^p(\mathbf{N}) \, , \ \varphi(x) = B(y,x). \tag{3.3}$$

Si l'identité ci-dessus est vérifiée, elle doit l'être en particulier pour $x = e_n$ où e_n désigne la suite dont tous les termes sont nuls, à l'exception du $n$ième qui vaut 1. Donc, nécessairement la suite y est définie par

$$y_n = \langle \varphi, e_n \rangle. \tag{3.4}$$

L'application δ_B est donc injective. Il s'agit maintenant de démontrer que la suite y définie par (3.4) est bien un élément de $\ell^{p'}(\mathbf{N})$.

Supposons tout d'abord que p vaille 1. Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} |y_n| &\leq \|\varphi\|_{(\ell^1(\mathbf{N}))'} \|e_n\|_{\ell^1(\mathbf{N})} \\ &\leq \|\varphi\|_{(\ell^1(\mathbf{N}))'}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient bien à $\ell^\infty(\mathbf{N})$ et l'on a bien $\|(y_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_{\ell^\infty(\mathbf{N})} \leq \|\varphi\|_{(\ell^1(\mathbf{N}))'}$.

Supposons maintenant p strictement supérieur à 1. Considérons alors la suite $(x_r)_{r\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\ell^p(\mathbf{N})$ définie par

$$x_r \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\leq r} \frac{\overline{y}_n}{|y_n|} |y_n|^{\frac{1}{p-1}} e_n.$$

Ceci implique que

$$x_{r,n} = \frac{\overline{y}_n}{|y_n|} |y_n|^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{si} \quad n \leq r \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sinon.}$$

On a alors

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_{r,n}|^p = \sum_{n\leq r} |y_n|^{p'}.$$

$$\begin{aligned} B(y, x_r) &= \sum_{n=0}^{r} \frac{\overline{y}_n}{|y_n|} |y_n|^{\frac{1}{p-1}} B(e_n, y) \\ &= \sum_{n=0}^{r} |y_n|^{\frac{1}{p-1}+1} \\ &= \sum_{n=0}^{r} |y_n|^{p'}. \end{aligned}$$

De plus, on sait que

$$B(y, x_r) = \sum_{n=0}^{r} \frac{\overline{y}_n}{|y_n|} |y_n|^{\frac{1}{p-1}} \varphi(e_n) = \varphi(x_r).$$

La forme linéaire φ est continue; on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq r} |y_n|^{p'} &\leq \|\varphi\|_{(\ell^p(\mathbf{N}))'} \|x_r\|_{\ell^p(\mathbf{N})} \\ &\leq \|\varphi\|_{(\ell^p(\mathbf{N}))'} \left(\sum_{n\leq r} |y_n|^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'où il vient que

$$\left(\sum_{n\leq r} |y_n|^{p'} \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p(\mathbf{N}))'}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout entier r, la suite y appartient bien à $\ell^{p'}(\mathbf{N})$ et l'on a

$$\|y\|_{\ell^{p'}(\mathbf{N})} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p(\mathbf{N}))'}. \tag{3.5}$$

De plus, pour toute combinaison linéaire (nécessairement) finie x d'éléments de $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on a $\delta_B(y)(x) = \langle \varphi, x\rangle$. Mais on a supposé que p était réel. Donc l'ensemble des suites x nulles à partir d'un certain rang est dense dans $\ell^p(\mathbf{N})$; donc $\varphi = \delta_B(y)$. Enfin, d'après l'inégalité (3.5), l'application δ_B est une surjection de $\ell^{p'}(\mathbf{N})$ sur $(\ell^p(\mathbf{N}))'$.

Exercice 3.2.1 *Soit $c_0(\mathbf{N})$ l'espace de Banach définie par*

$$c_0(\mathbf{N}) \stackrel{déf}{=} \{x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \,/\, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\} \quad \textit{muni de la norme} \quad \|x\|_{\ell^\infty(\mathbf{N})} \stackrel{déf}{=} \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|.$$

Démontrez que $c_0(\mathbf{N})$ est un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbf{N})$. Puis en reprenant la démonstration du théorème ci-dessus, démontrez que la forme bilinéaire B identifie $c_0(\mathbf{N})'$ à l'espace $\ell^1(\mathbf{N})$.

Remarque Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons remarqué qu'en dimension finie, le dual d'un espace vectoriel E était un espace vectoriel de même dimension, donc un espace isomorphe.

Rien de tel en dimension infinie. Le théorème précédent nous dit que le dual de $\ell^1(\mathbf{N})$ est un espace isométrique à $\ell^\infty(\mathbf{N})$. Donc l'espace $(\ell^1(\mathbf{N}))'$ a les mêmes propriétés topologiques que l'espace $\ell^\infty(\mathbf{N})$. Mais l'espace $\ell^\infty(\mathbf{N})$ n'est pas séparable. Or, on sait d'après un exercice que l'espace $\ell^1(\mathbf{N})$ l'est. En effet, l'espace vectoriel des suites nulles sauf un nombre fini de termes est dense dans $\ell^1(\mathbf{N})$, en fait dans tous les espaces $\ell^p(\mathbf{N})$ pour tout $p \in [1, \infty[$. (exercice: vérifiez-le!)

Exercice 3.2.2 *Soit s un réel quelconque, on définit l'espace $\ell^{2,s}(\mathbf{N})$ par*

$$\ell^{2,s}(\mathbf{N}) \stackrel{déf}{=} \{u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \,/\, ((1+n^2)^{\frac{s}{2}} u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})\}.$$

et on le munit de la norme

$$\|u\|_{\ell^{2,s}(\mathbf{N})} \stackrel{déf}{=} \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} (1+n^2)^s |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soient B_1 et B_2 les deux formes bilinéaires définies ci-après par

$$B_1 \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^{2,s}(\mathbf{N}) \times \ell^{2,s}(\mathbf{N}) & \to & \mathbf{K} \\ (y,x) & \mapsto & B_1(y,x) \stackrel{déf}{=} \sum_{n\in\mathbf{N}} (1+n^2)^s x_n y_n. \end{array} \right.$$

$$B_2 \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^{2,-s}(\mathbf{N}) \times \ell^{2,s}(\mathbf{N}) & \to & \mathbf{K} \\ (y,x) & \mapsto & B_2(y,x) \stackrel{déf}{=} \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n y_n. \end{array} \right.$$

1) Démontrez que B_1 identifie $(\ell^{2,s}(\mathbf{N}))'$ à $\ell^{2,s}(\mathbf{N})$ et que B_2 identifie $(\ell^{2,s}(\mathbf{N}))'$ à $\ell^{2,-s}(\mathbf{N})$.

2) Exhibez une isométrie linéaire surjective de $\ell^{2,s}(\mathbf{N})$ dans $\ell^{2,-s}(\mathbf{N})$.

Nous admettons momentamément le théorème suivant, qui sera démontré en détail au chapitre 5.

Théorème 3.2.2 *Soient p un réel supérieur à 1 et B la forme bilinéaire définie par*

$$B \left\{ \begin{array}{ccc} L^{p'} \times L^p & \to & \mathbf{K} \\ (g,f) & \mapsto & \int_\Omega f(x) g(x) d\mu(x). \end{array} \right.$$

Alors la forme bilinéaire B identifie le dual de $L^p(\Omega, d\mu)$ à $L^{p'}(\Omega, d\mu)$.

3.3 Une définition affaiblie de la convergence dans E'

Définition 3.3.1 *Soit E un espace vectoriel normé. On considère une suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E' et ℓ un élément de E'. On dit que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge $\star$-faiblement vers ℓ et l'on note $\operatorname*{limf}_{n\to\infty}{}^{\star}\,\ell_n = \ell$ si et seulement si*

$$\forall x \in E\,,\ \lim_{n\to\infty}\langle \ell_n, x\rangle = \langle \ell, x\rangle.$$

Nous allons maintenant étudier quelques propriétés de la convergence $\star$-faible.

Théorème 3.3.1 *Soient E un espace de Banach et $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E'. Supposons que, pour tout x de E, la limite de la suite $(\langle \ell_n, x\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ existe; désignons-la par $\langle \ell, x\rangle$.*

Alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de E', ce qui implique en particulier que ℓ appartient à E'. De plus, on a

$$\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,\mathbf{K})} \le \liminf_{n\to\infty} \|\ell_n\|_{\mathcal{L}(E,\mathbf{K})}.$$

Démonstration du théorème 3.3.1 Ce n'est qu'une traduction dans le cadre des formes linéaires du théorème 2.2.4 de Banach-Steinhaus.

Proposition 3.3.1 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de E et de E', E étant un espace de Banach.*

$$\operatorname*{limf}_{n\to\infty}{}^{\star}\,\ell_n = \ell \quad et \quad \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\langle \ell_n, x_n\rangle = \langle \ell, x\rangle.$$

Démonstration de la proposition 3.3.1 Commençons par écrire que

$$\langle \ell_n, x_n\rangle = \langle \ell_n, x_n - x\rangle + \langle \ell_n - \ell, x\rangle + \langle \ell, x\rangle.$$

D'après le théorème 3.3.1 de Banach-Steinhaus, la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Donc, il existe un réel M tel que l'on ait

$$|\langle \ell_n, x_n\rangle - \langle \ell, x\rangle| \le M\|x_n - x\| + |\langle \ell_n - \ell, x\rangle|.$$

Soit ε un réel strictement positif arbitraire. Il existe un entier n_0 tel que

$$n \ge n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2M+1}.$$

Le point x étant fixe, il existe un entier n_1 tel que l'on ait

$$n \ge n_1 \Rightarrow |\langle \ell_n - \ell, x\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, on a

$$n \ge \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow |\langle \ell_n, x_n\rangle - \langle \ell, x\rangle| < \varepsilon.$$

D'où la proposition.

ATTENTION ! Il est absolument nécessaire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en norme vers x.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 3.3.2 (de compacité $\star$-faible) *Soit E un espace séparable, on considère une suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée dans E'. Il existe un élément ℓ de E' et une fonction strictement croissante ψ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que l'on ait*

$$\liminf_{n\to\infty}{}^{\star}\, \ell_{\psi(n)} = \ell.$$

Démonstration du théorème 3.3.2 Soit $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite dense dans E. Nous allons utiliser le procédé diagonal déjà vu lors de la démonstration du théorème d'Ascoli. La suite $(\langle \ell_n, x_0\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathbf{K}$ donc il existe un élément λ_0 de $\mathbf{K}$ et une fonction d'extraction ϕ_0 de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \langle \ell_{\phi_0(n)}, x_0\rangle = \lambda_0.$$

Supposons construites une suite finie $(\phi_j)_{0\le j\le m}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et une suite finie $(\lambda_j)_{1\le j\le m}$ de scalaires telles que, pour tout $j \le m$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \langle \ell_{\phi_0\circ\cdots\circ\phi_j(n)}, x_j\rangle = \lambda_j.$$

La suite $(\langle \ell_{\phi_0\circ\cdots\circ\phi_m(n)}, x_{m+1}\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathbf{K}$. Il existe donc une fonction strictement croissante ϕ_{m+1} de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et un élément λ_{m+1} de $\mathbf{K}$ tels que

$$\forall j \le m+1\,,\ \lim_{n\to\infty} \langle \ell_{\phi_0\circ\cdots\circ\phi_{m+1}(n)}, x_j\rangle = \lambda_j.$$

Posons $\psi(n) = \phi_0\circ\cdots\circ\phi_n(n)$. Comme nous l'avons déja vu page 24 lors de la démonstration du théorème d'Ascoli, l'application ψ est strictement croissante. Considérons l'application $\widetilde{\ell}$ définie de $\{x_p,\ p\in\mathbf{N}\}$ dans $\mathbf{K}$ par

$$\widetilde{\ell}(x_p) = \lambda_p.$$

Il est clair que

$$|\widetilde{\ell}(x_p) - \widetilde{\ell}(x_q)| \le M\|x_p - x_q\| \quad \text{avec} \quad M \overset{\text{déf}}{=} \sup_{n\in\mathbf{N}} \|\ell_n\|.$$

D'après le théorème 1.2.3 de prolongement des fonctions continues, il existe une application ℓ de E dans $\mathbf{K}$ telle que $\ell_{|(x_p)} = \widetilde{\ell}$. De plus, on a, pour tout x de E,

$$|\langle \ell - \ell_{\psi(n)}, x\rangle| \le |\langle \ell, x - x_p\rangle| + |\lambda_p - \langle \ell_{\psi(n)}, x_p\rangle| + M\|x_p - x\|.$$

Soit ε un réel strictement positif arbitraire. L'application ℓ étant lipschitzienne, il existe un réel strictement positif α tel que

$$\|x - x_p\| < \alpha \Rightarrow |\langle \ell, x - x_p\rangle| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

La suite $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ étant supposée dense, il existe un entier p tel que

$$\|x_p - x\| \le \min\left\{\alpha, \frac{\varepsilon}{3M+1}\right\}.$$

De plus, par construction de la fonction ψ, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle \ell_{\psi(n)}, x_p\rangle = \langle \ell, x_p\rangle.$$

Donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\langle \ell_{\psi(n)}, x_p \rangle - \langle \ell, x_p \rangle| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\langle \ell - \ell_{\psi(n)}, x \rangle| < \varepsilon.$$

Finalement, nous avons démontré que

$$\forall x \in E\,,\ \lim_{n\to\infty} \langle \ell_{\psi(n)}, x \rangle = \langle \ell, x \rangle.$$

Il en résulte que ℓ est linéaire et le théorème est démontré.

3.4 La notion d'application linéaire transposée

Cette notion est basée sur la proposition suivante.

Proposition 3.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un élément de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$. L'application ${}^tA$ définie par*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} F' & \to & E' \\ \ell & \mapsto & {}^tA(\ell) : x \mapsto \langle \ell, Ax \rangle \end{array} \right.$$

est une application linéaire continue.

Définition 3.4.1 *L'application linéaire définie ci-dessus s'appelle l'application linéaire transposée.*

Démonstration de la proposition 3.4.1 On écrit

$$\begin{array}{rcl} |\langle \ell, Ax \rangle| & \leq & \|\ell\|_{F'} \|Ax\|_E \\ & \leq & \|\ell\|_{F'} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E. \end{array}$$

Ainsi donc, on a

$$\begin{array}{rcl} \|{}^tA(\ell)\|_{E'} & = & \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} |\langle \ell, Ax \rangle| \\ & \leq & \|\ell\|_{F'} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}. \end{array}$$

D'où la proposition.

Proposition 3.4.2 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés et (A,B) un élément de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$. On a*

$${}^t(B \circ A) = {}^tA \circ {}^tB$$

De plus, si $E = F$ alors on a

$$A \in U(E) \Longleftrightarrow {}^tA \in U(E') \quad et \quad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Démonstration de la proposition 3.4.2 La première relation est purement algébrique. En effet, pour toute forme linéaire ℓ sur G et pour tout x de E, on a

$$\begin{aligned}\langle {}^tA \circ {}^tB(\ell), x\rangle &= \langle {}^tB(\ell), Ax\rangle \\ &= \langle \ell, B \circ Ax\rangle \\ &= \langle {}^t(B \circ A)(\ell), x\rangle.\end{aligned}$$

Enfin, si $A \in U(E)$, on a $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = \mathrm{Id}_E$. En appliquant l'opération de transposition à cette égalité, on trouve que

$${}^tA \circ {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}) \circ {}^tA = \mathrm{Id}_{E'}\,.$$

Donc ${}^tA$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(E')$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. La proposition est ainsi démontrée.

Le théorème suivant, bien que de démonstration très simple, sera extrêmement important dans la suite.

Théorème 3.4.1 *Soient E et F des espaces vectoriels normés, on considère un élément A de $\mathcal{L}(E,F)$, une suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de F' et un élément ℓ de F'. On a*

$$\operatorname*{limf\star}_{n\to\infty} \ell_n = \ell \quad \textit{dans} \quad F' \Longrightarrow \operatorname*{limf\star}_{n\to\infty} {}^tA\ell_n = {}^tA\ell \quad \textit{dans} \quad E'.$$

Démonstration du théorème 3.4.1 En effet, on a, pour tout x appartenant à E,

$$\langle {}^tA\ell_n, x\rangle = \langle \ell_n, Ax\rangle.$$

Par hypothèse, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle \ell_n, Ax\rangle = \langle \ell, Ax\rangle.$$

Mais, par définition de la transposée, $\langle \ell, Ax\rangle = \langle {}^tA\ell, x\rangle$. Ainsi donc

$$\lim_{n\to\infty} \langle {}^tA\ell_n, x\rangle = \langle {}^tA\ell, x\rangle.$$

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

4.1 Le concept d'orthogonalité

Dans toute la suite, nous conviendrons que si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\overline{\lambda} = \lambda$ et si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, c'est l'opérateur de conjugaison usuelle. Rappelons tout d'abord la définition d'un produit scalaire.

Définition 4.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$. On appelle application antilinéaire de E dans F toute application ℓ telle que, pour tout couple (x, y) de $E \times E$, et tout scalaire λ de $\mathbf{K}$, on ait*

$$\ell(\lambda x + y) = \overline{\lambda}\ell(x) + \ell(y).$$

Une application f de $E \times E$ dans $\mathbf{K}$ est dite sesquilinéaire[1] *si elle est linéaire par rapport à la première variable et antilinéaire par rapport à la seconde. Autrement dit*

$$\begin{array}{lll} \forall \lambda \in \mathbf{K}\,,\ \forall (x,y,z) \in E^3 & f(\lambda x + y, z) & = \lambda f(x,y) + f(y,z) \\ & f(z, \lambda x + y) & = \overline{\lambda} f(z,x) + f(z,y). \end{array}$$

Une application f de $E \times E$ dans $\mathbf{K}$ est appelée produit scalaire si et seulement si elle est sesquilinéaire et hermitienne définie positive, c'est-à-dire vérifie

$$\begin{array}{c} \forall (x,y) \in E^2\,,\ f(y,x) = \overline{f(x,y)} \quad \textit{(hermitienne)} \\ \forall x \in E\,,\ f(x,x) \in \mathbf{R}^+, \quad \textit{(positive)} \\ f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \textit{(définie).} \end{array}$$

Remarque On note très souvent $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire et $\|\cdot\|^2 = (\cdot|\cdot)$.

Proposition 4.1.1 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E. L'application $x \mapsto (x|x)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E et l'on a*

$$\forall (x,y) \in E^2\,,\ |(x|y)| \leq \|x\|\|y\| \qquad \textit{(Inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

$$\forall (x,y) \in E^2\,,\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \qquad \textit{(Relation de la médiane).}$$

[1] du latin "sesqui" qui signifie un demi en plus

Démonstration de la proposition 4.1.1 On observe que

$$0 \leq \left\| \overline{(x|y)} \frac{x}{\|x\|} - \|x\| y \right\|^2 .$$

En développant le second membre, on obtient

$$0 \quad \leq \quad |\overline{(x|y)}|^2 - 2\,\Re e\Big(\overline{(x|y)}(x|y)\Big) + \|x\|^2\|y\|^2.$$

Pour démontrer que $x \mapsto (x|x)^{\frac{1}{2}}$ est une norme, il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} (x+y|x+y) &\leq (x|x) + 2\,\Re e(x|y) + (y|y) \\ &\leq (x|x) + 2(x|x)^{\frac{1}{2}}(y|y)^{\frac{1}{2}} + (y|y) \\ &\leq \Big((x|x)^{\frac{1}{2}} + (y|y)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 \quad \text{et que} \\ (\lambda x|\lambda x) &\leq \lambda\overline{\lambda}\|x\|^2. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'identité de la médiane, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}\|x+y\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + 2\,\Re e(x|y) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\Re e(x|y) + \|y\|^2) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned}$$

D'où la proposition.

Exercice 4.1.1 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$. Supposons que*

$$\forall (x,y) \in E^2\,,\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 .$$

Démontrez qu'il existe une forme sesquilinéaire telle que l'on ait $\|x\|^2 = (x|x)$. Il est conseillé de distinguer le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, plus facile, de celui où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Le produit scalaire permet de définir la notion d'orthogonalité. Ce concept, familier dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions, se révèlera extrêmement fécond dans les espaces de dimension infinie, notamment dans les espaces de fonctions.

Définition 4.1.2 *Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et x et y deux éléments de E. On dit que x et y sont orthogonaux (et l'on note $x \perp y$) si et seulement si $(x|y) = 0$.*

Rappelons pour mémoire la fameuse relation de Pythagore:

$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Proposition 4.1.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ muni d'un produit scalaire et A une partie de E. Soit*

$$A^\perp \stackrel{déf}{=} \{x \in E/\ \forall a \in A\,,\ x \perp a\}.$$

La partie $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Démonstration de la proposition 4.1.2 L'application linéaire $\mathcal{L}_a$ définie par $x \mapsto (x|a)$ est une application linéaire continue de E dans $\mathbf{K}$. Donc le noyau de $\mathcal{L}_a$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. Il est clair que

$$A^\perp = \bigcap_{a \in A} \ker \mathcal{L}_a.$$

Donc $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels fermés, d'où la proposition.

Exercice 4.1.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ muni d'un produit scalaire hermitien et A une partie de E. Démontrez que $\overline{A}^\perp = A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.*

Définition 4.1.3 *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. On dit que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert si et seulement si l'espace $\mathcal{H}$ muni de la norme associée au produit scalaire est un espace complet.*

Cette structure d'espace de Hilbert est tout à fait fondamentale. On y retrouvera beaucoup de méthodes et de concepts simples de géométrie que l'on utilise dans les espaces de dimension finie.

4.2 Les propriétés des espaces de Hilbert

La relation de Pythagore reçoit la généralisation suivante.

Théorème 4.2.1 *Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. La série $\sum_n x_n$ converge si et seulement si la série $\sum_n \|x_n\|^2$ converge et l'on a alors*

$$\left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n \right\|^2 = \sum_{n \in \mathbf{N}} \|x_n\|^2$$

Démonstration du théorème 4.2.1 Posons $S_q = \sum_{p \leq q} x_p$. La relation de Pythagore dit que

$$\sum_{p \leq q} \|x_p\|^2 = \|S_q\|^2. \tag{4.1}$$

Le membre de droite de l'inégalité ci-dessus converge donc est majoré indépendemment de q. Donc la série $\sum_n \|x_n\|^2$ converge. Réciproquement, si la série $\sum_n \|x_n\|^2$ converge, alors on a

$$\begin{aligned} \|S_{q+q'} - S_q\|^2 &= \sum_{q+1}^{q+q'} \|x_p\|^2 \\ &\leq \sum_{q+1}^{\infty} \|x_p\|^2. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'inégalité (4.1) ci-dessus, on achève la démonstration du théorème.

Exercice 4.2.1 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ telle que*

$$\sum_0^\infty \|x_n\|^2 < \infty.$$

On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que, si $|n-m| \geq N_0$, alors x_n et x_m sont orthogonaux. Démontrez qu'alors la série $\sum_n x_n$ est convergente et qu'il existe une constante C, ne dépendant que de N_0 telle que l'on ait

$$\left\| \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n \right\|^2 \leq C \sum_{n\in\mathbf{N}} \|x_n\|^2.$$

Beaucoup des propriétés remarquables des espaces de Hilbert repose sur le théorème de projection sur les convexes.

Théorème 4.2.2 (de projection sur un convexe fermé) *Soit Γ une partie convexe fermée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Pour tout point x de $\mathcal{H}$, il existe un unique point de Γ, noté $p_\Gamma(x)$ et appelé projection de x sur Γ, tel que*

$$\|x - p_\Gamma(x)\| = \inf_{g\in\Gamma} \|x-g\|.$$

Démonstration du théorème 4.2.2 Démontrons tout d'abord l'unicité. Supposons qu'il existe deux points γ_1 et γ_2 de Γ réalisant le minimum. D'après la relation de la médiane, on a

$$\frac{1}{2}\|\gamma_1-\gamma_2\|^2 = \|x-\gamma_1\|^2 + \|x-\gamma_2\|^2 - 2\left\|x - \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right\|^2.$$

Or, Γ est convexe, donc $(\gamma_1+\gamma_2)/2$ appartient à Γ. Par définition de γ_1 et de γ_2, on en déduit que $\|\gamma_1-\gamma_2\| \leq 0$, donc que $\gamma_1 = \gamma_2$, ce qui assure l'unicité.

Démontrons maintenant l'existence. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de Γ telle

$$\lim_{n\to\infty} \|x-\gamma_n\| = d \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\gamma\in\Gamma} \|x-\gamma\|.$$

On utilise à nouveau la relation de la médiane pour dire que, pour tout couple d'entiers (n,m), on a

$$\|\gamma_n-\gamma_m\|^2 = 2\|x-\gamma_n\|^2 + 2\|x-\gamma_m\|^2 - 4\left\|x-\frac{\gamma_n+\gamma_m}{2}\right\|^2.$$

La partie Γ étant convexe, le milieu de γ_n et de γ_m appartient aussi à Γ. Ainsi, l'on a

$$\|\gamma_n-\gamma_m\|^2 \leq 2\|x-\gamma_n\|^2 + 2\|x-\gamma_m\|^2 - 4d^2.$$

Vu la définition de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ceci implique que cette suite est de Cauchy. L'espace $\mathcal{H}$ étant de Hilbert, il est complet. Comme la partie Γ est fermée, elle est complète et donc la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans Γ, ce qui conclut la démonstration de ce théorème.

Exercice 4.2.2 *Soient Γ une partie convexe fermée et x un point d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Démontrez que $p_\Gamma(x)$ est l'unique point de Γ tel que, pour tout point γ de Γ, on ait*

$$\Re e(x-\gamma | p_\Gamma(x)-\gamma) \geq 0.$$

Exercice 4.2.3 *Soit Γ une partie convexe fermée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Démontrez que l'application p_Γ est lipschitzienne de rapport* 1.

Presque toutes les propriétés des espaces de Hilbert peuvent être vues comme des corollaires du théorème 4.2.2 ci-dessus.

Corollaire 4.2.1 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On a alors*

$$\mathcal{H} = F \oplus F^\perp \quad et \quad x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x).$$

Démonstration du corollaire 4.2.1 Considérons un élément x quelconque de $\mathcal{H}$. Pour tout point f de F, et pour tout réel λ, on a

$$\|x - p_F(x) + \lambda f\|^2 = \lambda^2 \|f\|^2 + 2\lambda\, \Re e(x - p_F(x)|f) + \|x - p_F(x)\|^2.$$

Par définition de la projection, il faut que

$$\|x - p_F(x) + \lambda f\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2.$$

Ceci impose donc que, pour tout f appartenant à F, on ait

$$\Re e(x - p_F(x)|f) = 0.$$

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, il n'y a rien de plus à dire. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, il suffit de changer f en if pour obtenir que

$$x - p_F(x) \in F^\perp.$$

Nous venons donc de démontrer que $\mathcal{H} = F + F^\perp$. Mais, si $x \in F \cap F^\perp$, alors $(x|x) = 0$ et donc $x = 0$. Le corollaire est ainsi démontré.

Corollaire 4.2.2 *Soit A une partie quelconque d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Cette partie A est totale si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.*

Démontration du corollaire 4.2.2 Utilisons l'exercice 4.1.2 qui dit que $A^\perp = (\overline{\mathrm{Vect}(A)})^\perp$. Si $A^\perp = \{0\}$, cela signifie, d'après le corollaire 4.2.1, que $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$ est égal à $\mathcal{H}$, ce qui signifie exactement que la partie A est totale.

Réciproquement, si la partie A est totale, alors $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$ est égal à $\mathcal{H}$, d'où $A^\perp = \{0\}$.

Exercice 4.2.4 *Soit A une partie quelconque d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Démontrez que*

$$(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Vect}}(A).$$

Définition 4.2.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On appelle base hilbertienne ou base orthonormale de $\mathcal{H}$ toute suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ qui est totale et telle que*

$$(e_n|e_m) = \delta_{n,m} \quad avec \quad \delta_{n,m} = 1 \quad si \quad n = m \quad et \quad 0 \quad sinon. \tag{4.2}$$

Remarque Une base hilbertienne n'est pas une base algébrique.

Exercice 4.2.5 *On considère l'espace $\ell^2(\mathbf{N})$ la suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\ell_2(\mathbf{N})$ définie par*

$$e_n(k) = \delta_{n,k}.$$

Démontrer que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbf{N})$. Quel est l'espace vectoriel engendré par les e_n ?

Théorème 4.2.3 *Dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, il existe des bases hilbertiennes.*

Démontration du théorème 4.2.3 Considérons une partie dénombrable totale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la famille $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre (au sens de l'algèbre linéaire). En effet, on définit la fonction d'extraction suivante par $\phi(0) = \min$

$$\phi(0) = \min\{n \,/\, a_n \neq 0\} \quad \text{et} \quad \varphi(n) = \min\left\{m \geq \phi(n)+1 \,/\, a_m \notin \langle a_1, a_{\phi(n)}\rangle\right\}.$$

C'est un exercice laissé au lecteur que de vérifier que l'espace vectoriel engendré par $a_{\phi(n)}$ est égal à celui engendré par les a_n. Nous allons maintenant utiliser le procécé d'orthogonalisation de Schmidt. Rappelons ce procédé. On pose

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}.$$

Supposons définis les termes $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ vérifiant la relation (4.2) et telle que

$$\mathrm{Vect}\{a_1, \cdots, a_n\} = \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_n\}.$$

Posons

$$e_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{\|f_{n+1}\|} \quad \text{avec} \quad f_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (a_{n+1}|e_j)e_j.$$

La vérification des relations (4.2) est immédiate. Le théorème est ainsi démontré.

Théorème 4.2.4 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilberitienne de $\mathcal{H}$. L'application $\mathcal{I}$ définie par*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \ell^2(\mathbf{N}) \\ x & \mapsto & ((x|e_n))_{n\in\mathbf{N}} \end{array} \right.$$

est une bijection linéaire isométrique. Ceci contient en particulier les identités dites de Bessel et Parseval

$$x = \sum_{n\in\mathbf{N}} (x|e_n)e_n \quad et \quad \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbf{N}} |(x|e_n)|^2.$$

Démonstration du théorème 4.2.4 Son point principal est le fait que l'application $\mathcal{I}$ envoie bien $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\mathbf{N})$. Pour le prouver, posons

$$x_q \overset{\text{déf}}{=} \sum_{p\leq q} (x|e_p)e_p.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned}(x|x_q) &= \sum_{p\leq q} \overline{(x|e_p)}(x|e_p)\\ &= \sum_{p\leq q} |(x|e_p)|^2\\ &= (x_q|x_q).\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que $\|x_q\|^2 \leq \|x\| \times \|x_q\|$. On en déduit que, pour tout entier q, on a

$$\sum_{p=0}^{q} |(x|e_p)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Donc $\mathcal{I}(x)$ appartient à $\ell^2(\mathbf{N})$.

L'injectivité de l'application $\mathcal{I}$ résulte simplement du corollaire 4.2.2 qui affirme que l'orthogonal d'une partie totale est réduit à 0. La surjectivité et le fait que $\mathcal{I}$ est une isométrie est exactement le théorème 4.2.1. Le théorème 4.2.3 est ainsi démontré.

On peut donner comme application de l'existence de base hilbertienne le théorème suivant.

Théorème 4.2.5 (de caractérisation des opérateurs compacts) *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire continu est compact si et seulement si il est limite dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'opérateurs de rang fini.*

Démonstration du théorème 4.2.5 D'après le théorème 2.4.2, on sait que toute limite d'opérateurs compacts est un opérateur compact. Réciproquement, soit A un opérateur compact. L'image par A de la boule unité de $\mathcal{H}$, notée A(B) est une partie totale de $\operatorname{Im} A$. Comme l'adhérence de $A(B)$ est compacte, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ déléments de $A(B)$ qui est dense dans $A(B)$. Cette famille est totale dans l'espace $\mathcal{H}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\operatorname{Im} A}$ est un espace de Hilbert séparable. Il admet donc une base hilbertienne. Désignons par p_n la projection orthogonale sur l'espace engendré par les n premiers vecteurs de cette base. Nous allons démontrer que la suite des opérateurs $A_n \stackrel{\text{déf}}{=} p_n \circ A$ (qui sont évidemment de rang fini) converge vers A.

Soit ε un réel strictement positif. L'opérateur A étant compact, il existe une famille finie $(x_j)_{1\leq j\leq N_\varepsilon}$ telle que

$$\forall x \in B\,,\ \exists j \in \{1,\cdots,N_\varepsilon\} \,/\, \|Ax - Ax_j\| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Donc, pour tout x appartenant à la boule unité, on a

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{1\leq j\leq N_\varepsilon} \|A_n x_j - Ax_j\| + \frac{2\varepsilon}{3}\cdot$$

Mais, pour tout indice j, $\lim_{n\to\infty} p_n(Ax_j) = Ax_j$. Donc, il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{1\leq j\leq N_\varepsilon} \|A_n x_j - Ax_j\| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Ainsi, il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|A_n x - Ax\| < \varepsilon.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Exercice 4.2.6 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, séparable, de dimension infinie et K un compact de $\mathbf{C}$. Démontrez qu'il existe un élément A de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\operatorname{Sp}(A) = K$.*

4.3 Dualité des espaces de Hilbert

La notion de dualité est familière en dimension finie. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension finie d, c'est-à-dire un espace euclidien ou hermitien. On sait que l'application δ définie par

$$\delta \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathcal{H}' \\ x & \mapsto & \delta(x) \ : \ h \mapsto (h|x) \end{array} \right.$$

est une bijection antilinéaire et isométrique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$. Pour un espace de Hilbert de dimension infinie, la situation diffère assez peu.

Théorème 4.3.1 (de représentation de Riesz) *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, on considère l'application δ définie par*

$$\delta \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathcal{H}' \\ x & \mapsto & \delta(x) \ : \ h \mapsto (h|x) \end{array} \right.$$

C'est une bijection antilinéaire isométrique.

Démonstration du théorème 4.3.1 Le fait que $\|\delta(x)\|_{\mathcal{H}'} \leq \|x\|$ (donc en particulier que δ est une forme linéaire continue) résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le fait que δ est antilinéaire est évident. De plus,

$$\langle \delta(x), \frac{x}{\|x\|} \rangle = \|x\| \, ;$$

donc δ est une isométrie. L'injectivité de δ résulte du fait que $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$. Pour démontrer la surjectivité de δ, considérons un élément ℓ de $\mathcal{H}' \setminus \{0\}$. Son noyau est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, distinct de $\mathcal{H}$. Soit x un vecteur non nul de $\ker \ell^\perp$ tel que $\langle \ell, x \rangle = \|x\|^2$. Les deux formes linéaires ℓ et $\delta(x)$ ont même noyau et il existe un h_0 non nul tel que $\langle \ell, h_0 \rangle = \langle \delta(x), h_0 \rangle$, donc $\delta(x) = \ell$. Le théorème est ainsi démontré.

Le théorème ci-dessus implique en particulier qu'un espace de Hilbert est réflexif. On peut en déduire les deux corollaires ci-dessous.

Corollaire 4.3.1 *La forme bilinéaire définie par*

$$B \left\{ \begin{array}{ccc} L^2(X, d\mu) \times L^2(X, d\mu) & \to & \mathbf{K} \\ (f, g) & \mapsto & \displaystyle\int_X f(x) g(x) d\mu(x) \end{array} \right.$$

identifie le dual de $L^2(X, d\mu)$ à $L^2(X, d\mu)$.

Corollaire 4.3.2 *La forme linéaire B définie par*

$$\widetilde{B} \left\{ \begin{array}{ccc} L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi) \times L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi) & \to & \mathbf{C} \\ (f, g) & \mapsto & (2\pi)^{-d} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} f(\xi) g(-\xi) d\xi \end{array} \right.$$

identifie $L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi)$ au dual de $L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$.

Démonstration du corollaire 4.3.1 Il suffit d'observer que $\delta_B(f) = \delta(\overline{f})$ ce qui assure immédiatement le résultat.

Démonstration du corollaire 4.3.2 Elle est un peu plus délicate que la précédente. Posons

$$M_s(f)(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} (1+|\xi|^2)^s f(\xi) \quad \text{et} \quad \check{M}_s \stackrel{\text{déf}}{=} (1+|\xi|^2)^s f(-\xi).$$

Nous allons démontrer que $\delta_{\widetilde{B}} = (2\pi)^{-d}\left({}^t\check{M}_s \circ \delta_B \circ M_{-s}\right)$, ce qui assurera le résultat d'après le corollaire précédent et la proposition 3.4.2.

$$\begin{aligned}
\langle \delta_{\widetilde{B}}(f), g\rangle &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d} f(\xi)g(-\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d}(1+|\xi|^2)^{-s}f(\xi)(1+|\xi|^2)^s g(-\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-d}B(M_{-s}(f), \check{M}_s g) \\
&= (2\pi)^{-d}\langle \delta_B(M_{-s}(f)), \check{M}_s g\rangle \\
&= (2\pi)^{-d}\langle {}^t\check{M}_s \circ \delta_B \circ M_{-s}(f), g\rangle.
\end{aligned}$$

D'où le corollaire.

Définition 4.3.1 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et x un élément de $\mathcal{H}$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers x et l'on note $\operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x$ ou bien $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \rightharpoonup x$ si et seulement si*

$$\forall h \in \mathcal{H}\,,\ \lim_{n\to\infty}(h|x_n) = (h|x).$$

La définition ci-dessus peut se formuler en disant que

$$\operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \operatorname*{limf}_{n\to\infty} \star\delta(x_n) = \delta(x).$$

Le théorème suivant dit, entre autre chose, pourquoi cette convergence est dite faible.

Théorème 4.3.2 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et x un élément de $\mathcal{H}$. On a alors*

$$\textit{si}\quad \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 \quad \textit{alors}\quad \operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x\,; \tag{4.3}$$

$$\textit{si}\quad \operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x \ \textit{et}\ \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|, \quad \textit{alors}\quad \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0. \tag{4.4}$$

De plus, si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \rightharpoonup x$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Démonstration du théorème 4.3.2 Le premier point du théorème résulte simplement du fait que

$$|(h|x_n) - (h|x)| \le \|h\| \times \|x_n - x\|.$$

Quant au second point, il suffit d'écrire que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\Re e(x|x_n) + \|x\|^2;$$

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend faiblement vers x, on a

$$-2\lim_{n\to\infty}\Re e(x|x_n) = -2\|x\|^2.$$

Le deuxième point est ainsi démontré. Le troisième point est un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus. En effet, l'hypothèse de convergence faible signifie que, pour tout y de $\mathcal{H}$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\delta(x_n)(y) = \lim_{n\to\infty}(y|x_n) = (y|x).$$

Le théorème 2.2.4 de Banach-Steinhaus dit que la suite $(\delta(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathcal{H}'$. D'après le théorème 4.3.1 de représentation de Riesz, ceci signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. D'où le théorème.

Exemple Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension infinie et séparable. Considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}$. D'après le théorème 4.3.1 de représentation de Riesz, pour tout x de $\mathcal{H}$, la suite $((x|e_n))_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $\ell^2(\mathbf{N})$. Donc elle tend vers 0. Voilà donc un exemple de suite faiblement convergente vers 0 qui ne converge pas au sens de la norme vers 0 puisque $\|e_n\| = 1$.

Proposition 4.3.1 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{H}$ telles que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad et \quad \liminf_{n\to\infty} y_n = y.$$

Alors, on a $\lim_{n\to\infty}(x_n|y_n) = (x|y)$.

Démonstration de la proposition 4.3.1 Il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &\leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \times \|y_n\| + |(x|y_n - y)|. \end{aligned}$$

Le théorème 4.3.2 affirme que la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Donc, on a

$$|(x_n|y_n) - (x|y)| \leq C\|x_n - x\| + |(x|y_n - y)|,$$

D'où la proposition.

Exercice 4.3.1 *Trouvez deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ telles que*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = x\,,\ \liminf_{n\to\infty} y_n = y \quad et \quad \lim_{n\to\infty}(x_n|y_n) \neq (x|y).$$

Exercice 4.3.2 *Démontrez que, dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend faiblement vers x, alors,*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

Le théorème suivant est une théorème de compacité faible de la boule unité d'un espace de Hilbert. Lorsque celui-ci n'est pas de dimension finie, on sait, d'après le théorème 2.1.2 que la boule unité n'est pas compacte au sens de la topologie définie à l'aide de la norme. Cependant, on a le théorème ci-après qui n'est qu'une traduction du théorème 3.3.2.

Théorème 4.3.3 (de compacité faible) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente.*

4.4 La notion d'adjoint

La notion d'adjoint est bien connue en dimension finie. Étant donné un produit scalaire sur un espace $\mathcal{H}$ de dimension finie d, l'adjoint $A^\star$ d'un opérateur est défini par la relation

$$(Ax|y) = (x|A^\star y).$$

Il est connu que, si $(A_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ est la matrice de A dans une base orthonormée, alors la matrice de $A^\star$ dans cette même base est donnée par $A^\star_{i,j} = \overline{A}_{j,i}$. De plus, c'est un théorème classique d'algèbre linéaire que si u est autoadjoint (i.e. $A = A^\star$), l'opérateur A est diagonalisable dans une base orthonormée.

Nous allons étudier une généralisation de ces concepts et de ces résultats au cas des espaces de Hilbert de dimension infinie.

Théorème 4.4.1 *Soit A un opérateur linéaire continu sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Il existe un unique opérateur linéaire $A^\star$ continu sur $\mathcal{H}$ tel que*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}\,,\ (Ax|y) = (x|A^\star y).$$

De plus, l'application qui, à l'opérateur A, associe $A^\star$, est une application antilinéaire isométrique de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans lui-même.

Définition 4.4.1 *On appelle l'opérateur $A^\star$ ci-dessus l'opérateur adjoint de A. On dit qu'un élément A de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est autoadjoint si et seulement si $A = A^\star$.*

Démonstration du théorème 4.4.1 L'unicité de l'opérateur $A^\star$ résulte immédiatement du fait que $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$. Soit $\mathcal{L}_A$ l'application définie par

$$\mathcal{L}_A \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{H} & \to & \mathcal{H}' \\ y & \mapsto & \mathcal{L}_A(y)\ :\ x \mapsto (Ax|y). \end{array} \right.$$

Il est visible que l'application $\mathcal{L}_A$ est une application antilinéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$. Posons $A^\star \stackrel{\text{déf}}{=} \delta^{-1} \circ \mathcal{L}_A$. Par définition de $A^\star$, on a

$$(x|A^\star y) = (\mathcal{L}_A y|x) = (Ax|y).$$

Donc l'opérateur A vérifie les propriétés voulues. De plus, on a

$$\begin{array}{rcl} \|A\| & = & \displaystyle\sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |(Ax|y)| \\ & = & \displaystyle\sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |(x|A^\star y)| \\ & = & \|A^\star\|. \end{array}$$

Le théorème 4.4.1 est donc démontré.

Exercice 4.4.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel et Ω un ouvert de $\mathcal{H}$. On définit l'opérateur "gradient" par*

$$\text{grad} \left\{ \begin{array}{rcl} C^1(\Omega;\mathbf{R}) & \to & \mathcal{C}(\Omega,\mathcal{H}) \\ g & \mapsto & \delta^{-1} Dg \end{array} \right.$$

Soient g une application C^1 d'un ouvert Ω d'un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$ dans un ouvert Ω' de $\mathcal{H}$ et f une application C^1 de Ω' dans $\mathbf{R}$. Calculez grad $(f \circ g)$.

Proposition 4.4.1 *Soit A une application linéaire continue sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On a les propriétés suivantes. L'opération * est une involution, c'est-à-dire que $A = A^{\star\star}$. On a aussi*

$$(\ker A)^\perp = \overline{\text{Im}\, A^\star} \quad \textit{et} \quad \ker A = (\text{Im}\, A^\star)^\perp. \tag{4.5}$$

De plus, si A est compact, alors $A^\star$ l'est aussi. Enfin, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers x, alors la suite $(A^\star x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers $A^\star x$.

Démonstration de la proposition 4.4.1 Le premier point résulte du fait que si l'on a $(Ax|y) = (x|A^\star y)$, alors $(A^\star y|x) = (y|Ax)$. Pour démontrer les relations (4.5), écrivons que

$$\forall y \in \mathcal{H}\,,\ (Ax|y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{H}\,,\ (x|A^\star y) = 0.$$

La traduction ensembliste de l'équivalence ci-dessus est exactement l'égalité entre les deux ensembles $\ker A$ et $(\operatorname{Im} A^\star)^\perp$. L'autre relation s'en déduit par passage à l'orthogonal.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite faiblement convergente vers x. Pour tout y de $\mathcal{H}$, on a $(y|A^\star x_n) = (Ay|x_n)$. La convergence faible de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ entraîne celle de la suite $(A^\star x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Supposons maintenant que A soit compact. Le théorème 4.2.5 affirme l'existence d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'opérateurs de rang fini convergeant vers A. Comme l'opération * est continue de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans lui-même, il suffit de démontrer que l'adjoint d'un opérateur de rang fini l'est aussi. Soit C un opérateur de rang fini. D'après les relations (4.5), le noyau de $C^\star$ est l'orthogonal de $\operatorname{Im} C$, qui est de dimension finie. Donc, l'image de $C^\star$ est l'image de $C^\star$ restreint au sous-espace $\operatorname{Im} C$, qui est de dimension finie. Donc $C^\star$ est de rang fini. La démonstration de la proposition est ainsi achevée.

Théorème 4.4.2 *Soit A un opérateur compact autoadjoint d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie.*

- *Le spectre de A est la réunion de $\{0\}$ et d'une suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de valeurs propres réelles tendant vers 0 (éventuellement nulle à partir d'un certain rang).*
- *L'espace vectoriel $\ker(A - \lambda_j \operatorname{Id})$ est de dimension finie si λ_j est non nul.*
- *On a $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \max_{j\in\mathbf{N}} |\lambda_j|$.*

Démonstration du théorème 4.4.2 Commençons par démontrer le deuxième point. Posons $E_j = \ker(A - \lambda_j \operatorname{Id})$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de E_j. L'opérateur A étant compact, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la suite $(Ax_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Mais $Ax_{\varphi(n)} = \lambda_j x_{\varphi(n)}$ et λ_j est non nulle. La boule unité de E_j est donc compacte. D'après le théorème 2.1.2 de Riesz, la dimension de E_j est finie.

Démontrons le premier point. Soit

$$M_0 \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\|x\|=1} |(Ax|x)|.$$

Si $M_0 = 0$, on a alors $(Ax|x) = 0$ pour tout élément x de $\mathcal{H}$. Or, l'opérateur A étant autoadjoint, on a

$$(Ax|y) = \frac{1}{2}\Big((A(x+y)|x+y) - (Ax|x) - (Ay|y)\Big).$$

Donc, si $M_0 = 0$, on a $(Ax|y) = 0$ pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathcal{H}$, ce qui,implique évidemment que $A = 0$. Comme $A^\star = A$, $(Ax|x)$ est réel, donc quitte à changer A en $-A$, on peut supposer que

$$M_0 = \sup_{\|x\|=1} (Ax|x).$$

Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de la boule unité B telle que

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n|x_n) = M_0$$

L'opérateur A étant compact, on peut, quitte à extraire une sous-suite, dire qu'il existe un y dans $\mathcal{H}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y.$$

À nouveau après extraction, on peut supposer, d'après le théorème 4.3.3, qu'il existe un élément x de $\mathcal{H}$ tel que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = x.$$

Démontrons que $Ax = y$. L'opérateur A étant autoadjoint, on a, pour tout z dans $\mathcal{H}$,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n|Az) = (x|Az) = (Ax|z).$$

De plus, il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n|z) = (y|z).$$

Il en résulte que, pour tout z dans $\mathcal{H}$, on a $(y|z) = (Ax|z)$, ce qui implique que $y = Ax$. Mais, d'après la proposition 4.3.1, on a

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n|x_n) = (Ax|x).$$

Le maximum M_0 est donc atteint en un point x qui bien sûr est différent de 0 puisque M_0 est strictement positif. De plus, si l'on avait $\|x\| < 1$, alors on aurait

$$\left(A\frac{x}{\|x\|}\middle|\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{M_0}{\|x\|^2} > M_0,$$

ce qui contredit la maximalité de M_0 car M_0 est strictement positif. Donc $\|x\| = 1$, ce qui implique en particulier que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers x est forte.

Un argument d'homogénéité permet d'affirmer que

$$F(z) \stackrel{\text{déf}}{=} M_0\|z\|^2 - (Az|z) \geq 0.$$

Comme nous venons de voir que $F(x) = 0$, le point x est donc un minimum de la fonction F. Donc la différentielle de F s'annulle au point x. D'où il résulte que

$$\forall h \in \mathcal{H}\,,\ DF(x)h = 2M_0\,\Re e(x|h) - 2\,\Re e(Ax|h),$$

ce qui entraine que $Ax = M_0x$. Nous avons vu que x était non nul. Donc M_0 est valeur propre de A.

Nous allons maintenant travailler dans l'espace

$$\mathcal{H}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\ker(A - M_0\,\mathrm{Id}) + \ker(A + M_0\,\mathrm{Id})\Big)^{\perp} = \ker(A - M_0\,\mathrm{Id})^{\perp} \cap \ker(A + M_0\,\mathrm{Id}).$$

Démontrons que $\mathcal{H}_1$ est stable par A. Pour ce faire, il suffit de démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.4.1 *Soit B un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors $B^\star$ laisse stable* $(\ker B)^{\perp}$.

Démonstrationdu lemme 4.4.1 Soit $x \in (\ker B)^{\perp}$ et $y \in \ker B$. On a

$$(y|B^\star x) = (By|x) = 0$$

Ainsi donc $B^\star x$ est dans l'orthogonal de $\ker B$. D'où le lemme.

Si l'on applique le lemme ci-dessus à $B = A \pm M_0 \,\mathrm{Id}$, on trouve, comme A est autoadjoint, que

$$(A \pm M_0 \,\mathrm{Id})\Big(\ker(A \pm M_0 \,\mathrm{Id})\Big)^{\perp} \subset \Big(\ker(A \pm M_0 \,\mathrm{Id})\Big)^{\perp}.$$

Ceci implique immédiatement que

$$A\Big(\ker(A \pm M_0 \,\mathrm{Id})\Big)^{\perp} \subset \Big(\ker(A \pm M_0 \,\mathrm{Id})\Big)^{\perp}$$

et donc que $A\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1$. Étudions maintenant l'opérateur A restreint à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$. D'après la relation (**??**), $A_{|\mathcal{H}_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Posons

$$M_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathcal{H}_1}} (Ax|x).$$

D'après l'étude précédente, si $M_1 \neq 0$, le maximum est atteint en au moins un point de norme 1 de $(\ker(A - M_1 \,\mathrm{Id}) + \ker(A + M_1 \,\mathrm{Id}))^{\perp}$. Ceci implique que $M_1 < M_0$. D'où l'existence d'une suite de valeurs propres réelles de valeur absolue strictement décroissante. Supposons cette suite infinie et désignons-la par $(\lambda_j)_{j \in \mathbf{N}}$. Soit $(e_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs propres deux à deux orthogonaux et de norme 1, associés à la valeur propre λ_j. La suite $(e_j)_{j \in \mathbf{N}}$ tend faiblement vers 0. Quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(Ae_j)_{j \in \mathbf{N}}$ tend fortement vers 0. Mais comme $Ae_j = \lambda_j e_j$, on en déduit que

$$\lim_{j \to \infty} |\lambda_j| \, \|e_j\| = 0.$$

Les vecteurs e_j étant de norme 1, la suite $(\lambda_j)_{j \in \mathbf{N}}$ tend vers 0. Le théorème 4.4.2 est complètement démontré.

Chapitre 5

Espaces L^p

5.1 Rappel sur la théorie de la mesure

Dans cette section, nous allons rappeler les principaux théorèmes de base de la théorie de la mesure. Soit X muni d'une tribu $\mathcal{B}$ et μ une mesure positive sur $\mathcal{B}$. On suppose, comme il est classique, que la mesure est σ-finie, c'est-à-dire que X est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie. Nous commencerons par rappeler les principaux énoncés qui fondent la théorie de la mesure.

Théorème 5.1.1 (de convergence monotone) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives sur X. On suppose que, pour tout x, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. Soit f la fonction définie par*

$$f\left\{\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbf{R}\cup\{+\infty\} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x). \end{array}\right.$$

Alors on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Lemme 5.1.1 (de Fatou) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de X dans $[0,+\infty]$. On a*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Les rapports entre la convergence dominée presque partout et la convergence en norme L^p peuvent être décrits par les deux théorème suivants.

Théorème 5.1.2 *Soit p un nombre réel, on considère une suite $(f_n)_{n\in N}$ de L^p qui converge dans L^p vers une fonction f. Il existe une fonction d'extraction ψ telle que*

$$\forall\, p.p\, x\,,\ \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x) = f(x).$$

Théorème 5.1.3 (de convergence dominée de Lebesgue) *Soient p un réel supérieur à 1 et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(X,d\mu)$. Si, pour presque tout x de X,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

et s'il existe une fonction g de $L^p(X, d\mu)$ telle que, pour presque tout x de X, on ait

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

alors, on a

$$f \in L^p \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

Théorème 5.1.4 (de dérivation sous l'intégrale) *Soient (X, μ) un espace mesuré, Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et f une application mesurable de $\Omega \times X$ dans $\mathbf{K}$. Si, pour presque tout x de X, la fonction*

$$z \mapsto f(z, x)$$

est différentiable sur Ω, si pour tout z de Ω,

$$x \mapsto f(z, x) \quad et \quad x \mapsto Df(z, x)$$

sont intégrables sur X et si enfin, pour presque tout x de X et pour tout z de Ω, on a

$$|Df(z, x)| \leq g(z) \quad avec \quad g \in L^1(X, d\mu),$$

alors l'application

$$z \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x)$$

est différentiable sur Ω et l'on a

$$D \int_X f(z, x) d\mu(x) = \int_X Df(z, x) d\mu(x).$$

Théorème 5.1.5 (de Fubini) *Soient (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2) deux espaces mesurés et F une fonction mesurable positive de $X_1 \times X_2$ dans $[0, +\infty]$. On a*

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} F(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \otimes d\mu_2(x_2) &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} F(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \\ &= \int_{X_2} d\mu_2(x_2) \int_{X_1} F(x_1, x_2) d\mu_1(x_1). \end{aligned}$$

En appliquant ce théorème, on résout l'exercice suivant.

Exercice 5.1.1 *Soit f une fonction mesurable sur un espace mesuré (X, μ). On a*

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mu(|f| > \lambda) d\lambda.$$

Théorème 5.1.6 (de Fubini-Tonelli) *Soient (X_1, μ_1) et (X_2, μ_2) deux espaces mesurés et F une fonction mesurable sur $X_1 \times X_2$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

i) La fonction F appartient à $L^1(X_1 \times X_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$,

ii) Pour presque tout point x_1 de X_1, la fonction $F(x_1, \cdot)$ appartient à $L^1(X_2, d\mu_2)$, la fonction

$$\int_{X_2} F(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \in L^1(X_1, d\mu_1) \quad et$$

$$\left\| \int_{X_2} F(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right\|_{L^1(X_1, d\mu_1)} \leq \|F\|_{L^1(X_1 \times X_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)}.$$

De même, pour presque tout point x_2 de X_2, la fonction $F(\cdot, x_2)$ appartient à $L^1(X_1, d\mu_1)$, la fonction

$$\int_{X_1} F(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \in L^1(X_2, d\mu_2) \quad \textit{et}$$

$$\left\| \int_{X_1} F(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right\|_{L^1(X_2, d\mu_2)} \leq \|F\|_{L^1(X_1 \times X_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)}.$$

5.2 Définition des espaces L^p

Définition 5.2.1 *Soit $p \in [1, +\infty[$, on désigne par $L^p(X, d\mu)$ l'espace des (classes d'équivalence modulo la relation de conïcidence presque partout) des fonctions mesurables telles que*

$$\|f\|_{L^p}^p \stackrel{\text{déf}}{=} \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty.$$

Si $p = \infty$, on désigne par $L^p(X, d\mu)$ l'espace des (classes d'équivalence modulo la relation de coïncidence presque partout) des fonctions mesurables telles que

$$\|f\|_{L^\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\Big\{\lambda \,/\, \mu\{x \,/\, |f(x)| > \lambda\} > 0\Big\}.$$

L'étude de ces espaces requiert la notion d'exposant conjugé:

$$\text{Si} \quad p \in]1, \infty[\,, \; p' \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{p}{p-1}, \quad \text{si} \quad p = 1, \; p' \stackrel{\text{déf}}{=} +\infty, \quad \text{et si} \quad p = +\infty\,, \; p' \stackrel{\text{déf}}{=} 1.$$

Les exposants p et p' sont dits conjugués et, en convenant que $1/+\infty = 0$, on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Le premier théorème important est le suivant.

Théorème 5.2.1 *Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $(L^p(X, d\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach.*

Démonstration du théorème 5.2.1 Remarquons tout d'abord que pour $p = \infty$, ceci a déjà été fait (voir le théorème 1.2.2 page 13) une fois remarqué que l'on peut se ramener, quitte à modifier les fonctions sur un ensemble négligeable, à des réprésentants bornés.

Étudions maintenant le cas où p est fini. La première étape consiste à démontrer que l'espace $(L^p(X, d\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace vectoriel normé. C'est clair pour $p = 1$. Lorsque p appartient à $]1, \infty[$, observons tout d'abord que, comme

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)| + |g(x)|)^p,$$

l'espace $L^p(X, d\mu)$ est un espace vectoriel. Le fait que $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme repose sur l'inégalité de Hölder.

Proposition 5.2.1 *Soient (X,μ) un espace mesuré, f une fonction de $L^p(X,d\mu)$ et g une fonction de $L^{p'}(X,d\mu)$. Alors, le produit fg appartient à $L^1(X,d\mu)$ et*

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

Démonstration de la proposition 5.2.1 Remarquons tout d'abord que si $p=1$ ou $p=\infty$, il n'y a rien à démontrer. La fonction logarithme étant concave, on a

$$\theta \log x + (1-\theta)\log x \leq \log(\theta x + (1-\theta)x),$$

ce qui se traduit par

$$x^\theta y^{1-\theta} \leq \theta x + (1-\theta)y.$$

De plus, on peut supposer que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{p'}} = 1$. Écrivons alors que

$$\begin{aligned}
\int_X |fg|d\mu &\leq \int_X (|f|^p)^{\frac{1}{p}}(|g|^{p'})^{\frac{1}{p'}}d\mu \\
&\leq \frac{1}{p}\int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{p'}\int_X |g|^{p'}d\mu \\
&\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.
\end{aligned}$$

Ceci conclue la démonstration de l'inégalité de Hölder.

Revenons à la démonstration du théorème 5.2.1. L'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}
\int_X |f+g|^p d\mu &\leq \int_X |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}d\mu \\
&\leq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\qquad + \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \Big(\Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)\Big(\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu\Big)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.

Ceci achève la démonstrationdu théorème 5.2.1.

Nous allons maintenant faire quelques remarques sur l'inégalité de Hölder. Donnons tout d'abord le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.1 *Soient p et q deux réels strictement supérieurs à 1 tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1.$$

Alors l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} L^p \times L^q & \to & L^r \\ (f,g) & \mapsto & fg \end{array}\right.$$

est une application bilinéaire continue si

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Démonstration du corollaire 5.2.1 On applique l'inégalité de Hölder avec $s = r/p$. D'où il vient que

$$\int_X |f(x)g(x)|^r dx \leq \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^q}^r,$$

ce qui signifie que

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q},$$

d'où le corollaire.

Corollaire 5.2.2 *Si X est de mesure finie, alors $L^p(X, d\mu) \subset L^q(X, d\mu)$ si $p \geq q$.*

Démonstration du corollaire 5.2.2 Comme la fonction $\mathbf{1}$ appartient visiblement à l'espace $L^\infty(X, d\mu) \cap L^1(X, d\mu)$, donc à $L^p(X, d\mu)$ pour tout p. On a même

$$\forall p \in [1, \infty], \ \|\mathbf{1}\|_{L^p} = \mu(X)^{\frac{1}{p}}.$$

Le Corollaire 5.2.1 implique que

$$\|f\|_{L^q} \leq \mu(X)^{\frac{1}{s}} \|f\|_{L^p} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

D'où le corollaire.

L'inégalité de Hölder est fondamentale. Nous allons voir qu'elle est optimale au sens suivant.

Lemme 5.2.1 *Soit (X, μ) un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable et p un élément de $[1, +\infty]$. On a alors la propriété suivante. Si*

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}} \leq 1} \int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) < +\infty,$$

alors, f appartient à L^p et

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}} \leq 1} \left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right|.$$

Démonstration du lemme 5.2.1 Commençons par le cas où $p = +\infty$. Soit λ un réel strictement positif tel que

$$\mu(|f| \geq \lambda) > 0.$$

On pose $E_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} (|f| \geq \lambda)$. Soit g_0 une fonction de L^1, positive, supportée dans E_λ, et d'intégrale 1. On pose

$$g(x) = \frac{\overline{f}(x)}{|f(x)|} g_0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) &= \int_X |f(x)| g_0(x) d\mu(x) \\ &\geq \lambda \int_X g_0 d\mu(x) \\ &\geq \lambda. \end{aligned}$$

D'où le lemme dans ce cas. Supposons maintenant que p soit réel strictement supérieur à 1 et considérons alors une suite $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croissante d'ensembles de mesure finie dont la réunion est X et posons

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{E_n\cap(|f|\leq n)}f \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\overline{f}_n(x)|f_n(x)|^{p-1}}{|f_n(x)| \times \|f_n\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}}.$$

Il est clair que la fonction f_n appartient à $L^1 \cap L^\infty$ donc à L^p pour tout p et que l'on a

$$\|g_n\|_{L^{p'}}^{p'} = \frac{1}{\|f_n\|_{L^p}^p}\int_X |f_n(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu(x) = 1.$$

La définition des fonctions f_n et g_n assure que

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\mathbf{1}_{E_n\cap(|f|\leq n)}g_n(x)d\mu(x) &= \int_X f_n(x)g_n(x)d\mu(x)\\ &= \left(\int_X |f_n(x)|^p d\mu(x)\right)\|f_n\|_{L^p}^{-\frac{p}{p'}}\\ &= \|f_n\|_{L^p}^{p-\frac{p}{p'}}\\ &= \|f_n\|_{L^p}\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_X |f_n(x)|^p d\mu(x) \leq \left(\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leq 1}\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x)\right)^p.$$

Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite croissante $(|f_n|^p)_{n\in\mathbf{N}}$ implique immédiatement que

$$\|f\|_{L^p} \leq \sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leq 1}\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x).$$

Mais, si f appartient à l'espace L^p, alors en posant

$$g(x) = \frac{\overline{f}(x)|f(x)|^{p-1}}{|f(x)| \times \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}}$$

on a

$$\|g\|_{L^{p'}}^{p'} = \frac{1}{\|f\|_{L^p}^p}\int_X |f(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu(x) = 1 \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^p} = \int_X f(x)g(x)d\mu(x).$$

D'où le lemme pour $p \in]1,\infty]$. Dans le cas où $p = 1$, il suffit de récrire mot pour mot la démonstration du cas $p > 1$ en considérant la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$g_n(x) = \frac{\overline{f}_n(x)}{|f_n(x)|} \quad \text{si} \quad f_n(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 \text{ sinon.}$$

5.3 Densité des fonctions continues dans les espaces L^p

Démontrons tout d'abord la proposition suivante.

Proposition 5.3.1 *L'espace $L^1(X, d\mu) \cap L^\infty(X, d\mu) \cap L^p(X, d\mu)$ est dense dans $L^p(X, d\mu)$.*

Démonstration de la proposition 5.3.1 Considérons une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ensembles de mesure finie dont la réunion est l'ensemble X. Posons

$$f_n = \mathbf{1}_{E_n}\mathbf{1}_{|f|\leq n}f.$$

Il est clair que, pour presque tout x, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

De plus, on a clairement l'inégalité

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p|f(x)|^p.$$

Le théorème de la convergence dominée assure alors le résultat.

Dans toute la suite de ce chapitre, Ω désignera un ouvert de $\mathbf{R}^d$ muni de la distance euclidienne usuelle et μ désignera une mesure positive finie sur tous les compacts. Avant de passer au sujet proprement dit de cette section, nous allons définir quelques espaces fonctionnels, notamment les espaces L^p dits locaux.

Définition 5.3.1 *L'espace noté $L^p_{loc}(\Omega)$ des fonctions dites "localement L^p" sur Ω est l'ensemble des fonctions f telles que, pour tout compact K de Ω, on ait*

$$f \in L^p(K, d\mu).$$

Proposition 5.3.2 *Si $p \leq p'$, alors $L^{p'}_{loc}(\Omega)$ est inclus dans $L^p_{loc}(\Omega)$.*

Démonstration de la proposition 5.3.2 Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder qui implique en particulier que

$$q \geq p \Rightarrow L^q(K, d\mu) \subset L^p(K, d\mu).$$

Définition 5.3.2 *Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$, le support de f noté* Supp f *est le complémentaire du plus grand ouvert U tel que $f_{|U}$ soit nulle.*

Proposition 5.3.3 *Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$. Un point x de Ω n'appartient pas au support de f si et seulement si il existe un réel r strictement positif tel que, pour toute fonction bornée φ nulle en dehors de la boule $B(x, r)$, on ait*

$$\int_\Omega \varphi(x)f(x)d\mu(x) = 0.$$

Démonstration de la proposition 5.3.3 Il suffit simplement d'appliquer le lemme 5.2.1 pour $X = B(x, r)$.

Théorème 5.3.1 *Pour tout ensemble A appartenant à la tribu borélienne complétée $\mathcal{B}$ et de mesure finie et pour tout ε strictement positif, il existe un ouvert U et un compact K tel que*

$$K \subset A \subset U \quad et \quad \mu(U \setminus K) < \varepsilon.$$

De ce théorème, que l'on admettra, on déduit l'énoncé fondamental suivant.

Théorème 5.3.2 *Soit $p \in [1, +\infty[$, l'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω est dense dans $L^p(\Omega, d\mu)$.*

Démonstration du théorème 5.3.2 Soit f une fonction de L^p. Il s'agit de démontrer que, pour tout ε strictement positif, il existe une fonction g continue à support compact telle que

$$\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon. \tag{5.1}$$

D'après la proposition 5.3.1, il existe une fonction $\widetilde{f}$ appartenant à $L^1 \cap L^\infty$ telle que

$$\|f - \widetilde{f}\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{4}\cdot \tag{5.2}$$

Définissons maintenant les fonctions f_n par

$$f_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{n+1} \mathbf{1}_{\widetilde{f}^{-1}([\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}[)} + \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{j+1}{n+1} \mathbf{1}_{\widetilde{f}^{-1}([\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}[)}. \tag{5.3}$$

Il est clair que

$$\forall x \in \Omega\,,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \widetilde{f}(x) \quad \text{et} \quad |f_n(x)| \leq |\widetilde{f}(x)|.$$

Le théorème de la convergence dominée assure que $f_n \to \widetilde{f}$ dans L^p. Donc, d'après (5.2), il existe un entier n_0 tel que

$$\|f_n - f\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{5.4}$$

De plus, comme la fonction $\widetilde{f}$ est essentiellement bornée, les sommes apparaissant dans (5.3) sont finies, puisqu'il existe un réel λ tel que

$$\frac{|j|}{n+1} \geq \lambda \Longrightarrow \widetilde{f}^{-1}\left(\left[\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}\right[\right) = \emptyset.$$

Ainsi, chaque fonction f_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Admettons un instant le lemme suivant.

Lemme 5.3.1 *Pour tout $p \in [1, \infty[$, pour tout borélien A de mesure finie, pour tout réel strictement positif ε, il existe une fonction h continue à support telle que*

$$\|h - \mathbf{1}_A\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Nous avons

$$f_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=0}^{J_0} \frac{j}{n_0+1} \mathbf{1}_{\widetilde{f}^{-1}\left(\left[\frac{j}{n_0+1}, \frac{j+1}{n_0+1}\right[\right)} + \sum_{j=-J_0}^{-1} \frac{j+1}{n_0+1} \mathbf{1}_{\widetilde{f}^{-1}\left(\left[\frac{j}{n_0+1}, \frac{j+1}{n_0+1}\right[\right)}.$$

pour un entier positif J_0 assez grand. D'après le lemme 5.3.1 ci-dessus, pour tout ε strictement positif, pour tout $j \in [-J_0, J_0]$, il existe une fonction continue à support compact g_j telle que

$$\Big\| \mathbf{1}_{\widetilde{f}^{-1}\left(\left[\frac{j}{n_0+1}, \frac{j+1}{n_0+1}\right[\right)} \cdot \Big\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2(2J_0+1)\|f_{n_0}\|_{L^\infty}} \cdot$$

Soit $g \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|j| \leq J_0} g_j$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|f_{n_0} - g\|_{L^p} &\leq \sum_{|j| \leq J_0} \Big\| \mathbf{1}_{\widetilde{f}^{-1}\left(\left[\frac{j}{n_0+1}, \frac{j+1}{n_0+1}\right[\right)} \cdot \Big\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2(2J_0+1)\|f_{n_0}\|_{L^\infty}} \cdot \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \end{aligned}$$

Le théorème 5.3.2 est alors démontré, pourvu que l'on démontre lemme 5.3.1.

Démonstration du Lemme 5.3.1 Soit $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de compacts (voir Théorème 1.5.2 et Définition 1.5.1 page 29). Comme A est de mesure finie, la fonction caractéristique de A appartient à L^p pour tout p. De plus, pour tout x de Ω, on a

$$\lim_{n \infty} \mathbf{1}_{K_n \cap A}(x) = \mathbf{1}_A(x) \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathbf{1}_{K_n \cap A}(x) \leq \mathbf{1}_A(x).$$

Donc, pour tout ε strictement positif, il existe n_0 tel que

$$\|\mathbf{1}_{K_n \cap A} - \mathbf{1}_A\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{5.5}$$

D'après le théorème 5.3.1, il existe un ouvert U et un compact K tel que

$$K \subset K_n \cap A \subset U \quad \text{et} \quad \mu(U \setminus K) < \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p \cdot$$

On peut supposer que l'adhérence de U est compacte. D'après la proposition 1.1.11, il existe une fonction continue h à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$h_{|X \setminus U} = 0 \quad \text{et} \quad h_{|K} = 1.$$

On en déduit facilement que

$$|h - \mathbf{1}_A| \leq \mathbf{1}_{U \setminus K} \quad \text{et donc que} \quad |h - \mathbf{1}_A| \leq \mathbf{1}^p_{U \setminus K}.$$

D'où il vient que

$$\|h - \mathbf{1}_A\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Le lemme est ainsi démontré puisque la fonction g est nulle en dehors de l'adhérence de U, qui est compacte.

Corollaire 5.3.1 *L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Démonstration du corollaire 5.3.1 . Soit $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite exaustive de compacts (voir la définition 1.5.1 page 29). Il suffit de trouver une partie démonbrable A de $L^p(\Omega)$ telle que, pour toute fonction continue à support compact dans K_n, on ait

$$\forall \varepsilon \,,\ \exists g \in A \ / \ \|f - g||_{L^\infty(K_n)} \leq \varepsilon. \tag{5.6}$$

Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues valant 1 près de K_n et dont le support est inclus dans $\overset{\circ}{K}_{n+1}$. On prend pour A l'ensemble des fonctions de type $\psi_n P$ où P est un polynôme à d indéterminées à coefficients rationnels. Démontrer que cet ensemble satisfait à la propriété (5.6) est un excellent exercice que le lecteur est fortement invité à faire.

Exercice 5.3.1 *Soient $x \in \mathbf{R}^d$ et τ_x l'application définie par*

$$\tau_x \left\{ \begin{array}{rcl} L^p & \to & L^p \\ f & \mapsto & \tau_x(f) \, : \, y \mapsto f(x-y). \end{array} \right.$$

L'application τ_x est une isométrie de L^p dans L^p et, si p est réel, alors, on a

$$\forall f \in L^p \, , \, \lim_{x \to 0} \|\tau_x f - \check{f}\|_{L^p} = 0 \quad avec \quad \check{f}(y) \stackrel{déf}{=} f(-y).$$

L'exercice ci-après montre comment l'on peut "régulariser" linéairement les fonctions de L^p.

Exercice 5.3.2 *1) Soit K une partie compacte de $\mathbf{R}^d$, démontrer que, pour tout ε strictement positif, il existe une famille finie $(A_{k,\varepsilon})_{k \in \mathbf{N}}$ d'ensembles disjoints, d'adhérence compacte dont le diamètre est inférieur à ε et telle que*

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{k,\varepsilon} = K.$$

On considère l'application P_n définie par

$$P_n \left\{ \begin{array}{rcl} L^1 & \to & L^\infty \\ f & \mapsto & P_n(f) \stackrel{déf}{=} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_{j,\frac{1}{n+1}})} \Big(\int_{A_{j,\frac{1}{n+1}}} f(x) d\mu(x) \Big) \mathbf{1}_{A_{j,\frac{1}{n+1}}} . \end{array} \right.$$

2) Démontrez que P_n est une application linéaire continue de $L^1(K)$ dans $L^\infty(K)$.
3) Démontrez que, pour tout p, on a $\|P_n\|_{\mathcal{L}(L^p;L^p)} \leq 1$.
4) Démontrez que, si f appartient à L^p et g à $L^{p'}$, alors

$$\int_K f(x) P_n g(x) d\mu(x) = \int_K P_n f(x) g(x) d\mu(x).$$

5) Démontrez que

$$\forall f \in L^p \, , \, \lim_{n \to \infty} \|P_n f - f\|_{L^p} = 0.$$

5.4 Convolution et régularisation

Dans toute cette section, nous travaillerons dans l'espace $\mathbf{R}^d$. L'opérateur de convolution est un opérateur crucial dans l'étude des fonctions sur $\mathbf{R}^d$.

Théorème 5.4.1 *Soient f et g deux fonctions de L^1. Alors, pour presque tout x de $\mathbf{R}^d$, la fonction*

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable et la fonction F définie par

$$F(x) \stackrel{déf}{=} \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

appartient à L^1. Elle est appelée la convoluée de f et de g et notée $f \star g$. L'opération $\star$ ainsi définie est une application bilinéaire continue de $L^1 \times L^1$ dans L^1.

Démonstration du théorème 5.4.1 Comme les fonctions f et g sont supposées être dans L^1, on a

$$|f(x-y)| \times |g(y)| \in L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |f(x-y)| \times |g(y)| dxdy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Les conclusions du théorème 5.1.5 de Fubini entraînent immédiatement le théorème. On peut aussi définir la convolution d'une fonction de L^p par une fonction de $L^{p'}$.

Théorème 5.4.2 *Soient f une fonction de L^p et g une fonction de $L^{p'}$. La formule*

$$(f \star g)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

définit une application bilinéaire continue de $L^p \times L^{p'}$ dans L^∞.

Démonstration du théorème 5.4.2 D'après l'inégalité de Hölder, pour presque tout x dans $\mathbf{R}^d$, l'application

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable et

$$\left| \int_K f(x-y)g(y)dy \right| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

D'où le théorème.

Les deux théorèmes ci-dessus se généralisent. On peut définir la convolution de deux fonctions si elles appartiennent à des espaces L^p convenables. Plus précisément:

Théorème 5.4.3 *Soit (p, q, r) un triplet de réels tel que*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{5.7}$$

Considérons un couple de fonctions (f, g) dans $L^p \times L^q$. Alors la formule

$$(f \star g)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

définit une fonction de L^r et l'on a

$$\|f \star g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Démonstration du théorème 5.4.3 C'est un exemple d'application du lemme 5.2.1. Soit φ une fonction de $L^{r'}$, nous allons majorer

$$I(f, g, \varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |f(x-y)g(y)\varphi(x)| dxdy.$$

Supposons démontré que

$$I(f, g, \varphi) \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|\varphi\|_{L^{r'}}. \tag{5.8}$$

Ceci signifie que

$$(x, y) \longmapsto |f(x-y)g(y)|\varphi(x)$$

appartient à $L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. Le théorème de Fubini-Tonelli 5.1.5 assure que, pour presque tout x,

$$x \longmapsto f(x-y)g(y)$$

appartient à $L^1(\mathbf{R}^d, dy)$. Ainsi donc $f \star g$ est bien définie pour presque tout x de $\mathbf{R}^d$. De plus, le théorème de Fubini assure que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} |f \star g(x)|\,|\varphi(x)|dx &= \int_{\mathbf{R}^d} \Big|\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)dy\Big|\,|\varphi(x)|dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy\,|\varphi(x)|dx \\ &\leq I(f,g,\varphi).\end{aligned}$$

L'inégalité (5.8) et le lemme 5.2.1 impliquent que $f \star g$ appartient à L^r et que

$$\|f \star g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p}.$$

Démontrons l'inégalité (5.8). Remarquons tout d'abord que l'on ne restreint pas la généralité de la démonstration en supposant que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. Considérons α et β deux réels de l'intervalle $]0,1[$. On écrit

$$I(f,g,\varphi) = \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |f(x-y)|^{1-\alpha}|g(y)|^{1-\beta}|\varphi(x)| \times |f(x-y)|^{\alpha}|g(y)|^{\beta}dxdy.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder avec la mesure

$$d\mu(x,y) = |f(x-y)|^{\alpha}|g(y)|^{\beta}dxdy.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} I(f,g,\varphi) &\leq I^{(1)}(f,g,\varphi)^{\frac{1}{r}} I^{(2)}(f,g,\varphi)^{1-\frac{1}{r}} \quad \text{avec} \\ I^{(1)}(f,g,\varphi) &\overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |f(x-y)|^{(1-\alpha)r+\alpha}|g(y)|^{(1-\beta)r+\beta}dxdy \quad \text{et} \\ I^{(2)}(f,g,\varphi) &\overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |\varphi(x)|^{r'}|f(x-y)|^{\alpha}|g(y)|^{\beta}dxdy \end{aligned}$$

Majorons $I^{(1)}(f,g,\varphi)$. Le théorème de Fubini pour les fonctions positives et l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue impliquent que

$$I^{(1)}(f,g,\varphi) = \Big(\int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^{(1-\alpha)r+\alpha}dx\Big)\Big(\int_{\mathbf{R}^d} |g(y)|^{(1-\beta)r+\beta}dy\Big)$$

Il est naturel de choisir α tel que $(1-\alpha)r+\alpha = p$ et β tel que $(1-\beta)r+\beta = q$, ce qui donne

$$\alpha = \frac{r-p}{r-1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{r-q}{r-1}.$$

Comme $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$, on trouve que $I^{(1)}(f,g,\varphi) = 1$. Pour majorer $I^{(2)}(f,g)$, observons que, par définition de α et β, on a

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1.$$

L'inégalité de Hölder entraîne alors que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)|^\alpha |g(y)|^\beta dy &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)|^{\alpha\times\frac{p}{\alpha}} dy\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |g(y)|^{\beta\times\frac{q}{\beta}} dy\right)^{\frac{\beta}{q}} \\ &\leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

D'où il résulte que

$$I^{(2)}(f,g,\varphi) \leq \|\varphi\|_{L^{r'}}.$$

L'inégalité 5.8 et alors le théorème 5.4.3 sont démontrés.

Théorème 5.4.4 *Soient f et g deux fonctions respectivement dans L^p et L^q telles que*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1.$$

Alors, on a

$$\text{Supp } (f \star g) \subset \text{Adh } (\text{Supp } f + \text{Supp } g).$$

Démonstration du théorème 5.4.4 Soit x un point de $\mathbf{R}^d$ et ρ un réel strictement positif tels que

$$B(x,\rho) \cap (\text{Supp } f + \text{Supp } g) = \emptyset.$$

Pour toute fonction φ bornée et nulle en dehors de $B(x,\rho)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \varphi(x) f(x-y) g(y) dxdy &= \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \varphi(x+y) f(x) g(y) dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où le théorème en appliquant la proposition 5.3.3.

La convolution est une opération cruciale, car elle permet la définition d'une procédure explicite d'approximation et de régularisation.

Théorème 5.4.5 *Soient φ une fonction de $L^1(\mathbf{R}^d)$ d'intégrale 1 et p un réel supérieur ou égal à 1. Posons*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On a alors, pour toute fonction f appartenant à L^p,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\varphi_\varepsilon \star f - f\|_{L^p} = 0.$$

Remarque importante Ce théorème ne s'applique pas pour $p = +\infty$.

Exercice 5.4.1 *Considérer pour f la fonction de Heavyside H (la fonction caractérisique des réels positifs) et pour φ une fonction continue à support compact, paire et d'intégrale 1. Démontrer alors que la famille $\|\varphi_\varepsilon \star f - f\|_{L^p}$ ne tend pas vers 0 lorsque ε tend vers 0.*

Démonstration du théorème 5.4.5 Soient f une fonction de L^p et η un réel strictement positif. Il existe deux fonctions g et ψ continues à support compact telles que

$$\|f-g\|_{L^p} < \frac{\eta}{8\|\varphi\|_{L^1}} \quad \text{et} \quad \|\varphi-\psi\|_{L^1} < \frac{\eta}{8\|g\|_{L^p}+1}.$$

Comme la fonction φ, donc aussi la fonction φ_ε, est d'intégrale 1, on peut écrire que

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon \star f - f &= \varphi_\varepsilon \star f - \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)dx\Big) f \\
&= \varphi_\varepsilon \star (f-g) - \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)dx\Big)(f-g) \\
&\quad + (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\star g - \Big(\int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_\varepsilon-\psi_\varepsilon)(x)dx\Big) g \\
&\quad + \psi_\varepsilon \star g - \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \psi_\varepsilon(x)dx\Big) g.
\end{aligned}$$

Mais, vu le choix de la fonction g, on a

$$\|\varphi_\varepsilon \star (f-g)\|_{L^p} < \frac{\eta}{8} \quad \text{et} \quad \Big\|\Big(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)dx\Big)(f-g)\Big\|_{L^p} < \frac{\eta}{8}.$$

Vu le choix de ψ, on a

$$\|(\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\star g\|_{L^p} < \frac{\eta}{8} \quad \text{et} \quad \Big\|\Big(\int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_\varepsilon-\psi_\varepsilon)(x)dx\Big) g\Big\|_{L^p} < \frac{\eta}{8}.$$

Finalement, on a

$$\|\varphi_\varepsilon \star f - f\|_{L^p} < \frac{\eta}{2} + \Big\|\psi_\varepsilon \star g - \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \psi_\varepsilon(x)dx\Big) g\Big\|_{L^p}.$$

Mais, par définition de la convolution, on a, grâce à un changement de variables,

$$(\psi_\varepsilon \star g)(x) - \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \psi_\varepsilon(x)dx\Big) g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} \psi(z)(g(x-\varepsilon z) - g(x))dz.$$

On en déduit immédiatement que

$$|(\psi_\varepsilon \star g)(x) - \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \psi_\varepsilon(x)dx\Big) g(x)| \le \int_{\mathbf{R}^d} |\psi(z)|\,|g(x-\varepsilon z) - g(x)|dz.$$

La fonction g est uniformément continue, donc, pour tout η, il existe un α strictement positif tel que

$$|y-y'| \le \alpha \Rightarrow |g(y)-g(y')| < \frac{\eta}{2\|\psi\|_{L^1}|\operatorname{Supp}\ g + B(0,\varepsilon R)|^{\frac{1}{p}}+1}.$$

Posons

$$R \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{z\in \operatorname{Supp}\ \psi} |z|.$$

On a alors

$$\varepsilon < \frac{\alpha}{R} \Rightarrow \|\psi_\varepsilon \star g - g\|_{L^\infty} \le \frac{\eta}{2|\operatorname{Supp}\ g + B(0,\varepsilon R)|^{\frac{1}{p}}}.$$

D'où l'on déduit que

$$\|\varphi_\varepsilon \star f - f\|_{L^p} < \eta.$$

Le théorème est ainsi démontré

Comme nous allons le voir, cette propriété est extrêmement importante pour la régularisation des fonctions. En effet, le théorème de dérivation sous l'intégrale assure que si φ est une fonction indéfiniment différentiable à support compact, alors la fonction $\varphi_\varepsilon \star f$ l'est aussi. Ainsi l'on aura approximé toute fonction de L^p, pour p réel, par une fonction indéfiniment différentiable à support compact. L'existence de telles fonctions doit être démontrée.

Proposition 5.4.1 *Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x(x-1)}} \quad si \quad x \in [0,1] \quad et \quad f(x) = 0 \quad sinon.$$

Cette fonction est indéfiniment différentiable à support compact.

Démonstration de la proposition 5.4.5 Il suffit d'observer que

$$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{k+1}(1-x)^{k+1}} e^{\frac{1}{x(x-1)}},$$

où P_k est un polynôme de degré δ_k. Les détails sont laissés en exercice.

Remarque Les familles (φ_ε) sont appelées suites régularisantes ou bien approximations de l'identité.

Corollaire 5.4.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$, on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact inclus dans Ω. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est différent de $\{0\}$.*

Démonstration du corollaire 5.4.1 Il suffit pour cela de considérer $\varphi(x) = f(|x|)$ où f est la fonction définie dans la proposition 5.4.1 ci-dessus et de faire une translation et une homothétie.

Corollaire 5.4.2 *Pour tout réel $p \leq 1$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ est dense dans L^p*

Démonstration du corollaire 5.4.2 D'après le corollaire 5.4.1 il existe une fonction φ indéfiniment différentiable à support compact d'intégrale 1. Considérons la famille (φ_ε)

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Considérons alors une fonction f de L^p. On peut trouver une fonction g de L^p à support compact telle g soit arbitrairement proche de f dans L^p. posons

$$g_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \star g.$$

D'après la proposition 5.4.4, la fonction g_ε est à support compact. Comme la fonction φ, donc aussi la fonction φ_ε est indéfiniment différentiable, le théorème de dérivation sous l'intégrale assure g_ε est indéfiniment différentiable à support compact. D'où le corollaire.

Corollaire 5.4.3 *Pour tout réel p, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration du corollaire 5.4.3 Soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de exhaustive de compacts (voir la définition 1.5.1 page 29). On pose alors $f_n \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{1}_{K_n} f$. D'après le théorème 5.1.3, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Posons alors $f_{n,\varepsilon} \overset{\text{déf}}{=} \varphi_\varepsilon \star f_n$. Cette fonction est indéfiniment différentiable. De plus, son support est le compact $K_n + B(0,\varepsilon)$, c'est-à-dire l'ensemble des points à distance au plus ε de K_n. D'après la proposition 1.5.1 page 28, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_n$, alors le compact $K_n + B(0,\varepsilon)$ est inclus dans Ω. D'où le corollaire.

Corollaire 5.4.4 *Soit K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$; il existe une fonction ψ de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que ψ vaille 1 au voisinage de K.*

Démonstration du corrolaire 5.4.4 Soit δ un réel strictement positif tel que, si

$$K_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega \,/\, d(x,K) \leq 2r\},$$

alors $K_{2\delta}$ soit inclus dans Ω. (Un tel réel existe d'après le théorème 1.5.1 page 28). On considère alors une approximation de l'identité $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ et l'on pose

$$\psi_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\varepsilon \star \mathbf{1}_{K_\delta}(x) = \int_{K_\delta} \varphi_\varepsilon(x-y)dy.$$

Il existe une constante C telle que

$$x \notin K_\delta + B(0, C\varepsilon) \Longrightarrow \varphi_\varepsilon \star 1_{K_\delta}(x) = 0.$$

Donc, si $C\varepsilon < \delta$, alors $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ car $K_{2\delta} \subset \Omega$. Enfin, si $x \in K_{\delta - C\varepsilon}$ (qui est non vide puisque $\delta < C\varepsilon$), alors, pour tout $y \in B_{x,C\varepsilon}$, $y \in K_\delta$. Ainso donc

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon \star \mathbf{1}_{K_\delta}(x) &= \int_{\mathbf{K}_\delta} \varphi_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y)dy \\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où le corollaire.

5.5 Dualité entre L^p et $L^{p'}$

Le théorème principal de cette section est le théorème suivant, qui dit comment l'on peut représenter une forme linéaire continue sur les espaces L^p lorque p est réel.

Théorème 5.5.1 *Soient p un réel supérieur à 1 et B la forme bilinéaire définie par*

$$B \left\{ \begin{array}{ccc} L^{p'} \times L^p & \to & \mathbf{K} \\ (g,f) & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x). \end{array} \right.$$

Alors la forme bilinéaire B identifie le dual de $L^p(\Omega, d\mu)$ à $L^{p'}(\Omega, d\mu)$.

Démonstration du théorème 5.5.1 Nous avons déjà démontrer ce théorème dans le cas où $p = 2$ au chapitre 4 sur les espaces de Hilbert. L'espace Ω est supposé être réunion dénombrable d'espace compacts K_n. Soit Φ une forme linéaire sur $L^p(\Omega, d\mu)$ et K un compact quelconque de Ω, on désigne par Φ_K la restriction de Φ à K c'est-à-dire la forme linéaire

$$\langle \Phi_K, f \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \Phi, \mathbf{1}_K f \rangle.$$

Nous allons maintenant travailler dans l'espace $L^p(K, d\mu)$. Considérons une forme linéaire Φ sur $L^p(K, d\mu)$. Supposons démontré qu'il existe une unique fonction g_K sur K telle que l'on ait

$$\forall f \in L^p(K, d\mu)\,,\ \langle \Phi, f \rangle = B(g_K, f) = \int_K g_K(x)f(x)d\mu(x) \tag{5.9}$$

et telle que l'on ait

$$\|g_K\|_{L^{p'}} = \|\Phi_K\|_{(L^p)'}. \tag{5.10}$$

On considère alors une suite croissante de compacts $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ recouvrant Ω. Il existe donc une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall f \in L^p(K_n, d\mu)\,,\ \langle \Phi_{K_n}, f\rangle = B(g_n, f).$$

D'après le lemme 5.2.1, on sait que

$$g_n \in L^{p'} \quad \text{et que} \quad \|g_n\|_{L^{p'}} = \|\Phi_{K_n}\|_{(L^p)'} \leq \|\Phi\|_{(L^p)'}$$

De plus, l'unicité de la fonction g_n vérifiant (5.9) et (5.10) assure que si $m \geq n$, alors

$$\mathbf{1}_{K_n} g_m = g_n$$

car la fonction $\mathbf{1}_{K_n} g_m$ vérifie les relations (5.9) et (5.10) pour la forme linéaire Φ_{K_n}. La suite $(|g_n(x)|^{p'})_{n\in\mathbf{N}}$ est donc une suite croissante de fonctions telle que

$$\sup_n \int_\Omega |g_n(x)|^{p'} d\mu(x) \leq \|\Phi\|^{p'}_{(L^p)'}.$$

Le théorème de convergence monotone assure que la fonction

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \in L^{p'} \quad \text{et que} \quad \|g\|_{L^{p'}} \leq \|\Phi\|_{(L^p)'}.$$

Le lemme 5.2.1 assure que $\|g\|_{L^{p'}} = \|\Phi\|_{(L^p)'}$. De plus, pour toute fonction f de L^p et pour tout entier n, on a

$$\langle \Phi, \mathbf{1}_{K_n} f\rangle = \int_\Omega g(x)\mathbf{1}_{K_n} f(x) d\mu(x).$$

Le théorème de convergence dominée assure alors la conclusion de la démonstration. Mais il nous reste à démontrer les relations (5.9) et (5.10).

Démontrons les tout d'abord dans le cas où p est compris entre 1 et 2. D'après l'inégalité de Hölder, on sait que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p} &= \left(\int_K |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_K |f(x)|^{p\frac{2}{p}} d\mu(x)\right)^{\frac{p}{2}\times\frac{1}{p}} \mu(K)^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{p}{2}\right)} \\
&\leq \|f\|_{L^2}\mu(K)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la forme linéaire Φ apparaît comme une forme linéaire continue sur L^2. Il existe donc une fonction g appartenant à L^2 telle que

$$\forall f \in L^2\,,\ \langle \Phi, f\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x).$$

On en déduit que, pour toute fonction f de L^2, on a

$$\int_K |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|\Phi\|_{(L^p)'}\|f\|_{L^p}.$$

Mais, d'après le corollaire 5.3.1, l'espace $L^\infty \cap L^p$ est dense dans L^p. Comme ici p est compris entre 1 et 2 et que K est compact, L^2 est dense dans L^p. D'après le lemme 5.2.1, on en déduit que g appartient à L^p et que $\|g\|_{L^{p'}} = \|\Phi\|_{(L^p)'}$. D'où les relations (5.9) et (5.10) dans ce cas.

Supposons maintenant p supérieur à 2. Utilisons l'exercice 5.3.2 et posons

$$\langle \Phi_n, f \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \Phi, P_n f \rangle.$$

D'après l'exercice 5.3.2, on a

$$\forall p \in [1, \infty[\,,\ \forall f \in L^p\,,\ \lim_{n\to\infty} \|P_n f - f\|_{L^p} = 0.$$

Donc, on a, pour tout f appartenant à L^p,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Phi_n, f \rangle = \langle \Phi, f \rangle. \tag{5.11}$$

En d'autres termes, la suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend $\star$-faiblement vers Φ. D'après l'exercice 5.3.2, on sait que Φ_n est une forme linéaire continue sur L^1. Dans le théorème 5.5.1 dans le cas où $p = 1$ (nous venons de le démontrer!), il existe une fonction g_n de L^∞ telle que

$$\forall f \in L^1\,,\ \langle \Phi, P_n f \rangle = \int_K g_n(x) f(x) d\mu(x). \tag{5.12}$$

De plus, on sait, toujours d'après l'exercice 5.3.2 que $P_n^2 = P_n$. D'où il vient que

$$\begin{aligned} \langle \Phi, P_n f \rangle &= \langle \Phi, P_n^2 f \rangle \\ &= \int_K g_n(x)(P_n f)(x) d\mu(x) \\ &= \int_K (P_n g_n)(x) f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Or, l'application vérifiant (5.12) est unique et donc $P_n g_n = g_n$. À nouveau d'après l'exercice 5.3.2, on sait que P_n est une application linéaire de L^p dans L^p de norme plus petite que 1. Donc, on a

$$\|\Phi_n\|_{(L^p)'} \leq \|\Phi\|_{(L^p)'}.$$

Donc, d'après le lemme 5.2.1, on a

$$\|g_n\|_{L^{p'}} \leq \|\Phi\|_{(L^p)'}. \tag{5.13}$$

Il s'agit de démontrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une fonction g en un sens convenable. Pour ce faire, on définit les deux suites $(g_{n,k})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r_{n,k})_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$g_{n,k} = \mathbf{1}_{(|g_n|\leq k)} g_n \quad \text{et} \quad r_{n,k} = \mathbf{1}_{(|g_n|>k)} g_n.$$

La suite $(g_{n,k})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de L^∞. Nous venons de voir que l'espace L^∞ s'identifie au dual de L^1. Grâce au théorème 3.3.2 de compacité $\star$-faible de la boule unité du dual d'un espace séparable, nous allons extraire, pour chaque k, une sous-suite $\star$-faiblement convergente, puis utiliser le procédé diagonal.

Il existe une fonction strictement croissante ϕ_1 de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et une fonction $\widetilde{g}_1$ telles que l'on ait

$$\liminf_{n\to\infty}{}^{\star}\, g_{\phi_1(n),1} = \widetilde{g}_1.$$

Supposons construite une suite finie $(\phi_j)_{1\leq j\leq p}$ de fonctions croissantes de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et une suite finie $(\widetilde{g}_j)_{1\leq j\leq p}$ de fonctions essentiellement bornées telles que l'on ait,

$$\forall q \leq p\,,\ \operatorname*{limf}_{n\to\infty}\star\, g_{\phi_1\circ\cdots\circ\phi_p(n),q} = \widetilde{g}_q.$$

En utilisant le théorème de compacité $\star$-faible de la boule unité du dual d'un espace séparable, il existe une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et une fonction $\widetilde{g}_{p+1}$ telles que l'on ait

$$\operatorname*{limf}_{n\to\infty}\star\, g_{\phi_1\circ\cdots\circ\phi_{p+1}(n),p+1} = \widetilde{g}_{p+1}.$$

Par récurrence, on construit ainsi deux suites $(\phi_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(\widetilde{g}_p)_{p\in\mathbf{N}}$ telles que l'on ait

$$\forall p \in \mathbf{N}\,,\ \forall q \leq p\,,\ \operatorname*{limf}_{n\to\infty}\star\, g_{\phi_1\circ\cdots\circ\phi_p(n),} = \widetilde{g}_q.$$

Posons maintenant $\psi(n) = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n(n)$. Nous avons déjà vu (au moins deux fois) que la fonction ψ est strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$. D'où il vient que,

$$\forall k \in \mathbf{N}\,,\ \operatorname*{limf}_{n\to\infty}\star\, g_{\psi(n),k} = \widetilde{g}_k.$$

On en déduit donc que, pour toute fonction f dans L^1, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_K g_{\psi(n),k}(x)f(x)d\mu(x) = \int_K \widetilde{g}_k(x)f(x)d\mu(x). \tag{5.14}$$

D'après (5.13) et par définition de $g_{n,k}$, on a

$$\|g_{\psi(n),k}\|_{L^{p'}} \leq \|\Phi\|_{(L^p)'}.$$

Ainsi donc, pour tout $f \in L^p$,

$$\int_K \widetilde{g}_k(x)f(x)d\mu(x) \leq \|\Phi\|_{(L^p)'}\|f\|_{L^p}.$$

Les deux dernières étapes de la démonstration consiste d'une part à démontrer que

$$\forall f \in L^p\,,\ \lim_{k\to\infty}\int_K \widetilde{g}_k(x)f(x)d\mu(x) = \langle\Phi, f\rangle \tag{5.15}$$

et d'autre part que la suite $(\widetilde{g}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de L^1. Comme la suite $(\widetilde{g}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^{p'}$ et que $L^\infty \cap L^p$ est dense dans L^p, il suffit de démontrer l'assertion (5.15) pour des fonctions f bornées. Écrivons que

$$\begin{aligned}\int_K \widetilde{g}_k(x)f(x)d\mu(x) - \langle\Phi, f\rangle &= \int_K (\widetilde{g}_k - g_{\psi(n),k})(x)f(x)d\mu(x)\\ &\quad - \int_K r_{\psi(n),k}(x)f(x)d\mu(x) + \int_K g_{\psi(n)}(x)f(x)d\mu(x) - \langle\Phi, f\rangle.\end{aligned}$$

Par définition de $r_{n,k}$, on a

$$\begin{aligned}\|r_{n,k}\|_{L^1} &= \int_{(|g_n|>k)} |g_n|d\mu(x)\\ &\leq k^{-(p'-1)}\int |g_n|^{p'}d\mu(x)\\ &\leq k^{-(p'-1)}\|g_n\|_{L^{p'}}^{p'}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

D'après (5.13), on a donc

$$\Big|\int_K \widetilde{g}_k(x)f(x)d\mu(x) - \langle \Phi, f\rangle\Big| \leq \int_K (\widetilde{g}_k - g_{\psi(n),k})(x)f(x)d\mu(x) + \Big|\int_K g_{\psi(n)}(x)f(x)d\mu(x) - \langle \Phi, f\rangle\Big| + k^{-(p'-1)}\|\Phi\|_{(L^p)'}\|f\|_{L^\infty}.$$

L'inégalité ci-dessus étant valable pour tout n, on a d'après les assertions (5.11) et (5.14), on en déduit, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini

$$\Big|\int_K \widetilde{g}_k(x)f(x)d\mu(x) - \langle \Phi, f\rangle\Big| \leq k^{-(p'-1)}\|\Phi\|_{(L^p)'}\|f\|_{L^\infty}.$$

D'où l'assertion (5.15).

Pour démontrer que la suite $(\widetilde{g}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^1, écrivons que, pour toute fonction f dans L^∞ et pour tout entier n, on a

$$\Big|\int_K (\widetilde{g}_k(x) - \widetilde{g}_{k+\ell}(x))f(x)d\mu(x)\Big| \leq + \int_K |r_{\psi(n),k} - r_{\psi(n),k+\ell}(x)|\,|f(x)|d\mu(x) + \Big|\int_K (\widetilde{g}_k - g_{\psi(n),k})(x)f(x)d\mu(x)\Big| + \Big|\int_K (\widetilde{g}_{k+\ell} - g_{\psi(n),k+\ell})(x)f(x)d\mu(x)\Big|.$$

D'après (5.14), on a, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini,

$$\Big|\int_K (\widetilde{g}_k(x) - \widetilde{g}_{k+\ell}(x))f(x)d\mu(x)\Big| \leq \int_K |r_{\psi(n),k} - r_{\psi(n),k+\ell}(x)|\,|f(x)|d\mu(x).$$

En utilisant (5.16), on trouve que

$$\Big|\int_K (\widetilde{g}_k(x) - \widetilde{g}_{k+\ell}(x))f(x)d\mu(x)\Big| \leq k^{-(p'-1)}\|\Phi\|_{L^{p'}}^{p'}\|f\|_{L^\infty}.$$

D'après le lemme 5.2.1, on en déduit que

$$\|\widetilde{g}_k - \widetilde{g}_{k+\ell}\|_{L^1} \leq k^{-(p'-1)}\|\Phi\|_{L^{p'}}^{p'}.$$

Donc la suite $(\widetilde{g}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans L^1. D'où le théorème.

Chapitre 6

Transformation de Fourier des fonctions

6.1 Définition sur l'espace L^1.

Définition 6.1.1 *Soit f une fonction de $L^1(\mathbf{R}^d)$. On appelle transformée de Fourier de f et l'on note $\widehat{f}$ ou bien $\mathcal{F}(f)$ la fonction définie par*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^d & \to & \mathbf{C} \\ \xi & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)} f(x) dx. \end{array} \right.$$

Remarquons dès maintenant que

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x) dx.$$

Il est clair que la transformée de Fourier d'une fonction de L^1 est une fonction bornée. Mais, nous avons le théorème plus précis suivant.

Théorème 6.1.1 *L'application $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $L^1(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ dans l'espace $C_0(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ des fonctions continues nulles à l'infini.*

Démonstration du théorème 6.1.1 Le corollaire 5.4.2 affirme en particulier que les fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur $\mathbf{R}^d$ sont denses dans l'espace L^1. Comme il est évident que

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}, \tag{6.1}$$

il suffit de démontrer que

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)\,, \quad \lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0 \tag{6.2}$$

pour assurer le théorème puisque l'espace $C_0(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ est un sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$.

Pour démontrer (6.2), nous allons utiliser une idée que nous reverrons fréquemment: la régularité d'une fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier sont indissolublement liées. En effet, remarquons que

$$(1 + |\xi|^2) e^{-i(x|\xi)} = (\mathrm{Id} - \Delta) e^{-i(x|\xi)} \quad \text{avec} \quad \Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Ainsi donc, il vient

$$(1+|\xi|^2)\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} \left((\mathrm{Id}-\Delta)e^{-i(\cdot|\xi)}\right)(x)f(x)dx.$$

La fonction f est indéfiniment différentiable à support compact; on peut donc intégrer par parties dans l'intégrale ci-dessus. On trouve alors que

$$\begin{aligned}(1+|\xi|^2)\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)})(\mathrm{Id}-\Delta)f(x)dx \\ &= \mathcal{F}\left((\mathrm{Id}-\Delta)f\right).\end{aligned}$$

Mais la fonction f étant indéfiniment différentiable à support compact, la fonction $(\mathrm{Id}-\Delta)f$ appartient à l'espace L^1. Ainsi donc, on a

$$|(1+|\xi|^2)\widehat{f}(\xi)| \leq \|(\mathrm{Id}-\Delta)f\|_{L^1}.$$

Ceci implique l'assertion (6.2); le théorème est donc démontré.

Exercice 6.1.1 *Démontrez par une méthode analogue que, si f est une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur $\mathbf{R}^d$, alors, pour tout entier N, il existe une constante C telle que*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{-N}.$$

La proposition suivante décrit partiellement les rapports entre transformée de Fourier et convolution.

Proposition 6.1.1 *Soient f et g deux fonctions de L^1. On a*

$$\mathcal{F}(f \star g) = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

Démonstration de la proposition 6.1.1 La fonction F_ξ définie de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ par

$$F_\xi(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{-i(x|\xi)}f(x-y)g(y) = e^{-i(x-y|\xi)}f(x-y)e^{-i(y|\xi)}g(y)$$

est, pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}^d$, une fonction de $L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. Le théorème de Fubini assure que

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)dy\right)dx = \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x-y|\xi)}f(x-y)dx\right)e^{-i(y|\xi)}g(y)dy,$$

ce qui signife exactement que la transformée de Fourier du produit de convolution est la produit (usuel) des transformées de Fourier.

Nous allons maintenant examiner l'influence des dilatations sur la transformée de Fourier.

Proposition 6.1.2 *Soient f une fonction de $L^1(\mathbf{R}^d)$ et λ un réel strictement positif. On a alors*

$$\mathcal{F}(f(\lambda\cdot))(\xi) = \lambda^{-d}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Démonstration de la proposition 6.1.2 Il suffit de faire le changement de variables $y = \lambda x$ dans l'intégrale définissant la transformée de Fourier, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(\lambda\cdot))(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)} f(\lambda x)dx \\ &= \lambda^{-d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(\frac{y}{\lambda}|\xi)} f(y)dy \\ &= \lambda^{-d}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

D'où la proposition.

Proposition 6.1.3 *Soit a un réel strictement positif. On a alors*

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|\cdot|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Démonstration de la proposition 6.1.3 Commençons par la dimension $d = 1$ et posons

$$g \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}e^{-x^2}dx.$$

La fonction g est bien évidemment dérivable et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}g'(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^d} -ixe^{-ix\xi}e^{-x^2}dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} ie^{-ix\xi}\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} -i\frac{d}{dx}\left(e^{-ix\xi}\right)e^{-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} i^2\xi e^{-ix\xi}e^{-x^2}dx \\ &= -\frac{\xi}{2}g(\xi).\end{aligned}$$

L'équation différentielle est aisée à résoudre. On a

$$g(\xi) = g(0)e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Il est classique que

$$g(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

La proposition 6.1.2 assure alors le résultat en dimension 1. En dimension d quelconque, il suffit d'observer que

$$e^{-|x|^2} = \prod_{j=1}^{d} e^{-x_j^2}$$

et que, si les f_j sont des fonctions de $L^1(\mathbf{R})$, on a

$$\mathcal{F}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d) = \widehat{f}_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{f}_d.$$

En appliquant à nouveau la proposition 6.1.2, on conclue la démonstration de cette proposition.

6.2 La formule d'inversion et l'extension à L^2

Cette section contient le théorème absolument fondamental suivant.

Théorème 6.2.1 (d'inversion de Fourier) *Soit f une fonction de $L^1(\mathbf{R}^d)$ telle que $\widehat{f}$ soit aussi dans L^1. On a alors*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x|\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{6.3}$$

Remarque On peut écrire ce résultat sous la forme

$$\mathcal{F}^2 f = (2\pi)^d \check{f} \quad \text{avec} \quad \check{f}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(-x) \tag{6.4}$$

pour une fonction f telle que f et $\widehat{f}$ sont dans L^1. Ce théorème signifie qu'une fonction f dans L^1 telle que $\widehat{f}$ soit aussi dans L^1 (par exemple une fonction indéfiniment différentiable à support compact comme le montre l'exercice 6.1.1) s'écrit comme une superposition d'oscillations –les fonctions $e^{i(x|\xi)}$–, la transformée de Fourier apparaissant alors comme la densité d'oscillations.

Démonstration du théorème 6.2.1 D'après la proposition 6.1.3, le théorème est déjà démontré pour les fonctions gaussiennes. Nous allons bien sûr utiliser ce résultat. Posons

$$G(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^{-\frac{d}{2}} e^{-|x|^2} \quad \text{et} \quad G_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

La fonction G est une fonction positive d'intégrale 1. D'après le théorème 5.4.5, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|G_\varepsilon \star f - f\|_{L^1} = 0. \tag{6.5}$$

De plus, la proposition 6.1.3 nous dit que

$$|\widehat{G}_\varepsilon(\xi)| \leq 1 \quad \text{et que} \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^d, \ \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{G}_\varepsilon(\xi) = 1.$$

D'après le théorème de la convergence dominée, on a

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x|\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x|\xi)} \widehat{G}_\varepsilon(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{6.6}$$

Comme la fonction f appartient à L^1, on sait que $\widehat{G}_\varepsilon \otimes f$ est une fonction de $L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x|\xi)} \widehat{G}_\varepsilon(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} e^{i(x|\xi)} \widehat{G}_\varepsilon(\xi) e^{-i(y|\xi)} f(y) d\xi dy \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x-y|\xi)} \widehat{G}_\varepsilon(\xi) d\xi \right) f(y) dy \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(y-x|\xi)} \widehat{G}_\varepsilon(\xi) d\xi \right) f(y) dy \\
&= (G_\varepsilon \star f)(x).
\end{aligned}$$

Les prédicats (6.5) et (6.6) assurent alors le théorème.

Ce théorème a de très importantes conséquences. Tout d'abord, il permet de démontrer que la transformation de Fourier est injective sur L^1.

Proposition 6.2.1 *Si $f \in L^1$ et si $\widehat{f} = 0$, alors $f = 0$.*

Démonstration de la proposition 6.2.1 Soit f une fonction de L^1 telle que $\widehat{f} = 0$. On considère une fonction χ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ d'intégrale 1. On introduit $\chi_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon^{-d}\chi(\varepsilon^{-1}\cdot)$. D'après la proposition 6.1.1, on a

$$\mathcal{F}(\chi_\varepsilon \star f)(\xi) = \widehat{\chi}(\varepsilon\xi)\widehat{f}(\xi).$$

L'exercice 6.1.1 implique en particulier que $\mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathbf{R}^d))$ est inclus dans $L^1(\mathbf{R}^d)$. D'après le théorème 6.2.1, on a donc $\chi_\varepsilon \star f = 0$. Le théorème 5.4.5 page 83 implique alors que $f = 0$. D'où la proposition.

Le théorème suivant est d'une importance capitale.

Théorème 6.2.2 (de Fourier-Plancherel) *L'application $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ se prolonge de $L^1 \cap L^2$ à L^2 en une isométrie surjective de L^2 sur L^2.*

Démonstration du théorème 6.2.2 Compte tenu du théorème 6.2.1 d'inversion de Fourier, la démonstration du présent théorème repose sur le très simple, mais crucial, lemme suivant.

Lemme 6.2.1 *Soient f et φ deux fonctions de L^1; on a*

$$\int_{\mathbf{R}^d} \widehat{f}(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx.$$

Démonstration du lemme 6.2.1 Observons que la fonction de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$(x, y) \mapsto e^{-i(x|y)}f(x)\varphi(y)$$

est intégrable sur $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$. Le théorème de Fubini assure alors que

$$\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|y)}f(x)dx\right)\varphi(y)dy = \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|y)}\varphi(y)dy\right)f(x)dx,$$

ce qui est exactement la conclusion du lemme.

Revenons à la démonstration du théorème de Fourier-Plancherel. Soit f une fonction indéfiniment différentiable à support compact de $\mathbf{R}^d$. Appliquons le lemme 6.2.1 au couple de fonctions $(f, \overline{\widehat{f}})$. On trouve alors que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\mathcal{F}\left(\overline{\widehat{f}}\right)(x)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}f)}\check{}(x)dx \\
&= (2\pi)^d \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{\check{f}}(x)dx \\
&= (2\pi)^d \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Donc la transformée de Fourier se prolonge en une isométrie de L^2 sur L^2. Il reste à démontrer qu'elle est surjective. Son image est bien sûr fermée puisque c'est une isométrie. De plus, d'après la formule d'inversion de Fourier et l'exercice 6.1.1, l'image de L^2 par $\mathcal{F}$ contient l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à support compact qui est dense dans L^2. D'où le théorème.

Chapitre 7

Un exemple de problème de minimisation

Le but de ce court chapitre est de mettre en évidence la nécessité de l'introduction de nouveaux espaces de fonctions et d'un nouveau concept de dérivation. Ceci apparaît lorsque l'on essaye de résoudre le problème de minimisation que voici.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^d$, et f une fonction de $L^2(\Omega)$, on considère la fonctionnelle F définie par

$$F \left\{ \begin{array}{ccc} C_0^1(\Omega) & \to & \mathbf{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{2}\|\nabla u(x)\|_{L^2}^2 - \int_\Omega f(x)u(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \int_\Omega |\partial_j u(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx \end{array} \right.$$

où $C_0^1(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions continûment différentiables sur Ω et à support dans un compact de Ω. On cherche s'il existe un minimum pour F c'est-à-dire s'il existe une fonction u de $C_0^1(\Omega)$ telle que

$$F(u) = \inf_{v \in C_0^1(\Omega)} F(v).$$

Remarquons que F est une fonction continue (exercice: démontrez-le!).

7.1 Une approche classique du problème

Il s'agit tout d'abord de démontrer que F est minorée. Ceci repose sur l'inégalité de Poincaré.

Proposition 7.1.1 (Inégalité de Poincaré) *Il existe une constante C (dépendant de Ω) telle que,*

$$\forall u \in C_0^1(\Omega)\,,\ \|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

Démonstration de la proposition 7.1.1 Soit u une fonction de $C_0^1(\Omega)$. Observons tout d'abord que la fonction définie sur $\mathbf{R}^d$ qui vaut 0 en dehors de Ω et coïncide avec u sur Ω est une fonction C^1 à support compact sur $\mathbf{R}^d$ que l'on désigne toujours par u dans le but de simplifer les notations. Écrivons que

$$\forall (x_1, x') \in \Omega\,,\ u(x_1, x') = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(y_1, x')dy_1.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall (x_1, x') \in \Omega\,,\ |u(x_1, x')|^2 \leq \delta(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_1 u(y_1, x')|^2 dy_1.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à la variable $x = (x_1, x')$, on trouve que

$$\int_\Omega |u(x_1, x')|^2 dx \leq \delta(\Omega)^2 \int_\Omega |\partial_1 u(y_1, x')|^2 dy_1 dx'.$$

L'inégalité de Poincaré est ainsi démontrée.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 7.1.1 *La fonctionnelle F est minorée. De plus, on a*

$$\forall A > 0\,,\ \exists B\ /\ \|\nabla u\|_{L^2} \geq B \Longrightarrow F(u) \geq A. \tag{7.1}$$

Démonstration du corollaire 7.1.1 Il suffit d'écrire que, d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - C\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|_{L^2} - C\|f\|_{L^2}\right)^2 - \frac{1}{2}C^2\|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Donc $F(u)$ est minorée. De plus, si A est un réel strictement positif, en posant

$$B = \left(2A + C^2\|f\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} + C\|f\|_{L^2}^2,$$

on conclut la démonstration du corollaire.

On considère maintenant une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $C_0^1(\Omega)$ minimisante, c'est-à-dire une suite telle que

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = m = \inf_{v\in C_0^1(\Omega)} F(v).$$

Comme on cherche à savoir si le minimum est atteint, on cherche une limite à cette suite. L'inégalité (7.1) du corrolaire 7.1.1 implique que la suite $(\|\nabla u_n\|_{L^2})_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. L'inégalité de Poincaré implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. Ainsi donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\partial_j u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont des suites bornées de L^2. Le théorème du compacité faible 4.3.3 page 66 implique l'existence d'une fonction u et de fonctions $u^{(j)}$ telle que, après extraction, on ait

$$\operatorname*{limf}_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{et} \quad \operatorname*{limf}_{n\to\infty} \partial_j u_n = u^{(j)}.$$

Supposons un instant que u soit une fonction de $C_0^1(\Omega)$ et considérons une fonction φ de $C_0^1(\Omega)$. Par définition de la convergence faible dans un espace de Hilbert, on a

$$\int_\Omega u^{(j)}(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \partial_j u_n(x)\varphi(x)dx.$$

Les fonctions u_n et φ étant des fonctions de $C_0^1(\Omega)$, on a, par intégration par parties,

$$\int_\Omega u^{(j)}(x)\varphi(x)dx = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\partial_j\varphi(x)dx.$$

À nouveau d'après la définition de la convergence faible dans L^2, on en déduit que

$$\int_\Omega u^{(j)}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx.$$

D'après le corollaire 5.4.3 page 85, on sait que $C_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Ainsi donc, nous avons $u^{(j)} = \partial_j u$.

Il est malheureusement faux que u soit toujours de classe C^1. Cependant, le calcul ci-dessus met en lumière un lien entre les dérivées de u et les fonctions $u^{(j)}$. Ce lien va être fondé mathématiquement par la section suivante.

7.2 Le concept de quasi-dérivée

Voici ce dont il s'agit.

Définition 7.2.1 *Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que u admet une quasi-dérivée partielle dans la direction j si et seulement si il existe une constante C telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,,\ \Big|\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx\Big| \leq C\|\varphi\|_{L^2}$$

Remarque fondamentale D'après le théorème 5.3.1 page 77, l'espace $C_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Le théorème de prolongement 2.2.2 page 35 implique que l'on peut prolonger la forme linéaire

$$\ell_j \left\{ \begin{array}{ccc} C_0^1(\Omega) & \to & \mathbf{R} \\ \varphi & \mapsto & -\displaystyle\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx. \end{array} \right.$$

à l'espace $L^2(\Omega)$ tout entier. Désignons par $\widetilde{\ell}_j$ cette forme linéaire. Le théorème 4.3.1 page 64 de représentation de Riesz assure l'existence d'une fonction $u^{(j)}$ de L^2 telle que

$$\forall f \in L^2(\Omega)\,,\ \int_\Omega u^{(j)}(x)f(x)dx = \langle \widetilde{\ell}_j, f\rangle.$$

En particulier pour $f = \varphi \in C_0^1(\Omega)$, ceci donne

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega u^{(j)}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx.$$

On peut alors donner une définition plus complète de la quasi-dérivée.

Définition 7.2.2 *Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que u admet une quasi-dérivée partielle dans la direction j si et seulement si il existe une constante C telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,,\ \Big|\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx\Big| \leq C\|\varphi\|_{L^2}$$

De plus, la fonction $u^{(j)}$ de $L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega u^{(j)}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx.$$

est appelée la quasi-dérivée de u dans la $j$ième direction.

Exercice 7.2.1 *Soit $\Omega =]-1,1[$. On considère la fonction $u(x) = |x|^\alpha$ avec $\alpha \in]1/2,1[$. Démontrer que cette fonction admet une quasi-dérivée et calculer cette quasi-dérivée.*

La proposition suivante monte que l'on a bien généralisé le concept de dérivées tout au moins en ce qui concerne la dérivation des fonctions C^1.

Proposition 7.2.1 *Si $u \in C_0^1(\Omega)$, alors u admet des quasi-dérivées dans toutes les directions et les quasi-dérivées coïncident avec les dérivées partielles.*

Démonstration de la proposition 7.2.1 Par intégration par parties et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx\Big| &= \Big|\int_\Omega \partial_j u(x)\varphi(x)dx\Big| \\ &\leq \|\partial_j u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq C\|\partial_j u\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Soit $u^{(j)}$ la $j$ième quasi-dérivée de u. Par définition, cette fonction de $L^2(\Omega)$ vérifie

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega u^{(j)}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx.$$

De plus, par intégration par parties, on a

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega \partial_j u(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx.$$

Ceci implique alors que

$$\int_\Omega \left(\partial_j u - u^{(j)}\right)(x)\varphi(x)dx = 0$$

L'espace $C_0^1(\Omega)$ étant dense dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que $u^{(j)} = \partial_j u$. D'où la proposition.

Notation Dorénavant, la quasi-dérivée de u dans la $j$ième direction sera notée $\partial_j u$.

7.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Nous allons dans cette section introduire l'espace de fonctions adapté au problème de minimisation introduit au début de ce chapitre.

Définition 7.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'espace des fonctions u de $L^2(\Omega)$ telles qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $C_0^1(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

et les suites $(\partial_j u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

Les propriétés de cet espace sont décrites par les propositions suivantes.

Proposition 7.3.1 *Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors u admet des quasi-dérivées dans toutes les directions.*

Démonstration de la proposition 7.3.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $C_0^1(\Omega)$ qui converge en norme $L^2(\Omega)$ vers u et telles que les suites $(\partial_j u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soient de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. L'espace $L^2(\Omega)$ étant complet, il existe une fonction $u^{(j)}$ de $L^2(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|\partial_j u_n - u^{(j)}\|_{L^2} = 0.$$

On peut alors écrire, grâce à une intégration par parties, que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx &= -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(x)\partial_j\varphi(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \partial_j u_n(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega u^{(j)}(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Ceci démontre la proposition.

Proposition 7.3.2 *Muni de la norme définie par*

$$N(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration de la proposition 7.3.2 Le fait que N soit une norme associée au produit scalaire

$$(u|v) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{j=1}^d \int_\Omega \partial_j u(x)\partial_j v(x)dx$$

est un exercice facile laissé au lecteur. Démontrons que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est complet. Considérons une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. L'espace $L^2(\Omega)$ étant complet, il existe des fonctions u et $(u^{(j)})_{1\le j\le d}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|\partial_j u_n - u^{(j)}\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{7.2}$$

Par définition de $H_0^1(\Omega)$, pour tout n, il existe une fonction v_n de $C_0^1(\Omega)$ telle que

$$\|u_n - v_n\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|\partial_j u_n - \partial_j v_n\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{n}\cdot$$

Ainsi donc, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $C_0^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|\partial_j v_n - u^{(j)}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Donc $u \in H_0^1(\Omega)$ et $u^{(j)} = \partial_j u$. D'après (7.2), on a

$$\lim_{n\to\infty} N(u_n - u) = 0.$$

La proposition est alors démontrée.

Nous allons maintenant examiner les propriétés particulières de l'espace $H_0^1(\Omega)$ lorsque l'ouvert Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^d$.

Proposition 7.3.3 *Muni de la norme définie par*

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \stackrel{déf}{=} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \stackrel{déf}{=} \Big(\sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration de la proposition 7.3.3 Par rapport à la proposition 7.3.2, la seule chose à démontrer est que $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ est une norme et qu'elle est équivalente à N. Il suffit pour cela de démontrer que, pour toute u de $H_0^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $C_0^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|\partial_j u_n - \partial_j u\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

pour tout $j \in \{1, \cdots d\}$. L'inégalité de Poincaré implique que, pour tout n, on a

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par passage à la limite, on trouve que, pour toute fonction u de $H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

7.4 Retour au problème initial

Nous avons la proposition suivante, dont la démonstration est laissée en exercice.

Proposition 7.4.1 *La fonctionnelle F se prolonge continûment à l'espace $H_0^1(\Omega)$ tout entier et l'on a*

$$m = \inf_{v\in C_0^1(\Omega)} F(v) = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} F(v)$$

Le problème de minimisation posé rentre alors dans le cadre abstrait suivant: soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, ℓ une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$, peut-on trouver le minimum de F définie par

$$F_\ell \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathbf{R} \\ v & \mapsto & \dfrac{1}{2}\|v\|^2_{\mathcal{H}} - \langle \ell, v\rangle. \end{array} \right.$$

Posé ainsi, ce problème se résout aisément comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 7.4.1 *Soit F_ℓ la fonctionnelle définie ci-dessus. Il existe un unique $u \in \mathcal{H}$ tel que $F_\ell(u) = m = \inf_{v\in\mathcal{H}} F_\ell(v)$.*

Démonstration du théorème 7.4.1 D'après le théorème 4.3.1 page 64 de représentation de Riesz, il existe $u \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}\,,\ (u|v) = \langle \ell, v \rangle.$$

Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} F(u+h) &= \frac{1}{2}\|u+h\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \ell, u+h \rangle \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + (u|h) + \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \ell, u \rangle - \langle \ell, h \rangle \\ &= F(u) + \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

D'où le théorème.

Remarque Revenons au problème initial et supposons que la solution u trouvée soit en outre de classe C^2 sur Ω. Alors, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\sum_{j=1}^{d} \int_\Omega \partial_j u(x) \partial_j \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx.$$

Par intégration par parties, on trouve que

$$\sum_{j=1}^{d} \int_\Omega \partial_j u(x) \partial_j \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx = -\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x) dx.$$

Ceci qui signifie que $-\Delta u = f$ d'après le théorème 8.1.1 page 106.

Chapitre 8

Les distributions sur un ouvert de $\mathbf{R}^d$

8.1 Le concept de distribution

Nous appelerons dans toute la suite *fonction de test* sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C})$. De plus, si l'on considère un compact K de l'ouvert Ω, alors on désignera par $\mathcal{D}_K$ l'ensemble des fonctions de test à support dans K. Nous utiliserons aussi les notations suivantes.

Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbf{N}^d\times\mathbf{N}^d$, $x\in\mathbf{R}^d$ et $\phi\in C^\infty(\Omega)$, on note

$$|\alpha|\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^d\alpha_j\,,\ \alpha!\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{j=1}^d\alpha_j!\,,\ x^\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}\quad\text{et}\quad\partial^\alpha\varphi\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{j=1}^d\partial_j^{\alpha_j}\varphi.$$

On dit que α est inférieur ou égal à β, et l'on note $\beta\le\alpha$ si et seulement si, pour tou j, $\beta_j\le\alpha_j$. Avec ces notations, nous avons la formule du binôme et la formule de Leibnitz

$$(x+y)^\alpha=\sum_{\beta\le}C_\alpha^\beta x^\beta y^{\alpha-\beta}\quad\text{et}\quad\partial^\alpha(\phi\psi)=\sum_{\beta\le\alpha}C_\alpha^\beta\phi^\beta\psi^{\alpha-\beta}\quad\text{avec}\quad C_\beta^\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\,.$$

Remarquons que l'on a

$$C_\alpha^\beta=\prod_{j=1}^d\frac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j-\beta_j)!}=\prod_{j=1}^d C_{\alpha_j}^{\beta_j}.$$

Alors la formule de Taylor s'crit

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\sum_{1\le|\alpha|\le k}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(x)+\int_0^1\frac{(1-t)^k}{k!}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{k+1}\varphi(x+th)dt.$$

Définition 8.1.1 *On appelle distribution sur Ω toute forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que, pour tout compact K de Ω, il existe un entier N et une constante C tels que*

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}_K\,,\ |\langle T,\varphi\rangle|\le C\sup_{|\alpha|\le N}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}. \tag{8.1}$$

On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

Nous allons maintenant donner une définition de la convergence d'une suite de distributions.

Définition 8.1.2 *Soient $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et T une distribution sur Ω. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers T si et seulement si*

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ \lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle.$$

Nous allons maintenant donner des exemples et des illustrations de ces définitions. Il est légitime de commencer par se demander ce que deviennent les fonctions dans ce cadre. Il faut se restreindre aux fonctions localement sommables. En effet, si l'on veut donner un sens à l'intégrale

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

pour toute fonction de test φ, il faut bien que la fonction f soit dans $L^1(K)$ pour tout compact K de Ω. Grâce au théorème suivant, nous considérons toujours les fonctions $L^1_{loc}(\Omega)$ comme des distributions (voir la définition 5.3.1 page 77 des espaces $L^p_{loc}(\Omega)$).

Théorème 8.1.1 *Soit ι l'application définie par*

$$\iota\left\{\begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega)\\ f & \mapsto & \iota(f)\,:\varphi\mapsto\displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\end{array}\right.$$

est une injection linéaire. De plus, on a, pour tout compact K de Ω,

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}_K\,,\ |\langle\iota(f),\varphi\rangle|\le\|f\|_{L^1(K)}\|\varphi\|_{L^\infty}.$$

Démonstration du théorème 8.1.1 Soient f une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx=0.$$

Considérons un compact K de Ω. Nous allons démontrer que

$$\int_K|f(x)|dx=0$$

ce qui assurera le théorème. Soit δ un réel strictement positif tel que l'ensemble $K+\overline{B}(0,\delta)$ soit inclus dans Ω. On se donne une fonction χ de $\mathcal{D}(B(0,1))$ paire et d'intégrale 1 et on considère l'approximation de l'identité associée, c'est-à-dire la famille

$$\chi_\varepsilon(x)\stackrel{\text{déf}}{=}\varepsilon^{-d}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

On définit enfin la fonction g par

$$g(x)=\frac{\overline{f}(x)}{|f(x)|}\quad\text{si}\quad f(x)\neq0\quad\text{et 0 sinon.}$$

C'est une fonction de $L^\infty(\Omega)$. Si $\varepsilon\le\delta$, alors la fonction

$$\varphi_\varepsilon\stackrel{\text{déf}}{=}\chi_\varepsilon\star(\mathbf{1}_Kg)$$

est une fonction dont le support est inclus dans $K + \overline{B}(0,\delta)$ et est donc un compact de Ω. D'après le théorème 5.1.4 page 72 de dérivation sous l'intégrale, la fonction $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par hypothèse, on a

$$I_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \int_\Omega f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx = 0.$$

Pour tout ε strictement positif, la fonction

$$(x,y) \mapsto \varepsilon^{-d}\chi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\mathbf{1}_K(y)g(y)f(x) = \varepsilon^{-d}\chi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\mathbf{1}_K(y)g(y)f(x)\mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}(x)$$

est une fonction de $L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. En effet, la fonction est bornée en module par 1; d'après le théorème de Fubini 5.1.5 page 72,

$$\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \varepsilon^{-d}|\chi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)|\mathbf{1}_K(y)|g(y)|\mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}(x)|f(x)|dxdxy \leq \|\chi\|_{L^1}\|\mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}f\|_{L^1}.$$

Le théorème de Fubini-Tonelli 5.1.6 page 72 joint à la parité de la fonction χ assure alors que

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \chi_\varepsilon(x-y)\mathbf{1}_K(y)g(y)f(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \chi_\varepsilon(x-y)\mathbf{1}_K(y)g(y)\mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}(x)f(x)dxdy \\
&= \int\Big(\int \chi_\varepsilon(y-x)\mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}(x)f(x)dx\Big)\mathbf{1}_K(y)g(y)dy \\
&= \int(\chi_\varepsilon \star (\mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}f))(y)\mathbf{1}_K(y)g(y)dy.
\end{aligned}$$

Le théorème 5.4.5 page 83 dit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|(\chi_\varepsilon \star (\mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}f) - \mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}f\|_{L^1} = 0$$

Comme $g \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon \\
&= \int \mathbf{1}_{K+B(0,\delta)}(y)f(y)\mathbf{1}_K(y)g(y)dy \\
&= \int_K f(y)\frac{\overline{f}(y)}{|f(y)|}dy \\
&= \int_K |f(y)|dy.
\end{aligned}$$

D'où le théorème.

Remarques Dans toute la suite, on confondra une fonction f de $L^1_{loc}(\Omega)$ avec la distribution

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Lorsque l'on dira qu'une distribution T est une fonction, cela signifiera qu'il existe une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \langle T,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Le théorème montre bien que l'on a généralisé la notion de fonction.

La masse de Dirac Soit δ_0 la forme linéaire définie par

$$\delta_0 \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) & \to & \mathbf{C} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(0). \end{array} \right. \tag{8.2}$$

De toute évidence, cette forme linéaire est une distribution sur $\mathbf{R}^d$. Comme le dit la proposition suivante, la masse de Dirac est la limite des approximations de l'identité.

Proposition 8.1.1 *Soit χ une fonction $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ d'intégrale 1 et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels tendant vers 0. On pose*

$$\chi_{\varepsilon_n}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_n^{-d} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right).$$

Alors la suite $(\chi_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers δ_0 au sens des distributions.

Démonstration de la proposition 8.1.1 On peut écrire

$$\begin{aligned} |\langle \chi_{\varepsilon_n}, \varphi\rangle - \varphi(0)| &= \left| \int \chi_{\varepsilon_n}(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \int \chi_{\varepsilon_n}(x)dx \right| \\ &\leq \int |\chi_{\varepsilon_n}(x)|\, |\varphi(x) - \varphi(0)| dx. \end{aligned}$$

Comme la fonction χ est à support dans une boule de rayon R, la fonction χ_{ε_n} à support dans une boule de rayon $R\varepsilon_n$. D'où

$$|\langle \chi_{\varepsilon_n}, \varphi\rangle - \varphi(0)| \leq \|\chi\|_{L^1} \sup_{x\in B(0,R\varepsilon_n)} |\varphi(x) - \varphi(0)|.$$

La continuité de la fonction φ assure la conclusion de la démonstration.

Remarque Cette proposition admet une interprétation physique. Si les fonctions f_n sont vues comme des densités de masse, la "limite" doit être vue comme une masse ponctuelle portée par l'origine.

Le dipôle La forme linéaire δ_0' définie par

$$\delta_0' \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{C} \\ \varphi & \mapsto & -\varphi'(0). \end{array} \right. \tag{8.3}$$

est une distribution sur $\mathbf{R}^d$ (Exercice, vérifiez-le!).

Proposition 8.1.2 *Soit χ une fonction $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ d'intégrale 1 et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels tendant vers 0. On pose*

$$\chi_{\varepsilon_n}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_n^{-1} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right).$$

Alors la suite $((\chi_{\varepsilon_n})')_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers δ_0' au sens des distributions.

Démonstration de la proposition 8.1.2 Grâce à une intégration par parties, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\langle (\chi_{\varepsilon_n})', \varphi\rangle + \varphi(0)| &= \left| -\int \chi_{\varepsilon_n}(x)\varphi'(x)dx + \varphi'(0) \int \chi_{\varepsilon_n}(x)dx \right| \\ &\leq \int |\chi_{\varepsilon_n}(x)|\, |\varphi'(x) - \varphi'(0)| dx \\ &\leq \|\chi\|_{L^1} \sup_{x\in B(0,C\varepsilon_n)} |\varphi'(x) - \varphi'(0)|. \end{aligned}$$

D'où la proposition.

Le problème de la fonction $1/x$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad |x| \geq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f_n(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Nous allons chercher la limite de la suite f_n dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Considérons une fonction de test φ et étudions la limite de

$$\int f_n(x)\varphi(x)dx.$$

Par définition de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on a

$$\int f_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]^c} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

L'imparité de la fonction $1/x$ implique que

$$\int f_n(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]^c} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx.$$

La fonction $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(-x)$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. De plus, d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction

$$x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$$

est une fonction dont la valeur absolue est majorée par $2\|\varphi'\|_{L^\infty}$. Ainsi donc on a

$$\lim_{n\infty}\int_{\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]^c} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx.$$

Nous avons donc démontrer que, pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a

$$\lim_{n\infty}\int f_n(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx.$$

Définition 8.1.3 *On appelera valeur principale de* $1/x$ *et l'on notera* $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ *la distribution définie par*

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx.$$

Remarquons que la formule ci-dessus définit bien une distribution car on a, pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}_{[-R,R]}$,

$$\left|\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle\right| \leq R\|\varphi'\|_{L^\infty}.$$

Définition 8.1.4 *Soit u une distribution sur Ω; elle est dite d'ordre fini si et seulement si il existe un entier N_0 tel que l'inégalité (8.1) soit vraie avec $N = N_0$ pour tout compact K de Ω. L'ordre de la distribution est alors défini comme étant le plus petit entier positif vérifiant cette propriété.*

Donnons maintenant la définition de l'ordre d'une distribution.

Définition 8.1.5 *Soit u une distribution sur Ω; elle est dite d'ordre fini si et seulement si il existe un entier N_0 tel que l'inégalité (8.1) soit vraie avec $N = N_0$ pour tout compact K de Ω. L'ordre de la distribution est alors défini comme étant le plus petit entier positif vérifiant cette propriété.*

Remarquons que les distributions associées aux fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$ sont des distributions d'ordre 0 ainsi que la masse de Dirac.

Exercice 8.1.1 *Démontrer que la distribution définie en (8.3) est une distribution d'ordre* 1.

Exercice 8.1.2 *Démontrer que la distribution* $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ *de la définition 8.1.3 ci-dessus est une distribution d'ordre* 1.

8.2 Les opérations sur les distributions

Les distributions apparaissant comme des objets généralisant les fonctions (localement intégrables), nous allons, dans cette section, définir quelques opérations qui sont familières pour des fonctions régulières, par exemples les fonctions de test. La première est l'opération de restriction.

Définition 8.2.1 (de la restriction) *Soient ω et Ω deux ouverts de $\mathbf{R}^d$ tels que le premier soit inclus dans le second. Considérons une distribution T sur l'ouvert Ω; on définit alors la restriction de T à l'ouvert ω, notée $T_{|\omega}$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)\,,\ \langle T_{|\omega}, \varphi\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \varphi\rangle.$$

Le fait que la forme linéaire $T_{|\omega}$ soit une distribution est immédiat comme l'est le fait que, si $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de distributions sur Ω tendant vers une distribution T sur Ω (au sens de la définition 8.1.2), alors, toujours au sens de la définition 8.1.2, la suite $((T_{|\omega})_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convernge vers $T_{|\omega}$. De plus, si f est une fonction $L^1_{loc}(\Omega)$, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)\,,\ \int_\omega f_{|\omega}(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f_{|\omega}(x)\varphi(x)dx.$$

Cette définition coïncide donc bien avec la restriction des fonctions.

Remarque Notons que, contrairement au cas des fonctions $L^1_{loc}(\Omega)$ dont on peut définir la restriction à n'importe qu'elle ensemble de mesure strictement positive, la notion de restriction d'une distribution à un ensemble n'est définie que pour un ensemble ouvert.

À titre d'exercice, nous allons maintenant étudier sa restriction à l'ouvert $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Soit φ une fonction test de l'ouvert $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Par définition de la restriction, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle &= \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}dx.\end{aligned}$$

Comme le support de la fonction φ ne rencontre pas l'origine, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x\,|\,\mathbf{R}\setminus\{0\}}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \langle \frac{1}{x\,|\,\mathbf{R}\setminus\{0\}}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc la restriction à $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ de la distribution "valeur principale" de $1/x$ est la fonction $1/x$.

Nous allons maintenant définir une opération tout à fait fondamentale sur les distributions, c'est la dérivation. L'un des points forts de cette théorie est que la dérivation est une opération toujours définie et qui plus est "continue". Cette définition est basée sur la proposition suivante.

Proposition 8.2.1 *Soit T une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$. La forme linéaire $T^{(j)}$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par par*

$$\langle T^{(j)}, \varphi\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} -\langle T, \partial_{x_j}\varphi\rangle$$

définit une distribution sur Ω. De plus, si $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ convergeant vers T, alors la suite $(T^{(j)}_{n\in\mathbf{N}})$ converge vers $T^{(j)}$.

Démonstration de la proposition 8.2.1 Comme T est une distribution, pour tout compact K de Ω, il existe une constante C et un entier N tel que

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_K\,,\ |\langle T, \psi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty}.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K$, on applique ceci à $\psi = \partial_{x_j}\varphi$ qui appartient aussi à $\mathcal{D}_K$. Ainsi donc, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K\,,\ |\langle T^{(j)}, \varphi\rangle| = |\langle T, \partial_{x_j}\varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N+1} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}.$$

Donc $T^{(j)}$ est bien une distribution sur Ω. De plus, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty}\langle T^{(j)}_n, \varphi\rangle &= -\lim_{n\infty}\langle T_n, \partial_{x_j}\varphi\rangle \\ &= -\langle T, \partial_{x_j}\varphi\rangle \\ &= \langle T^{(j)}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

La proposition est démontrée.

Définition 8.2.2 *La distribution $T^{(j)}$ est appelée dérivée partielle de T par rapport à la variable x_j et est notée $\partial_{x_j} T$.*

Nous allons maintenant vérifier la consistance de la définition, c'est-à-dire vérifier que, pour toute fonction de classe C^1 sur Ω, la dérivation définie ci-dessus coïncide bien avec la notion usuelle de dérivation. Soit f unr fonction de classe C^1 sur Ω, on la considère comme distribution, c'est-à-dire que l'on étudie la forme linéaire

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Par définition de la dérivation des distributions, on a

$$\langle \partial_{x_j} T_f, \varphi \rangle = - \int_\Omega f(x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx.$$

Par intégration par parties, on a

$$\langle \partial_{x_j} T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega \partial_{x_j} f(x) \varphi(x) dx.$$

Nous avons donc bien généralisé la notion de dérivation des fonctions de classe C^1.

Nous allons maintenant donner quelques exemples de calcul de dérivée au sens des distributions.

Proposition 8.2.2 *Soit H la fonction caractérisque de $\mathbf{R}^+$ qui est appelée fonction de Heavyside. Alors sa dérivée au sens des distributions est la masse de Dirac définie en (8.2)*

Démonstration de la proposition 8.2.2 Par définition, a dérivée au sens des distributions de H est

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle.$$

Par définition de H, on a, grâce à une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= - \int_0^\infty \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où la proposition.

Remarque La dérivée, au sens des distributions de la fonction de Heavyside est donc la masse ponctuelle en l'origine, dite aussi masse de Dirac. Remarquons donc qu'ici, la fonction de Heavyside est dérivable au sens usuel sauf en 0, et que cette dérivée est nulle. La notion usuelle de dérivée est donc inopérante ici au point où justement se produit la variation de H.

Proposition 8.2.3 *La dérivée au sens de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de la fonction $\log|x|$ est la distribution $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ de la définition 8.1.3.*

Démonstration de la proposition 8.2.3 . La fonction log est localement intégrable sur $\mathbf{R}$. Sa dérivée est donc définie par

$$\langle (\log)', \varphi \rangle = - \int_{\mathbf{R}} (\log|x|) \varphi(x) dx.$$

On a, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \langle (\log)', \varphi \rangle &= - \lim_{n \infty} \Big\{ \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} (\log -x) \varphi'(x) dx + \int_{\frac{1}{n}}^\infty (\log x) \varphi(x) dx \Big\} \\ &= \lim_{n \infty} \Big\{ - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx + \Big(\varphi\Big(\frac{1}{n}\Big) - \varphi\Big(-\frac{1}{n}\Big) \Big) \log n \Big\}. \end{aligned}$$

La fonction φ étant de classe C^1, on a

$$\Big| \varphi\Big(\frac{1}{n}\Big) - \varphi\Big(-\frac{1}{n}\Big) \Big| \leq 2 \|\varphi'\|_{L^\infty}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle(\log)', \varphi\rangle &= \frac{1}{2}\lim_{n\infty}\int_{\mathbf{R}\setminus[-n^{-1},n^{-1}]}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx \\ &= \langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Remarque L'opération de dérivation peut bien sûr être itérée. Soit T une distribution sur $\mathbf{R}^d$. Par définition de la dérivation des distributions, on a

$$\begin{aligned}\langle\partial_{x_j}(\partial_{x_k}T), \varphi\rangle &= -\langle\partial_{x_k}T, \partial_{x_j}\varphi\rangle \\ &= \langle T, \partial_{x_k}\partial_{x_j}\varphi\rangle.\end{aligned}$$

La fonction φ étant de classe C^2, le théorème de Schwarz dit que

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j}\varphi = \partial_{x_j}\partial_{x_k}\varphi.$$

Ainsi donc, on a, pour toute distribution T sur Ω,

$$\partial_{x_j}(\partial_{x_k}T) = \partial_{x_k}(\partial_{x_j}T).$$

Notations Soit T une distribution sur Ω, et α un multientier (c'est-à-dire un élément de $\mathbf{N}^d$), on posera

$$\partial^\alpha T \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}T.$$

Remarquons que l'on a

$$\langle\partial^\alpha T, \varphi\rangle = \langle T, (-1)^{|\alpha|}\varphi\rangle.$$

Généralisation de cette procédure

La méthode d'extension de la dérivation est une méthode très générale basée sur l'idée de dualité. Voici ce dont il s'agit. Soit E et F deux espaces vectoriels quelconques et A une application linéaire de E dans F. On peut alors définir sa transposée de la manière suivante:

$${}^tA\left\{\begin{array}{ccc} F^\star & \to & E^\star \\ T & \mapsto & T\circ A\end{array}\right.$$

où $F^\star$ (resp. $E^\star$) désigne l'ensemble des formes linéaires sur F (resp. E). Cette définition, que nous avons déjà rencontrée dans le cadre des formes linéaires continues sur un espace de Banach (voir la définition 3.4.1 page 54) est absolument générale. Pour définir la dérivation par rapport à ∂_{x_j}, on a pris $A = -\partial_{x_j}$.

Ce procédé peut être rendu systématique grâce au théorème suivant.

Théorème 8.2.1 *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbf{R}^d$ et A une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_2)$. Supposons que*

i) pour tout compact K de Ω_1, il existe un compact K' de Ω_2 tel que

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}_K\,,\ \mathrm{Supp}\ A\varphi\in\mathcal{D}_{K'} \tag{8.4}$$

ii) pour tout compact K de Ω_1 et pour tout entier N, il existe une constante C et un entier N' tel que

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}_K\,,\ \sup_{|\alpha|\le N}\|\partial^\alpha A\varphi\|_{L^\infty}\le C\sup_{|\alpha|\le N'}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}. \tag{8.5}$$

Alors l'application définie par

$$\langle {}^tAT, \varphi\rangle \stackrel{déf}{=} \langle T, A\varphi\rangle$$

est une application linéaire de $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ qui est "continue" au sens où

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} {}^tAT_n = {}^tAT \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega_1).$$

Démonstration du théorème 8.2.1 Commençons par vérifier que

$$\varphi \mapsto \langle T, A\varphi\rangle$$

est une distribution sur Ω_1. Soit K un compact de Ω_1, on considère alors le compact K' de Ω_2 donné par l'hypothèse (8.4). Comme T est une distribution, il existe un entier N et une constante C tels que

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{K'}\,,\ |\langle T, \psi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty}.$$

D'après l'hypothèse (8.5), on déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K\,,\ \exists N' \in \mathbf{N}\,,\ \exists C\,,\ |\langle {}^tAT, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N'} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}.$$

Donc ${}^tAT$ est bien une distribution sur Ω_1. Considérons une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ convergeant vers T dans $\mathcal{D}(\Omega_2)$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle {}^tAT_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, A\varphi\rangle = \langle T, A\varphi\rangle = \langle {}^tAT, \varphi\rangle.$$

D'où le théorème.

Nous allons maintenant appliquer ce théorème à diverses opérations sur les fonctions de test.

Définition 8.2.3 (de la dilatation d'une distribution) *Soit λ un réel. On définit alors l'application A_λ par*

$$A_\lambda \varphi(x) = |\lambda|^d \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

On pose alors $T_\lambda \stackrel{déf}{=} {}^tA_\lambda T$ et l'on appelle T_λ la dilatée de T

La consistance de la définition résulte d'une part du fait que l'opérateur A vérifie les hypothèses du théorème 8.2.1, d'autre part que, pour toute fonction f de $L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$, on a

$${}^tA_\lambda T_f = f(\lambda\cdot).$$

L'identité (8.4) est satisfaite en prenant $K' = \lambda K$. L'identité (8.5) est évidente. De plus, par définition de A_λ, on a, pour toute fonction de test φ,

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(\lambda x)\,\varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\lambda^d \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx.$$

Lorsque $\lambda = -1$, on note la ditatée par -1 de T par $\check{T}$.

Définition 8.2.4 (de la translation) *Soient $\vec{a}$ un vecteur de $\mathbf{R}^d$ et $A_{\vec{a}}$ l'application définie par*

$$A_{\vec{a}}\varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(x+\vec{a}).$$

On appelle translatée de $\vec{a}$ et l'on note $\tau_{\vec{a}}$ l'application ${}^tA_{\vec{a}}$.

Il est immédiat que les hypothèses du théorème 8.2.1 sont satisfaites. Remarquons que cela coïncide bien avec la notion de translation des fonctions car si f est une fonction de $L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$, on a, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$,

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x-\vec{a})\varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\varphi(x+\vec{a})dx.$$

Définition 8.2.5 (de la multiplication par une fonction C^∞) *Soit f une fonction indéfiniment différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$; on considère alors l'application A définie par*

$$A_f\varphi = f\varphi.$$

L'application ${}^tA_f$ est la multiplication d'une distribution par la fonction f.

La consistance de la définition résulte d'une part du fait que l'opérateur A_f satisfait aux hypothèses du théorème 8.2.1, d'autre part que, pour toute fonction g de $L^1_{loc}(\Omega)$, on a

$${}^tA_f g = fg\,, \quad \text{ce qui est évident.}$$

L'identité (8.4) est satisfaite en prenant $K' = K$. De plus, d'après la formule de Leibnitz, on a

$$\partial^\alpha(f\varphi) = \sum_{\beta\leq\alpha} C^\alpha_\beta \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta\varphi.$$

On a, pour tout compact K, d'apres

$$\forall N\in\mathbf{N}\,,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}_K\,,\ \sup_{|\alpha|\leq N}\|\partial^\alpha(f\varphi)\|_{L^\infty} \leq C \sup_{\substack{|\alpha|\leq N\\ x\in K}}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty} \sup_{|\alpha|\leq N}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}.$$

L'identité (8.5) est donc satisfaite.

Définition 8.2.6 *Soit Θ un C^∞ difféomorphisme d'un ouvert Ω_1 de $\mathbf{R}^d$ sur un ouvert Ω_2 de $\mathbf{R}^d$. On définit l'application A_Θ de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_2)$ pars*

$$A_\Theta\varphi(y) \stackrel{\text{déf}}{=} J(\Theta(\Theta^{-1}(y)))\varphi(\Theta^{-1}(y))$$

où $J(\Theta(y))$ désigne la valeur absolue du déterminant de $D\Theta(y)$, où $D\Theta$ désigne ici la différentielle de Θ. Lorsque T est une distribution sur Ω, on appelle ${}^tAT$ la composée de T avec Θ.

La consistance de la définition résulte d'une part du fait que l'opérateur A_θ satisfait les hypothèses du théorème 8.2.1, d'autre part que, pour toute fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$${}^tA_\Theta\varphi(x) = \varphi(\Theta(x)).$$

L'identité (8.4) est satisfaite en prenant $K' = \Theta(K)$. De plus, d'après la formule de Leibnitz, on a

$$\partial^\alpha(A_\Theta(\varphi)) = \sum_{\beta\leq\alpha} C^\alpha_\beta \partial^{\alpha-\beta} J(\Theta(\Theta^{-1}(x)))\partial^\beta(\varphi\circ\Theta).$$

La formule de dérivation composée d'ordre quelconque s'écrit

$$D^k(\varphi \circ \Theta) = \sum_{\substack{\ell_1+\ldots+\ell_q=k \\ \ell_p>0}} D^q\varphi(D^{\ell_1}\Theta, \ldots, D^{\ell_q}\Theta).$$

Il en résulte que

$$\sup_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha A_\Theta(\varphi)\|_{L^\infty} \leq C_{K,\Theta} \sup_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}.$$

L'identité (8.5) est donc satisfaite.

Définition 8.2.7 (de la conjugaison complexe) *Soit u une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$. On définit la distribution $\overline{T}$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \langle \overline{T}, \varphi \rangle \stackrel{déf}{=} \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle}.$$

Remarquons que, lorsque f est une fonction $L^1_{loc}(\Omega)$, on a bien

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \int \overline{f}(x)\varphi(x)dx = \overline{\int f(x)\overline{\varphi}(x)dx}.$$

L'opération définie ci-dessus est "continue" c'est-à-dire que si l'on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de distributions convergeant vers une distribution u, alors la convergence traverse ces opérations. Démontrons-le par exemple pour la conjugaison complexe, les autres cas sont tout à fait analogues. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, au sens des distributions, vers une distribution u, alors, pour toute fonction de test φ, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \overline{\varphi} \rangle = \langle T, \overline{\varphi} \rangle.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \overline{\langle T_n, \overline{\varphi} \rangle} &= \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle} \\ &= \langle \overline{T}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Nous nous limiterons à ce concept. Bien que l'on puisse définir précisement sur l'espace des distributions une topologie pour laquelle les suites convergentes sont les suites satisfaisant à la définition ci-dessus, nous nous limiterons à ce concept de suite convergente. Cette définition de la convergence est exactement analogue à la notion de convergence $\star$-faible. Illustrons cela par l'énoncé suivant.

Proposition 8.2.4 *Soit p un élément de $]1, \infty]$, on considère une suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $L^p(\Omega)$ et T une distribution sur Ω. On a alors*

$$(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \to T \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

si et seulement si

$$\exists f \in L^p \,/\, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \langle T, f \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad et \quad \text{limf}\star\, f_n = f.$$

Démonstration de la proposition 8.2.4 L'implication de droite à gauche est immédiate. Le fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ signifie que

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ \lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle.$$

Mais, les distributions f_n étant des fonctions localement intégrables, on a

$$\langle f_n,\varphi\rangle=\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)dx.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant bornée, il existe une constante C telle que

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ \left|\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)dx\right|\leq C\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Par passage à la limite, on en déduit que

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ |\langle f,\varphi\rangle|\leq C\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

La distribution f est donc une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est continue pour la topologie de la norme $L^{p'}$. Comme par hypothèse, p n'est pas égal à 1, p' est un réel, donc l'espace des fonctions de test est dense dans l'espace $L^{p'}$. D'après le théorème de prolongement 2.2.2, on peut définir une forme linéaire continue sur $L^{p'}$, notée $\widetilde{f}$. Par ailleurs, le théorème 5.5.1 affirme qu'il existe une fonction $\underline{f}$ appartenant à l'espace L^p telle que

$$\forall g\in L^{p'}\,,\ \int_\Omega \underline{f}(x)g(x)dx=\langle\widetilde{f},g\rangle.$$

Cette égalité est a fortiori vraie pour toute fonction de test φ, d'où il vient

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ \int_\Omega \underline{f}(x)\varphi(x)dx=\langle f,\varphi\rangle.$$

D'après le théorème 8.1.1, ceci signifie que l'on peut identifier la distribution f avec la fonction $\underline{f}$, donc que f appartient à l'espace $L^p(\Omega)$. On peut donc écrire que

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)dx=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

On conclue alors en appliquant la proposition suivante.

Proposition 8.2.5 *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$, p un élément de $]1,+\infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'éléments de $L^p(\Omega)$ et f une fonction de $L^p(\Omega)$. On a alors*

$$\liminf_{n\to\infty}{}^\star\, f_n=f\Leftrightarrow\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)dx=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

Démonstration de la proposition 8.2.5 La démonstration de cette proposition est très simple. Il est clair que seule l'implication de droite à gauche est à démontrer. Soit ε un réel strictement positif et g une fonction de $L^{p'}$. D'après le corollaire 5.4.2, il existe une fonction φ appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\|g-\varphi\|_{L^{p'}}\leq\frac{\varepsilon}{2\sup\|f_n\|_{L^p}+1}.$$

D'après le théorème 3.3.1, nous avons que $\|f\|_{L^p}\leq\sup_n\|f_n\|_{L^p}$. On a alors

$$\left|\int_\Omega f_n(x)g(x)dx-\int_\Omega f(x)g(x)dx\right|\leq\left|\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)dx-\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où la proposition.

8.3 La formule des sauts en dimension 1

Le but de cette section est de généraliser la proposition 8.2.2. Nous allons commencer par étudier le lien entre dérivée au sens des distributions et primitive. Il est décrit par le résultat suivant.

Théorème 8.3.1 *Soit T une distribution sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$. Si sa dérivée (au sens des distributions) T' est une fonction $L^1_{loc}(I)$, alors T est une fonction continue et l'on a, pour $a \in I$,*

$$T(x) = \int_a^x T'(x)dx + C.$$

Démonstration du théorème 8.3.1 Elle repose sur les deux lemmes suivants que nous admettrons un court instant.

Lemme 8.3.1 *Soit T une distribution sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Si $T' = 0$, alors la distribution T est une fonction qui est constante.*

Lemme 8.3.2 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, a un point de I et f une fonction de $L^1_{loc}(I)$. Alors*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)dy = f(x)$$

au sens des distributions.

Pour $a \in I$, posons $F(x) = \displaystyle\int_a^x T'(y)dy$. D'après le lemme 8.3.2, on a $F' = T'$. D'après le lemme 8.3.1, on a

$$T - F = C.$$

D'où le théorème, pourvu bien sûr que nous démontrions les deux lemmes admis.

Démonstration du lemme 8.3.1 Fixons une fonction θ appartenant à $\mathcal{D}(I)$ et d'intégrale 1. Soit φ une quelconque fonction indéfiniment différentiable à support compact de I. La fonction

$$\varphi - \left(\int_I \varphi(x)dx\right)\theta$$

est d'intégrale nulle. Donc la fonction

$$\psi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^x \left(\varphi(x) - \left(\int_I \varphi(x)dx\right)\theta(x)\right)dx$$

est indéfiniment différentiable à support compact et

$$\psi' = \varphi - \left(\int_I \varphi(x)dx\right)\theta$$

D'où il résulte que

$$\varphi = \psi' + \left(\int_I \varphi(x)dx\right)\theta.$$

En appliquant la distribution T à l'égalité ci-dessus entre fonctions indéfiniment différentiables à support compact, on trouve que

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi\rangle &= \langle T, \psi'\rangle + \left(\int_I \varphi(x)dx\right)\langle T, \theta\rangle \\
&= -\langle T', \psi\rangle + \left(\int_I \varphi(x)dx\right)\langle T, \theta\rangle \\
&= \left(\int_I \varphi(x)dx\right)\langle T, \theta\rangle.
\end{aligned}$$

D'où le lemme 8.3.1

Démonstration du lemme 8.3.2 D'après la définition de la dérivation au sens des distributions, il s'agit de démontrer que, si

$$F(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^x f(y)dy,$$

alors on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\,,\ \int \varphi'(x)F(x)dx = -\int \varphi(x)f(x)dx.$$

Soit $\theta \in \mathcal{D}(I)$ telle que θ vaille identiquement 1 au voisinage d'un intervalle J contenant le support de φ. Quitte à ajouter à F une constante, on peut supposer que le point a appartient au support de φ. On a alors

$$\int \varphi(x)f(x)dx = \int \varphi(x)(\theta f)(x)dx$$

Soit χ_ε une approximation de l'identité, on pose

$$f_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \chi_\varepsilon \star (\theta f) \quad \text{et} \quad F_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^x f_\varepsilon(y)dy.$$

Pour ε assez petit, on a $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(I)$ et comme $F'_\varepsilon = f_\varepsilon$, c'est une fonction de classe C^∞ sur I. Comme $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a, par intégration par parties

$$\int \varphi'(x)F_\varepsilon(x)dx = -\int \varphi(x)f_\varepsilon(x)dx.$$

D'après le théorème 5.4.5 page 83, la fonction f_ε converge vers θf dans L^1 lorsque ε tend vers 0 et donc

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} -\int \varphi(x)f_\varepsilon(x)dx &= -\int \varphi(x)(\theta f)(x)dx \\ &= -\int \varphi(x)f(x)dx.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\Big|F_\varepsilon(x) - \int_a^x \theta(y)f(y)dy\Big| \le \|f_\varepsilon - \theta f\|_{L^1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int \varphi'(x)F_\varepsilon(x)dx &= \int \varphi'(x)\Big(\int_a^x \theta(y)f(y)dy\Big)dx \\ &= \int \varphi'(x)\Big(\int_a^x f(y)dy\Big)dx.\end{aligned}$$

Le lemme 8.3.2 et donc le théorème 8.3.1 est démontré.

Nous allons maintenant voir comment se comporte la dérivation face à une troncature brutale. Ceci est décrit par le théorème suivant.

Théorème 8.3.2 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur I dont la dérivée au sens des distributions est une fonction $L^1_{loc}(I)$. Soit $(a,b) \in I^2$. On a alors, au sens des distributions*

$$\frac{d}{dx}\Big(\mathbf{1}_{[a,b]}f\Big) = f(a)\delta_a - f(b)\delta_b + \mathbf{1}_{[a,b]}f'.$$

Démonstration du théorème 8.3.2 D'après le théorème 8.3.1, on a

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy. \tag{8.6}$$

D'après la définition de la dérivation au sens des distributions, on a

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx}\left(\mathbf{1}_{a,b} f\right), \varphi \rangle &= -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -f(a)\int_a^b \varphi'(x)dx - \int_a^b \Big(\int_a^x f'(y)dy\Big)\varphi'(x)dx \\
&= f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - f(a)\varphi(b) - \int_a^b \Big(\int_a^x f'(y)dy\Big)\varphi'(x)dx.
\end{aligned}$$

La fonction

$$f'(y)\varphi'(x)\mathbf{1}_{c\leq y\leq x\leq d}$$

est intégrable sur $\mathbf{R}^2$. Le théorème de Fubini-Tonelli 5.1.6 page 72 implique alors que

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx}\left(\mathbf{1}_{a,b} f\right), \varphi \rangle &= f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - f(a)\varphi(b) - \int_a^b f'(y)\Big(\int_y^b \varphi'(x)dx\Big)dy \\
&= f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - \varphi(b)f(a) - \varphi(b)\int_a^b f'(y)dy + \int_a^b f'(y)\varphi(y)dy \\
&= f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - \varphi(b)\Big(f(a) + \int_a^b f'(y)dy\Big) + \int_a^b f'(y)\varphi(y)dy.
\end{aligned}$$

D'après (8.6), on a

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx}\left(\mathbf{1}_{[a,b]} f\right), \varphi \rangle &= f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - \varphi(b)f(b) + \int_a^b f'(y)\varphi(y)dy \\
&= f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - f(b)\langle \delta_b, \varphi\rangle + \int_a^b f'(y)\varphi(y)dy \\
&= f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - f(b)\langle \delta_b, \varphi\rangle + \int_I \mathbf{1}_{[a,b]} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle - f(b)\langle \delta_b, \varphi\rangle + \langle \mathbf{1}_{[a,b]} f', \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

D'où le théorème.

De cette propriété, on déduit aisément la proprité suivante, dite formule des sauts

Théorème 8.3.3 *Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$. On désigne par $(a_n)_{1\leq n\leq N}$ ses points de discontinuité. Sa dérivée au sens des distributions est la somme de la dérivée usuelle sur $\mathbf{R}\setminus\{a_1, \cdots, a_N\}$ et de la distribution*

$$\sum_{n=1}^{N} (f(a_n+) - f(a_n-))\delta_{a_n},$$

où δ_{a_n} désigne la masse unité au point a_n, i.e. la distribution définie par

$$\langle \delta_{a_n}, \varphi\rangle = \varphi(a_n).$$

8.4 Exemples et compléments

Cette section est essentiellement une suite d'exercices (résolus) et de résultats complémentaires qui n'ont pas n'ont pas été traités en amphi. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

Nous pouvons dériver autant de fois que nous le souhaitons la fonction f. De plus, nous savons bien que, pour toute fonction de test φ, on a

$$\lim_{N\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right) \varphi(x) dx = \int f(x)\varphi(x) dx.$$

Donc on a

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \sin(n\cdot) = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'.$$

D'après la "continuité" de la dérivation, on en déduit que, pour tout entier ℓ, on a

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \sin(n\,\cdot) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'.$$

Donc en particulier la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} \sin(n\cdot) \right)_{N\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'$. Démontrer cette propriété directement est un exercice très formateur.

Nous allons maintenant exposer quelques exemples de résolution d'équations dont l'inconnue est une distribution. En voici quelques exemples.

Proposition 8.4.1 *Soit T une distribution sur $\mathbf{R}^d$ telle que l'on ait*

$$\forall j \in \{1, \cdots, d\}\,, \ x_j T = 0.$$

Alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $T = \lambda\delta_0$.

La démonstration de cette proposition est basée sur la formule de Taylor avec reste intégral. Soit φ une fonction de test. On a

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^{d} x_j \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx) dt.$$

Soit χ une fonction valant identiquement 1 près du support de φ; on a bien sûr $\chi\varphi = \varphi$. D'où il vient que

$$\varphi(x) = \varphi(0)\chi(x) + \sum_{j=1}^{d} x_j \varphi_j(x) \quad \text{avec} \quad \varphi_j(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \chi(x) \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx) dt.$$

D'où

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \chi\rangle + \sum_{j=1}^{d} \langle T, x_j\varphi_j\rangle.$$

Le fait que $x_j u = 0$ signifie exactement que $\langle T, x_j\varphi_j\rangle = 0$. Donc, on a

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \chi\rangle,$$

ce qui implique que $T = \lambda\delta_0$.

Proposition 8.4.2 *Soit T une distribution sur $\mathbf{R}^d$ telle que $xT = 1$; alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que*

$$T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda\delta_0,$$

où $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ *est la distribution définie page 109.*

En effet, si l'on a $xu = 1$ sur $\mathbf{R}$, a fortiori on a $xu_{|\mathbf{R}\setminus\{0\}} = 1_{|\mathbf{R}\setminus\{0\}}$. Démontrons que ceci implique que $u_{|\mathbf{R}\setminus\{0\}} = 1/x$. Soit en effet $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}\setminus\{0\})$, on a

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \langle T, \frac{x\varphi}{x}\rangle \\ &= \langle xT, \frac{\varphi}{x}\rangle \\ &= \int \frac{\varphi(x)}{x}dx,\end{aligned}$$

ce qui signifie précisément que $T_{|\mathbf{R}\setminus\{0\}} = \dfrac{1}{x}\cdot$ Mais, nous connaissons une telle distribution, c'est $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Démontrons maintenant que $x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Soit φ une fonction de test et R un réel tel que le support de φ soit inclus dans l'intervalle ouvert $]-R, R[$. Par définition de la distribution "valeur principale" de $1/x$, on a

$$\begin{aligned}\langle x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle &= \langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\rangle \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{x\varphi(x) - 0\varphi(0)}{x}dx \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{x\varphi(x)}{x}dx \\ &= \int_{-R}^{R} \varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Donc on a $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. D'autre part, si T_1 et T_2 sont deux distributions vérifiant $xT_j = 1$, alors $x(T_1 - T_2) = 0$ et la proposition 8.4.1 conclue la démonstration.

Nous admettrons le théorème suivant, analogue du théorème 3.3.1.

Théorème 8.4.1 *Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de distributions sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$ telle qu'il existe une forme linéaire u sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Alors, la forme linéaire T est une distribution, c'est-à-dire que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}_K\,,\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}.$$

Chapitre 9

Convolution des distributions

9.1 La notion de support; les distributions à support compact

Le concept de support d'une distribution est basé sur la notion de restriction d'une distribution à un ouvert (voir la définition 8.2.1 page 110) et sur la proposition suivante.

Proposition 9.1.1 *Soit T une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$ et $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille quelconque d'ouverts de Ω tels que, pour tout λ appartenant à Λ, on ait $T_{|U_\lambda} = 0$. Alors T restreinte à la réunion des U_λ est nulle.*

Démonstration de la proposition 9.1.1 Soit φ une fonction C^∞ à support dans la réunion des ouverts U_λ . Comme le support de φ est compact, il existe une famille finie $(\lambda_j)_{1\leq j\leq N}$ telle que l'on ait

$$\text{Supp } \varphi \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{\lambda_j}.$$

Admettons momentanément le lemme suivant.

Lemme 9.1.1 *Soit K un compact et $(U_j)_{1\leq j\leq N}$ une suite finie d'ouverts de $\mathbf{R}^d$ tels que*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j.$$

Il existe une famille $(\varphi_j)_{1\leq j\leq N}$ de fonctions à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ telles que φ_j appartienne à $\mathcal{D}(U_j)$ et telles que

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1 \quad \textit{au voisinage de } K.$$

Appliquons ce lemme. On peut écrire

$$\varphi = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j\varphi \quad \text{et donc} \quad \langle T,\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle T, \varphi_j\varphi\rangle.$$

Mais, comme $\varphi_j\varphi$ appartient à $\mathcal{D}(U_j)$, on a $\langle T,\varphi_j\varphi\rangle = 0$. Ainsi donc $\langle T,\varphi\rangle = 0$. Le théorème est démontré pourvu que l'on démontre le lemme 9.1.1.

Démonstration du lemme 9.1.1 On commence par diminuer légèrement les ouverts U_j. Posons, pour ε strictement positif,

$$U_{j,\varepsilon} \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in U_j \,/\, d(x, U_j^c) > \varepsilon\}.$$

D'après la proposition 1.1.10 page 10, la fonction $x \mapsto d(x, U_j^c)$ est une fonction continue. Donc les $U_{j,\varepsilon}$ sont des ouverts. Nous allons démontrer qu'il existe un réel strictement positif δ tel que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{j,\delta}. \tag{9.1}$$

En effet, pour tout $x \in K$, il existe $j \in \{1, \cdots, N\}$ tel que x appartienne à U_j. Comme l'ensemble U_j est un ouvert, il existe un réel strictement positif δ_x tel que la boule ouverte $B(x, \delta_x)$ soit incluse dans U_j. Donc x appartient à U_{j,δ_x}. Il en résulte que la famille d'ouverts $(U_{j,\varepsilon})_{1\leq j\leq N, \varepsilon>0}$ recouvre le compact K. On extrait de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $(U_{j,\varepsilon_j})_{1\leq j\leq N}$. En posant $\delta = \min\{\varepsilon_j\,,\ 1 \leq j \leq N\}$, on obtient (9.1).

Étant donné une fonction $\chi \in \mathcal{D}(B(0,1))$ d'intégrale 1, on pose

$$\theta_j \stackrel{\text{déf}}{=} \chi_{\delta/2} \star \mathbf{1}_{U_{j,\delta/2}} \quad \text{et} \quad \varphi_j(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \theta_j(x) \prod_{1\leq k\leq j-1} (1 - \theta_k(x)) \quad \text{avec} \quad \chi_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon^{-d} \chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\cdot$$

On a bien que $\theta_j \in \mathcal{D}(U_j)$ et que θ_j vaut identiquement 1 au voisinage de $U_{j,\delta}$. Il reste simplement à vérifier que la fonction définie par

$$S(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x)$$

vaut identiquement 1 près de K. Comme la fonction θ_j vaut identiquement 1 près de $U_{j,\delta}$, nous avons

$$\forall j \in \{1, \cdots N\}\,,\ \forall x \in U_{j,\delta}\,,\ \forall k \geq j+1\,,\ \varphi_k(x) = 0.$$

Soit donc $x \in U_{j,\delta}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k(x) + \varphi_j(x) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \theta_k(x) \prod_{1\leq \ell\leq k-1} (1 - \theta_\ell(x)) + \prod_{1\leq \ell\leq j-1} (1 - \theta_\ell(x)). \end{aligned}$$

Le fait que S vaut identiquement 1 près de K va résulter du lemme algébrique suivant.

Lemme 9.1.2 *Soit $(\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes, on considère la suite $(A_j)_{j\geq 2}$ définie par*

$$A_j = \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k \prod_{1\leq \ell\leq k-1} (1 - \alpha_\ell) + \prod_{1\leq \ell\leq \jmath-1} (1 - \alpha_\ell).$$

Alors, pour tout j, $A_j = 1$.

Démonstration du lemme 9.1.2 Il est clair que $A_2 = \alpha_1 + 1 - \alpha_1 = 1$. De plus, pour $j \leq 2$, on a

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \prod_{1\leq \ell \leq k-1} (1-\alpha_\ell) + \prod_{1\leq \ell \leq j} (1-\alpha_\ell) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k \prod_{1\leq \ell \leq k-1} (1-\alpha_\ell) + \alpha_j \prod_{1\leq \ell \leq j-1} (1-\alpha_\ell) + (1-\alpha_j) \prod_{1\leq \ell \leq j-1} (1-\alpha_\ell) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k \prod_{1\leq \ell \leq k-1} (1-\alpha_\ell) + \prod_{1\leq \ell \leq j-1} (1-\alpha_\ell) \\ &= A_j. \end{aligned}$$

D'où le lemme.

On peut maintenant définir la notion de support d'une distribution.

Définition 9.1.1 *Soit T une distribution sur Ω, on appelle support de T et l'on note* Supp T *le complémentaire du plus grand ouvert ω inclus dans Ω tel que $T_{|\omega} = 0$.*

Remarque Le support d'une distribution est par définition un fermé. De plus, cette notion de support d'une distribution coïncide avec celui d'une fonction. En effet, soit f une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ et ω un ouvert tel que $f_{|\omega} = 0$ au sens des distributions. Ceci signifie que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega)\,,\ \langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

D'après le théorème 8.1.1, ceci signifie exactement que, pour presque tout x de ω, on a que $f(x) = 0$. Ceci montre bien que la définition de support d'une distribution coïncide bien avec la définition usuelle dans le cas des fonctions localement intégrables.

Définition 9.1.2 *On appelle distribution à support compact toute distribution T sur Ω telle que le support de T soit compact. On désigne par $\mathcal{E}'(\Omega)$ cet ensemble.*

Nous allons maintenant voir que les distributions à support compact peuvent s'identifier au dual de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables. Pour cela, commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 9.1.3 *Soient T une distribution à support compact sur Ω et χ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ valant identiquement 1 près du support de T. Alors, on a*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \langle T, \chi\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Démonstration du lemme 9.1.3 Il suffit d'écrire que, pour toute fonction de test φ, on a

$$\langle T, \chi\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \chi\varphi - \varphi \rangle.$$

Par définition de χ, le support de $(\chi - 1)\varphi$ est un compact inclus dans le complémentaire du support de T; donc par définition du support de u, on a

$$\langle T, \chi\varphi - \varphi \rangle = 0 \quad \text{et donc} \quad \chi T = T.$$

D'où le lemme.

Proposition 9.1.2 *Soit T une distribution à support compact. Il existe une unique forme linéaire $\widetilde{T}$ définie sur $C^\infty(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω) prolongeant T et telle qu'il existe un compact K', une constante C et un entier N tels que*

$$\forall \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle \widetilde{T}, \phi\rangle| \leq C \sup_{\substack{x\in K'\\ |\alpha|\leq N}} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Démonstration de la proposition 9.1.2 Soit χ une fonction de test valant 1 près du support de T, on définit $\widetilde{T}$ sur $C^\infty(\Omega)$ par

$$\langle \widetilde{T}, \phi\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \chi\phi\rangle.$$

Le lemme 9.1.3 ci-dessus montre que que $\widetilde{T}$ prolonge bien T. De plus, T étant une distribution, il existe une constante C et un entier N tels que

$$\forall \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle \widetilde{T}, \phi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha(\chi\phi)\|_{L^\infty}.$$

La formule de Leibnitz assure que

$$\begin{aligned} \forall \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle \widetilde{T}, \phi\rangle| &\leq C \sup_{\substack{x\in \mathrm{Supp}\ \chi\\ |\alpha|\leq N}} |\partial^\alpha \phi(x)| \\ &\leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

D'où la proposition.

Corollaire 9.1.1 *Toute distribution à support compact est d'ordre fini.*

Démonstration du corollaire 9.1.1 Ceci n'est qu'une traduction de l'inégalité (9.2).

Convention Dans toute la suite nous identifierons une distribution T à support compact et la forme linéaire $\widetilde{T}$ définie dans la proposition ci-dessus.

Remarques L'espace $C^\infty(\Omega)$ étant parfois noté $\mathcal{E}(\Omega)$, la notation $\mathcal{E}'(\Omega)$ utilisée pour les distributions à support compact insiste sur le fait que l'on identifie les formes linéaires sur $C^\infty(\Omega)$ "continues" – c'est-à-dire vérifiant (9.2) – et les distributions sur Ω à support compact.

Une distribution à support compact est toujours d'ordre fini.

Exercice 9.1.1 *Soit T_N la distribution définie sur $\mathbf{R}$ par*

$$T_N \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \delta_{\frac{1}{n}}$$

1) Démontrer que la suite $(T_N)_{N\in\mathbf{N}}$ admet une limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ que l'on désignera par T.

2) Démontrer que le support de T est l'ensemble

$$S \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbf{N}\setminus\{0\} \Big\} \cup \{0\}.$$

3) Trouver une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que, pour tout entier N on ait

$$\sup_{x\in S} |\varphi_n(x)| = 1\,,\quad \sup_{\substack{0<|\alpha|\leq N\\ x\in S}} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = +\infty.$$

4) Démontrer que T est une distribution d'ordre 1

9.2 La convolution d'une distribution et d'une fonction de test

Nous allons définir cette convolution en suivant la procédure du théorème 8.2.1 page 113.

Proposition 9.2.1 *Soit θ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. On pose*

$$A_\theta\varphi \stackrel{\text{déf}}{=} \check{\theta} \star \varphi$$

L'application A_θ envoie $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ et vérifie les hypothèses du théorème 8.2.1 page 113.

Démonstration de la proposition 9.2.1 Par définition de la convolution des fonctions, on a

$$(A_\theta\varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} \theta(y-x)\varphi(y)dy.$$

Ainsi donc, si $\varphi \in \mathcal{D}_K$, alors on a

$$\text{Supp } A_\theta\varphi \subset -\text{Supp } \theta + K.$$

De plus, on a $\partial^\alpha(A_\theta\varphi) = \partial^\alpha\check{\theta} \star \varphi$ et donc

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}_K\,,\ \sup_{\alpha\leq p} \|\partial^\alpha(A_\theta\varphi)\|_{L^\infty} \leq \sup_{\alpha\leq p} \|\partial^\alpha\theta\|_{L^1}\|\varphi\|_{L^\infty}.$$

D'où la proposition.

On peut donc définir la convolution d'une distribution et d'une fonction de test.

Définition 9.2.1 *On pose, pour T dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et θ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$,*

$$T \star \theta \stackrel{\text{def}}{=} {}^tA_\theta T,$$

c'est-à-dire, pour toute fonction de test φ,

$$\langle T \star \theta, \varphi\rangle = \langle T, \check{\theta} \star \varphi\rangle.$$

Exemple Nous allons calculer la convoluée de la masse de Dirac et d'une fonction θ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Par définition, nous avons, pour toute fonction de test φ,

$$\begin{aligned}\langle \delta_0 \star \theta, \varphi\rangle &= \langle \delta_0, \check{\theta} \star \varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \theta(y-0)\varphi(y)dy \\ &= \langle T_\theta, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi donc, nous avons

$$\delta_0 \star \theta = \theta. \tag{9.3}$$

Nous allons maintenant démontrer que la convoluée d'une distribution et d'une fonction de test est une fonction C^∞. Cela repose sur le théorème suivant.

Théorème 9.2.1 *Soient Ω_1 un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et Ω_2 un ouvert de $\mathbf{R}^N$. On considère T une distribution sur Ω_2 et une fonction Φ de $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. On a alors*

$$\int_{\Omega_1} \langle T, \Phi(x_1,.)\rangle dx_1 = \Big\langle T, \int_{\Omega_1} \Phi(x_1,.)dx_1\Big\rangle.$$

Démonstration du théorème 9.2.1 Par hypothèse, il existe des conpacts K_j et Ω_j tels que Supp Φ soit inclus dans $K_1 \times K_2$. En particulier, on a

$$\forall x_1 \in \Omega_1\,,\ \text{Supp}\ \Phi(x_1,\cdot) \subset K_2 \quad \text{et donc} \quad \text{Supp} \int_{\Omega_1} \Phi(x_1,\cdot)dx_1 \subset K_2.$$

Comme T est une distribution sur Ω_2, il existe C et p tel que

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{K_2}\,,\ |\langle T,\psi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty}. \tag{9.4}$$

Pour tout α tel que $|\alpha| \leq p$, la fonction $\partial^\alpha \Phi$ est uniformément continue sur $K_1 \times K_2$. Donc, pour tout ε strictement positif, il existe un réel strictement positif η tel que

$$|x_1 - x_1'| < \eta \Longleftrightarrow \|\partial^\alpha \Phi(x_1,\cdot) - \partial^\alpha \Phi(x_1',\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{\mu(K)}\cdot \tag{9.5}$$

L'ensemble K_1 étant compact, on peut le recouvrir avec un nombre fini de boules de rayon η, c'est-à-dire écrire que

$$K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_1^{(j)},\eta).$$

On pose alors

$$A_1 = K_1 \cap B(x_1^{(1)},\eta) \quad \text{et} \quad A_j = K_1 \cap B(x_1^{(j)},\eta) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k.$$

Considérons la fonction $\widetilde{\Phi}$ définie par

$$\widetilde{\Phi}(x_1,x_2) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{A_j}(x_1)\Phi(x_1^{(j)},x_2).$$

D'après (9.5), on a, pour tout α tel que $|\alpha| \leq p$,

$$\Big\|\partial_{x_2}^\alpha \int_{\Omega_1} \Big(\Phi(x_1,\cdot) - \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{A_j}(x_1)\Phi(x_1^{(j)},\cdot)\Big)dx_1\Big\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

D'après (9.4), on a

$$\Big|\Big\langle T, \int_{\Omega_1} \Phi(x_1,\cdot)dx_1\Big\rangle - \Big\langle T, \int_{\Omega_1} \widetilde{\Phi}(x_1,\cdot)dx_1\Big\rangle\Big| < \varepsilon. \tag{9.6}$$

Or T est une forme linéaire, on a

$$\begin{aligned}
\Big\langle T, \int_{\Omega_1} \widetilde{\Phi}(x_1,\cdot)dx_1\Big\rangle &= \Big\langle T, \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)\Phi(x_1^{(j)},\cdot)\Big\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)\langle T, \Phi(x_1^{(j)},\cdot)\rangle \\
&= \int_{\Omega_1} \Big(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{A_j}(x_1)\langle T, \Phi(x_1^{(j)},\cdot)\rangle\Big)dx_1.
\end{aligned}$$

D'après (9.4) et (9.5), on a

$$\forall x_1 \in \Omega_1\,,\ \forall j \in \{1,\cdots,N\}\,,\ \left|\mathbf{1}_{A_j}(x_1)\langle T, \Phi(x_1^{(j)},\cdot)\rangle - \langle T, \Phi(x_1,\cdot)\rangle\right| < \frac{\varepsilon}{\mu(K_1)}\cdot$$

Ainsi donc

$$\begin{aligned}\left|\langle T, \int_{\Omega_1} \widetilde{\Phi}(x_1,\cdot)dx_1\rangle - \int_{\Omega_1}\langle T, \Phi(x_1,\cdot)\rangle dx_1\right| &\leq \int_{\Omega_1}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{1}_{A_j}(x_1)\left|\langle T, \Phi(x_1,\cdot)-\Phi(x_1^j,\cdot)\rangle\right| dx_1\\ &\leq \int_{\Omega_1}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{1}_{A_j}(x_1)\frac{\varepsilon}{\mu(K_1)}dx_1\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

D'après (9.6), on en déduit que, pour tout réel ε strictement positif, on a

$$\left|\left\langle T, \int_{\Omega_1}\Phi(x_1,\cdot)dx_1\right\rangle - \int_{\Omega_1}\langle T, \Phi(x_1,\cdot)\rangle dx_1\right| < \varepsilon.$$

D'où le théorème.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 9.2.1 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Alors $T \star \theta$ est une fonction localement bornée et l'on a*

$$(T\star\theta)(x) = \langle T, \tau_x\check{\theta}\rangle.$$

Démonstration du corrolaire 9.2.1 Soit φ une fonction de test. On applique le théorème 9.2.1 ci-dessus avec

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}^d \quad \text{et} \quad \Phi(x_{1,}x_2) = \theta(x_1-x_2)\varphi(x_1).$$

On a, par définition de la convolution des fonctions

$$\check{\theta}\star\varphi(x_2) = \int_{\mathbf{R}^d}\theta(x_1-x_2)\varphi(x_1)dx_1.$$

Le théorème 9.2.1 implique que

$$\begin{aligned}\langle T, \check{\theta}\star\varphi\rangle &= \int_{\mathbf{R}^d}\langle T, \theta(x_1-\cdot)\rangle\varphi(x_1)dx_1\\ &= \int_{\mathbf{R}^d}\langle T, \tau_{x_1}\check{\theta}\rangle\varphi(x_1)dx_1.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \langle T, \tau_x\theta\rangle$ est localement bornée car si x varie dans un compact K_0. Donc

$$\forall x \in K_0\,,\ \text{Supp}\ \ \tau_x\theta \subset K_0 - \text{Supp}\ \ \theta.$$

Le fait que T soit une distribution assure le résultat.

Théorème 9.2.2 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Alors $T\star\theta$ est une fonction C^∞ et*

$$\partial^\alpha(T\star\theta) = (\partial^\alpha T)\star\theta = T\star\partial^\alpha\theta.$$

Démonstration du théorème 9.2.2 Nous allons étudier le quantité

$$\Delta_{x,h} \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \tau_{x+h}\check{\theta}\rangle - \langle T, \tau_x\check{\theta}\rangle - \sum_{j=1}^{d} h_j \langle T, \tau_x(\check{\partial_j\theta})\rangle.$$

La formule de Taylor avec reste intégral dit que

$$\begin{aligned}\theta(x+h-y) - \theta(x-y) - \sum_{j=1}^{d} h_j \partial_j\theta(x-y) &= \Psi(x,h,y) \quad \text{avec} \\ \Psi(x,h,y) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{1\le j,k\le d} \frac{h_j h_k}{2} \int_0^1 (1-t)\partial_j\partial_k\theta(x+th-y)dt.\end{aligned}$$

Si $x \in K$ et $|h| \le 1$, alors on a

$$\text{Supp } \Psi(x,h,\cdot) \subset \widetilde{K} \stackrel{\text{déf}}{=} K + B(0,1) - \text{Supp } \theta.$$

Comme T est une distribution, il existe C et p tels que

$$\forall \varphi \in \widetilde{K}\,,\ |\langle T, \varphi\rangle| \le C \sup_{|\alpha|\le p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in K$ et tout $h \in B(0,1)$,

$$\begin{aligned}|\langle T, \Psi(x,h,\cdot)\rangle| &\le C \sup_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \Psi(x,h,\cdot)\|_{L^\infty} \\ &\le C|h|^2 \sup_{|\alpha|\le N+2} \|\partial^\alpha \theta\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

D'où le théorème.

Proposition 9.2.2 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, alors on a*

$$\text{Supp } (T \star \varphi) \subset \text{Supp } T + \text{Supp } \varphi$$

avec $A + B \stackrel{déf}{=} \{a+b\,,\ (a,b) \in A \times B\}$.

Démonstration de la proposition 9.2.2 Observons tout d'abord que la somme d'un fermé et d'un compact est un fermé. (Exercice, démontrez-le!). Soit $x \notin \text{Supp } T + \text{Supp } \varphi$. Par définition de la convolution, on a

$$(T \star \varphi)(x) = \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle.$$

Or Supp $\tau_x\check{\varphi} = x - \text{Supp } \varphi$. Par hypothèse, l'intersection entre $(x - \text{Supp } \varphi)$ et Supp T est vide. Donc

$$T \star \varphi(x) = 0.$$

D'où la proposition qui entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 9.2.2 *Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ l'application A_S définie par*

$$A_S \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) & \to & \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \\ \theta & \mapsto & \check{S} \star \theta \end{array} \right.$$

vérifie les hypothèses du théorème 8.2.1.

Démonstration du corollaire 9.2.2 Il suffit d'appliquer le théorème 9.2.2 et la proposition 9.2.2.

Comme nous allons le voir dans la section suivante, cette proposition va nous permettre de définir la convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact.

Nous allons maintenant utiliser les propriétés que nous avons démontrées sur la convolution pour démontrer la propriété d'approximation suivante.

Théorème 9.2.3 *Soit T une distribution sur Ω. Il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ tel que, pour toute fonction de test φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on ait*

$$\lim_{n\infty}\int_\Omega T_n(x)\varphi(x)dx = \langle T,\varphi\rangle.$$

Démonstration du théorème 9.2.3 Nous allons procéder par troncature puis régularisation. Le théorème 1.5.2 page 29 affirme l'existence d'une suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que K_n soit inclus dans $\overset{\circ}{K}_{n+1}$ et telle que la réunion des K_n soit l'ouvert Ω tout entier. Soit χ une fonction paire de $\mathcal{D}(B(0,1))$ d'intégrale 1, on pose

$$\chi_\varepsilon(x) \overset{\text{déf}}{=} \varepsilon^{-d}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \quad \text{et} \quad \theta_n \overset{\text{déf}}{=} \chi_{\varepsilon_n}\star\mathbf{1}_{K_n}$$

où l'on a pris soin de choisir ε_n assez petit pour que

$$K_n + \overline{B}(0,2\varepsilon_n)\subset\Omega \quad \text{et} \quad \lim_{n\infty}\varepsilon_n = 0. \tag{9.7}$$

Comme Supp $\theta_n \subset K_n + B(0,\varepsilon_n)$, on a $\theta_n\in\mathcal{D}(\Omega)$. La distribution $\theta_n T$ est une distribution à support compact dans Ω donc dans $\mathbf{R}^d$. On pose alors

$$T_n \overset{\text{déf}}{=} (\theta_n T)\star\chi_{\varepsilon_n}.$$

D'après le corollaire 9.2.2, T_n appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Il nous reste donc à démontrer que T_n converge vers T au sens des distributions. Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$. Par définition de la convolution et de la multiplication, on a, grâce à la parité de χ,

$$\begin{aligned}\int_\Omega T_n(x)\varphi(x)dx &= \langle(\theta_n T)\star\chi_{\varepsilon_n},\varphi\rangle\\ &= \langle\theta_n T,\chi_{\varepsilon_n}\star\varphi\rangle\\ &= \langle T,\theta_n(\chi_{\varepsilon_n}\star\varphi)\rangle\end{aligned}$$

Le support de $\chi_{\varepsilon_n}\star\varphi$ est inclus dans Supp $\varphi + B(0,\varepsilon_n)$. Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, il existe un entier n_0 et un compact $\widetilde{K_0}$ de Ω tel que, pour tout $n\geq n_0$, on ait

$$\text{Supp }(\chi_{\varepsilon_n}\star\varphi)\subset\widetilde{K_0}.$$

Comme θ_n vaut 1 près de $\{x\,,\ d(x,K_n^c)\geq\varepsilon_n\}$, il existe un entier n_1 tel que

$$n\geq n_1 \Longrightarrow \theta_n = 1 \quad \text{sur} \quad \widetilde{K_0}.$$

Ainsi donc, pour $n\geq\max\{n_0,n_1\}$, on a

$$\theta_n(\chi_{\varepsilon_n}\star\varphi) = \chi_{\varepsilon_n}\star\varphi\in\mathcal{D}_{\widetilde{K_0}}.$$

Par définition d'une distribution, il existe une constante C et un entier p tel que

$$\forall\psi\in\mathcal{D}_{\widetilde{K_0}}\,,\ |\langle T,\psi\rangle|\leq C\sup_{|\alpha|\leq p}\|\partial^\alpha\psi\|_{L^\infty}.$$

De plus, l'inégalité page 84 concluant la démonstration du théorème 5.4.5 page 83 implique que

$$\lim_{n\infty} \sup_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha(\chi_{\varepsilon_n} \star \varphi)\|_{L^\infty} = 0.$$

On en déduit alors que

$$\lim_{n\infty} \langle T, \varphi - \chi_{\varepsilon_n} \star \varphi\rangle = 0.$$

Le théorème est alors démontré.

9.3 La convolution entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}'$

Nous allons utiliser le corollaire 9.2.2 pour poser la définition suivante.

Définition 9.3.1 *Soient S une distribution à support compact sur $\mathbf{R}^d$ et T une distribution sur $\mathbf{R}^d$. On définit alors la distribution $T \star S$ sur $\mathbf{R}^d$ par*

$$T \star S \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t A_S T \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \langle T \star S, \varphi\rangle = \langle T, \check{S} \star \varphi\rangle$$

pour φ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ et où $\check{S}$ est définie dans la remarque après la définiton 8.2.3 page 114.

Exemple Nous allons démontrer l'analogue de la relation (9.3), c'est-à-dire la convoluée de T avec la masse de Dirac δ_0. Une application de la définition et de (9.3) assure que, pour toute fonction de test φ,

$$\begin{aligned} \langle T \star \delta_0, \varphi\rangle &= \langle T, \check{\delta}_0 \star \varphi\rangle \\ &= \langle T, \delta_0 \star \varphi\rangle \\ &= \langle T, \varphi\rangle. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Nous allons maintenant démontrer un analogue du corollaire (9.2.1) et du théorème 9.2.2.

Théorème 9.3.1 *Soit f une fonction $C^\infty(\mathbf{R}^d)$ et S une distribution à support compact. Alors $f \star S$ est une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^d$, on a*

$$(f \star S)(x) = \langle S, \tau_x \check{f}\rangle \quad \textit{et} \quad \partial^\alpha(f \star S) = (\partial^\alpha f) \star S = f \star \partial^\alpha S.$$

Démonstration du théorème 9.3.1 Soit φ une fonction de test, par définition de la convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact, on a

$$\langle f \star S, \varphi\rangle = \langle f, \check{S} \star \varphi\rangle.$$

D'après le corollaire 9.2.1, la proposition 9.2.2, et le théorème 9.2.2, la distribution $\check{S} \star \varphi$ appartient à $\mathcal{D}_K$ avec $K \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Supp } \varphi - \text{Supp } S$. De plus,

$$(\check{S} \star \varphi)(x) = \langle \check{S}, \tau_x \check{\varphi}\rangle.$$

Il en résulte que

$$\langle f \star S, \varphi\rangle = \int_K f(x) \langle \check{S}, \tau_x \check{\varphi}\rangle dx.$$

D'après le théorème 9.2.1, on a

$$\langle f \star S, \varphi\rangle = \Big\langle \check{S}, \int_K f(x) \tau_x \check{\varphi} dx \Big\rangle.$$

Par définition, on a, pour tout $y \in \text{Supp } \varphi$,

$$\begin{aligned}\Big(\int_K f(x)\tau_x\check{\varphi}dx\Big)(y) &= \int f(x)\varphi(x-y)dx \\ &= \int f(y+z)\varphi(z)dz.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle f \star S, \varphi\rangle &= \Big\langle \check{S}, \int f(z+\cdot)\varphi(z)dz\Big\rangle \\ &= \Big\langle S, \int f(z-\cdot)\varphi(z)dz\Big\rangle.\end{aligned}$$

À nouveau d'après le théorème 9.2.1, on a

$$\begin{aligned}\langle f \star S, \varphi\rangle &= \int \langle \check{S}, f(-\cdot+z)\rangle\varphi(z)dz \\ &= \int \langle \check{S}, \tau_z\check{f}\rangle\varphi(z)dz.\end{aligned}$$

Pour démontrer que la fonction

$$x \longmapsto \langle S, \tau_x\check{f}\rangle$$

est C^∞ et satisfait les relations de dérivation, il sufit de reprendre mot pour mot la démonstration du théorème 9.2.2.

Proposition 9.3.1 *Soit T une distribution sur $\mathbf{R}^d$ et S une distribution à support compact sur $\mathbf{R}^d$. Alors on a*

$$\text{Supp } T \star S \subset \text{Supp } T + \text{Supp } S.$$

Démonstration de la proposition 9.3.1 Soit φ une fonction de test dont le support ne rencontre pas $\text{Supp } T + \text{Supp } S$. On a alors

$$\langle T \star S, \varphi\rangle = \langle T, \check{S} \star \varphi\rangle$$

D'après la proposition 9.2.2, on a

$$\text{Supp } (\check{S} \star \varphi) \subset -\text{Supp } S + \text{Supp } \varphi$$

Par hypothèse, $\text{Supp } T \cap -\text{Supp } S + \text{Supp } \varphi = \emptyset$. D'où la proposition.

Ceci implique en particulier que la convoluée de deux distributions à support compact est une distribution à support compact. L'opération de convolution apparaît comme une loi de composition sur les distributions à support compact. Nous allons maintenant déterminer ces propriétés.

Proposition 9.3.2 *Soit $(S_j)_{1\le j\le 2}$ une famille de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$, et $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ alors on a*

$$T \star \delta_0 = T\,,\ \delta_0 \star S_1 = S_1\,,\ S_1 \star S_2 = S_2 \star S_1 \quad et \quad (T \star S_1) \star S_2 = T \star (S_1 \star S_2).$$

En particulier, la loi $\star$ est commutative et associative dans $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ et son élément neutre est δ_0.

Démonstration de la proposition 9.3.2 Soit φ une fonction de test. Par définition de la convolution entre une distribution et une distribution à support compact et d'après le corollaire 9.2.1, on a

$$\begin{aligned}\langle T \star \delta_0, \varphi\rangle &= \langle T, \check{\delta}_0 \star \varphi\rangle \\ &= \langle T, \delta_0 \star \varphi\rangle \\ &= \langle T, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

De même, par définition de la convolution et d'après le corollaire 9.2.1, on a

$$\begin{aligned}\langle \delta_0 \star S_1, \varphi\rangle &= \langle \delta_0, \check{S}_1 \star \varphi\rangle \\ &= (\check{S}_1 \star \varphi)(0) \\ &= \langle \check{S}_1, \tau_0 \check{\varphi}\rangle \\ &= \langle \check{S}_1, \check{\varphi}\rangle \\ &= \langle S_1, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Pour démontrer la commutativité, on procède par régularisation, c'est-à-dire que l'on écrit, pour une fonction χ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, paire et d'intégrale 1,

$$\langle (S_1 \star \chi_n) \star S_2, \varphi\rangle = \langle (S_1 \star \chi_n), \check{S}_2 \star \varphi\rangle$$

où l'on a posé $\chi_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} n^d \chi(nx)$. D'après le corollaire 9.2.1, on

$$\check{S}_2 \star \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \quad \text{et} \quad (\check{S}_2 \star \varphi)(x) = \langle \check{S}_2, \tau_x \check{\varphi}\rangle.$$

D'où il résulte que

$$\langle (S_1 \star \chi_n) \star S_2, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} (S_1 \star \chi_n)(x) \langle \check{S}_2, \tau_x \check{\varphi}\rangle dx.$$

Le théorème 9.2.1 implique que

$$\langle (S_1 \star \chi_n) \star S_2, \varphi\rangle = \Big\langle \check{S}_2, \int_{\mathbf{R}^d} (S_1 \star \chi_n)(x) \tau_x \check{\varphi} dx \Big\rangle.$$

Par définition de la convolution, on a

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbf{R}^d} (S_1 \star \chi_n(x)) \tau_x \check{\varphi} dx\Big)(-y) &= \int_{\mathbf{R}^d} (S_1 \star \chi_n)(x) \varphi(x+y) dx \\ &= \langle S_1 \star \chi_n, \tau_{-y}\varphi\rangle \\ &= \langle S_1, \chi_n \star \tau_y \varphi\rangle \\ &= \Big\langle \check{S}_1, \int \chi(nz) \varphi(\cdot - y + z) dz \Big\rangle.\end{aligned}$$

D'après les propriétés des approximations de l'identité, on a, si p_j sont les ordres des distributions S_j

$$\lim_{n\infty} \sup_{\substack{|\alpha|\le p_1, |\beta|\le p_2 \\ x,y}} \Big\| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \Big(\int \chi_n(z) \varphi(x-y+z) dz - \varphi(x-y)\Big)\Big\|_{L^\infty} = 0.$$

Ainsi donc

$$\lim_{n\infty} \langle (S_1 \star \chi_n) \star S_2, \varphi\rangle = \langle S_2 \star S_1, \varphi\rangle.$$

Les propriétés des approximations de l'identité impliquent que

$$\lim_{n\infty} \langle (S_1 \star \chi_n), \check{S}_2 \star \varphi\rangle = \langle (S_1, \check{S}_2 \star \varphi\rangle.$$

D'où le fait que $S_1 \star S_2 = S_2 \star S_1$. La démonstration du fait que $(T \star S_1) \star S_2 = T \star (S_1 \star S_2)$ fonctionne avec les mêmes ressorts et est omise.

9.4 Un exemple d'application: la notion de solution fondamentale

Définition 9.4.1 *Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants, c'est-à-dire*

$$P \stackrel{déf}{=} \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \partial^\alpha$$

où $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq p}$ désigne une famille de nombres réels ou complexes. On dit qu'une distribution E est solution fondamentale si et seulement si

$$PE = \delta_0.$$

Remarque On peut démontrer (nous ne le ferons pas) que tout opérateur différentiel à coefficients constants P admet une solution fondamentale.

Proposition 9.4.1 *Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants et E une solution fondamentale de P. Alors P est un opérateur injectif de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ dans $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$. De plus, si S est une distribution à support compact, alors la distribution $T = E \star S$ est solution de $PT = S$.*

Démonstration de la proposition 9.4.1 Si S est une distribution à support compact et que $PS = 0$, alors on écrit, grâce à la proposition 9.3.2,

$$\begin{aligned} S &= \delta_0 \star S \\ &= (PE) \star S \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha (\partial^\alpha E) \star S. \end{aligned}$$

D'après le théorème 9.3.1, on a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha (E \star \partial^\alpha S) \\ &= E \star (PS) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur P est injectif de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ dans lui-même. Vérifions maintenant que l'on a $P(E \star S) = S$. À nouveau d'après le théorème 9.3.1, on peut écrire que

$$\begin{aligned} P(E \star S) &= \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \partial^\alpha (E \star S) \\ &= \Big(\sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha E \Big) \star S \\ &= \delta_0 \star S \\ &= S. \end{aligned}$$

D'où la proposition.

Éudions l'exemple de l'opérateur de Laplace Δ encore appelé Laplacien en trois dimension. Il s'agit de l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Nous allons utiliser la notion de solution fondamentale pour démontrer la théorème suivant.

Théorème 9.4.1 *Soit T une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^3$. Soit ω un sous ouvert de Ω tel que $\Delta T_{|\omega}$ soit une fonction C^∞ sur ω. Alors $T_{|\omega}$ est aussi une fonction C^∞ sur ω.*

Démonstration du théorème 9.4.1 Elle repose sur la détermination de la solution fondamentale du laplacien et sur un lemme à propos de la convolution.

Proposition 9.4.2 *On a, au sens des distributions,*

$$\Delta\Big(-\frac{1}{4\pi|x|}\Big) = \delta_0.$$

Démonstration de la proposition 9.4.2 Soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ valant 1 au voisinage de 0. La fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{|x|}$$

étant localement intégrable, on a, pour toute fonction de test φ,

$$\lim_{n\infty} \int (1-\chi(n|x|))\frac{1}{4\pi|x|}\varphi(x)dx = \int (1-\chi(nx))\frac{1}{4\pi|x|}\varphi(x)dx.$$

Les fonctions $f_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (1-\chi(nx))\dfrac{1}{|x|}$ sont C^∞. Un calcul facile donne

$$\begin{aligned}
\Delta f_n(x) &= -\frac{n^2}{4\pi|x|}\chi''(nx) \\
&= -n^3 g(n|x|) \quad \text{avec} \quad g(r) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\chi''(r)}{4\pi r}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc, pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$,

$$\int \Delta f_n(x)\varphi(x)dx = \int g(|x|)\Big(\varphi\big(\frac{x}{n}\big) - \varphi(0)\Big)dx + \varphi(0)\int g(|x|)dx$$

La fonction φ étant continue, le théorème de Lebesgue assure que

$$\lim_{n\infty} \int g(|x|)\Big(\varphi\big(\frac{x}{n}\big) - \varphi(0)\Big)dx = 0.$$

Un changement de variables en coordonnées polaires suivi d'une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\lim_{n\infty} \int \Delta f_n(x)\varphi(x)dx &= \varphi(0)\int_0^\infty \chi''(r)rdr \\
&= -\varphi(0)\Big([r\chi'(r)]_0^\infty - \int_0^\infty \chi'(r)dr\Big) \\
&= \chi(0)\langle\delta_0,\varphi\rangle \\
&= \langle\delta_0,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

D'où la proposition.

Lemme 9.4.1 *Soient E une distribution sur $\mathbf{R}^d$ telle que $E_{|\,\mathbf{R}^d\setminus\{0\}}$ soit une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ et S une distribution à support compact sur $\mathbf{R}^d$. Alors*

$$(E\star S)_{|\,\mathbf{R}^d\setminus \text{Supp }\ S}\in C^\infty(\mathbf{R}^d\setminus \text{Supp }\ S).$$

Démonstration du lemme 9.4.1 Soit ε un réel strictement positif et θ_ε une fonction de $\mathcal{D}(B(0,\varepsilon))$ valant 1 au voisinage de 0. On écrit alors que

$$E\star S=(\theta_\varepsilon E)\star S+((1-\theta_\varepsilon)E)\star S.$$

Comme θ_ε vaut 1 au voisinage de 0, on a

$$(1-\theta_\varepsilon)E\in C^\infty(\mathbf{R}^d).$$

De plus, d'après la proposition 9.3.1, on a

$$\text{Supp }(\theta_\varepsilon\star S)\subset B(0,\varepsilon)+\text{Supp }\ S.$$

Il en résulte que, pour tout ε strictement positif, on a

$$(E\star S)_{|\,\mathbf{R}^d\setminus(\text{Supp }\ S+B(0,\varepsilon))}\in C^\infty(\mathbf{R}^d\setminus(\text{Supp }\ S+B(0,\varepsilon))).$$

D'où le lemme.

Retour à la démonstration du théorème 9.4.1 Soit $\widetilde{\omega}$ un sous ouvert de ω tel que $\overline{\widetilde{\omega}}$ soit un compact de ω. On considère une fonction θ de $\mathcal{D}(\omega)$ valant 1 au voisinage de $\overline{\widetilde{\omega}}$. Considèrons alors la distribution à support compact θT. et calculons $\Delta(\theta T)$. On a

$$\Delta(\theta T)=\theta\Delta T+S\quad\text{avec}\quad S\overset{\text{déf}}{=}2\sum_{j=1}^{3}\partial_j\theta\partial_j T+(\Delta\theta)T.$$

Comme θT est une distribution à support compact, la proposition 9.4.1 implique que

$$\theta T=-\frac{1}{4\pi|\cdot|}\star\theta\Delta T-\frac{1}{4\pi|\cdot|}\star S$$

Par hypothèse, $\theta\Delta T$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$. Donc

$$-\frac{1}{4\pi|\cdot|}\star(\theta\Delta T)\in C^\infty(\mathbf{R}^3).$$

De plus, le lemme 9.4.1 assure que

$$-\frac{1}{4\pi|\cdot|}\star S\in C^\infty(\mathbf{R}^3\setminus\text{Supp }\ S).$$

Mais, le support de S ne rencontre pas ω. D'où le théorème.

Chapitre 10

Les distributions tempérées et la transformée de Fourier

Introduction

Le but de ce chapitre est de définir la transformée de Fourier des distributions. Pour définir une opération sur les distributions, il suffit de pouvoir la définir sur les fonctions de test, puis de procéder par transposition suivant la procédure validée par le théorème 8.2.1 page 113. Le lemme 6.2.1 page 95 semble annoncer que tout va pour le mieux puisqu'il affirme en particulier que, pour tout couple de fonction (φ, θ) de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, on a

$$\langle \widehat{\theta}, \varphi \rangle = \langle \theta, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Il faudrait alors que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ dans lui-même. Or c'est n'est pas du tout le cas. En effet, soit un fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Alors

$$\partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^\alpha \int e^{-i(x|\xi)} x^\alpha \varphi(x) dx.$$

La fonction φ étant à support dans une boule $B(0, R)$, on a

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha \widehat{\varphi}\|_{L^\infty} &\leq \int_{\mathbf{R}^d} |x^\alpha \varphi(x)| dx \\ &\leq R^{|\alpha|} \|\varphi\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Pour tout x_0 de $\mathbf{R}^d$, le rayon de convergence de la série entière $\left((\alpha!)^{-1}(x - x_0)^\alpha\right)_{\alpha \in \mathbf{N}^d}$ est infini. La transformée de Fourier de φ est donc une fonction analytique réelle. Une telle fonction ne peut évidemment pas être à support compact sans être nulle.

Cela implique d'élargir la classe des fonctions de test, et donc de restreindre la classe des distributions pour lesquelles nous pourrons parler de transformée de Fourier.

10.1 L'espace $\mathcal{S}$ et la transformée de Fourier

Rappelons quelques notations. Soit α un multientier, c'est-à-dire un élément de $\mathbf{N}^d$, on appelle longueur de α et l'on note $|\alpha|$ l'entier $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. La notation $\beta \leq \alpha$ signifie que, pour tout j, $\beta_j \leq \alpha_j$; la notation $\beta < \alpha$ signifie que $\beta \leq \alpha$ et que $\beta \neq \alpha$. De plus, si $x \in \mathbf{R}^d$

et $\alpha \in \mathbf{N}^d$, on pose $x^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \Pi_j x_j^{\alpha_j}$. Enfin, si f est une fonction $|\alpha|$ fois différentiable, sur un ouvert de $\mathbf{R}^d$, alors, on pose

$$\partial^\alpha f \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} f \quad \text{et} \quad D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{i}\right)^\alpha f.$$

Définition 10.1.1 *L'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, noté simplement $\mathcal{S}$ en l'absence d'ambiguité, est l'espace des fonctions u indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^d$ telles que, pour tout entier k, on ait*

$$\|u\|_{k,\mathcal{S}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^d \\ |\alpha|,|\beta|\leq k}} |x^\beta \partial^\alpha u(x)| < \infty.$$

Remarques Il est clair que $\mathcal{S}$ est inclus dans $L^1 \cap L^\infty$, que l'application linéaire ∂^α envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ puisque l'on a

$$\|\partial^\alpha u\|_{k,\mathcal{S}} \leq \|u\|_{k+|\alpha|,\mathcal{S}}.$$

Donnons maintenant quelques exemples d'éléments de $\mathcal{S}$. Les fonctions indéfiniment différentiables à support compact sont bien sûr des éléments de $\mathcal{S}$. De plus, les gaussiennes, c'est-à-dire les fonctions du type $e^{-a|x|^2}$ avec a réel strictement positif, sont aussi des éléments de $\mathcal{S}$.

Proposition 10.1.1 *Pour toute fonction f de $\mathcal{S}$ et pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^d$, on a*

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \quad et \quad \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Démonstration de la proposition 6.2.1 On procède par intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) &= \int e^{-i(x|\xi)} D^\alpha f(x) dx \\
&= \int e^{-i(x|\xi)} \left(\frac{\partial}{i}\right)^\alpha f(x) dx \\
&= \int \left(-\frac{\partial}{i}\right)^\alpha e^{-i(x|\xi)} f(x) dx \\
&= \xi^\alpha \int e^{-i(x|\xi)} f(x) dx \\
&= \xi^\alpha \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x^\alpha f)(x) &= \int e^{-i(x|\xi)} x^\alpha f(x) dx \\
&= \int \left(-\frac{\partial_\xi}{i}\right)^\alpha e^{-i(x|\xi)} f(x) dx \\
&= (-D_\xi)^\alpha \int e^{-i(x|\xi)} f(x) dx \\
&= (-D_\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

D'où la proposition.

Proposition 10.1.2 *L'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ est "dense"dans $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que l'on a*

$$\forall u \in \mathcal{S}\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \forall k \in \mathbf{N}\,,\ \exists \varphi \in \mathcal{D}\ /\ \|u-\varphi\|_{k,\mathcal{S}} < \varepsilon.$$

Démonstration de la proposition 10.1.2 Soit χ un élément de $\mathcal{D}$ valant 1 près de l'origine. Posons

$$\varphi_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \chi\left(\frac{x}{n+1}\right) u(x).$$

Il est clair que

$$x^\beta \partial^\alpha (u-\varphi_n) = x^\beta \left(1-\chi\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)\partial^\alpha u + \sum_{0\le\gamma<\alpha} C_\alpha^\gamma x^\beta \partial^\gamma u \frac{1}{(n+1)^{|\alpha-\gamma|}} (\partial^{\alpha-\gamma}\chi)\left(\frac{x}{n+1}\right).$$

Il est immédiat que

$$(1+|x|)\left|x^\beta\left(1-\chi\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)\partial^\alpha u\right| \le (1+n)|x^\beta \partial^\alpha u(x)|.$$

De plus, par définition de χ, on a

$$\left|x^\beta \partial^\gamma u \frac{1}{(n+1)^{\alpha-\gamma}} (\partial^{\alpha-\gamma}\chi)\left(\frac{x}{n+1}\right)\right| \le \frac{1}{n+1}\|u\|_{k,\mathcal{S}}.$$

Finalement, on obtient

$$|x^\beta \partial^\alpha (u-\varphi_n)(x)| \le \frac{1}{n+1}\|u\|_{k+1,\mathcal{S}}$$

et ce pour tout couple (α,β) de multientiers de longueur plus petite que 1. D'où

$$\|u-\varphi_n\|_{k,\mathcal{S}} \le \frac{1}{n+1}\|u\|_{k+1,\mathcal{S}}$$

et ainsi la proposition.

Cet espace est remarquablement adapté à la transformée de Fourier; il est l'un des rares espaces explicitement définis et stables par transformation de Fourier. Nous avons déja vu que l'espace L^2 vérifiait cette propriété.

Théorème 10.1.1 *La transformée de Fourier laisse l'espace $\mathcal{S}$ globalement invariant, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. De plus la transformée de Fourier vérifie que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe une constante C et un entier $k' \in \mathbf{N}$ tel que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}\,,\ \|\widehat{\varphi}\|_{k,\mathcal{S}} \le C\|\varphi\|_{k',\mathcal{S}}.$$

Démonstration du théorème 10.1.1 Il s'agit de majorer $\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{u}(\xi)$. D'après la proposition 10.1.1, on a

$$\xi^\beta (-D)^\alpha \widehat{u}(\xi) = \int e^{-i(x|\xi)} D^\beta (x^\alpha u)(x)dx$$

D'après la formule de Leibnitz, il vient

$$\xi^\beta (-D)^\alpha \widehat{u}(\xi) = \sum_{|\gamma|,|\delta|\le k} A_{\gamma,\delta} \int e^{-i(x|\xi)} x^\gamma \partial^\delta u(x)dx.$$

Or, on a

$$\left|\int e^{-i(x|\xi)}x^\gamma\partial^\delta u(x)dx\right| \leq \int(1+|x|^2)^{-\frac{d+1}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{d+1}{2}}x^\gamma\partial^\delta u(x)dx.$$

D'où il résulte que

$$\begin{aligned}|\xi^\beta\partial^\alpha\widehat{u}(\xi)| &\leq C\|u\|_{k+d+1,\mathcal{S}}\int(1+|x|)^{-d-1}dx\\ &\leq C\|u\|_{k+d+1,\mathcal{S}}\end{aligned}$$

et ce, pour tout couple (α,β) de multientier de longueur inférieure ou égale à k. D'où le théorème.

On peut démontrer maintenant la proposition suivante qui n'est finalement qu'une version de la proposition 6.1.1

Proposition 10.1.3 *Si (f,g) appartient à $L^2\times L^2$ ou bien à $\mathcal{F}(L^1)\times L^1$, alors, on a*

$$\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-d}\widehat{f}\star\widehat{g}.$$

Démonstration de la proposition 10.1.3 Pour démontrer cette formule, commençons par la démontrer pour f et g dans $\mathcal{S}$. L'utilisation systématique de la formule d'inversion de Fourier permet d'écrire

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-d}\mathcal{F}(\widehat{f}\star\widehat{g}) &= (2\pi)^{-d}\mathcal{F}^2f\mathcal{F}^2g\\ &= (2\pi)^d\check{f}\check{g}\\ &= (2\pi)^d(\check{fg})\\ &= \mathcal{F}^2(fg).\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de démontrer que l'application bilinéaire

$$\mathcal{F}(fg) - (2\pi)^{-d}\widehat{f}\star\widehat{g}$$

est continue de $L^2\times L^2$ dans L^∞ et de $\mathcal{F}(L^1)\times L^1$. On a

$$\|\mathcal{F}(fg)\|_{L^\infty} \leq \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

De plus, on a

$$\|\widehat{f}\star\widehat{g}\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{L^2}\|\widehat{g}\|_{L^2} \leq (2\pi)^d\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

De manière analogue, on a

$$\|\mathcal{F}(fg)\|_{L^\infty} \leq \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1} \leq (2\pi)^{-d}\|\widehat{f}\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

Enfin, on a

$$\|\widehat{f}\star\widehat{g})\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{L^1}\|\widehat{g}\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

D'où la proposition.

10.2 Définition des distributions tempérées

Nous ne définirons le concept de distributions tempérées que sur l'espace $\mathbf{R}^d$.

Définition 10.2.1 *On appelle distribution tempérée toute distribution T sur $\mathbf{R}^d$ telle qu'il existe un entier k et une constante C telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{k,\mathcal{S}}. \tag{10.1}$$

On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ ou simplement $\mathcal{S}'$ en l'absence d'ambiguîté l'espace vectoriel des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^d$.

Nous allons donner quelques exemples de distributions tempérées. Il est légitime de se demander où apparaissent les fonctions dans ce cadre. Pour répondre à cette question, on définit l'espace suivant

Définition 10.2.2 *Soit p un élément de $[1, +\infty]$, on désigne par $L^p_M(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables telles qu'il existe un entier N tel que $(1 + |x|)^{-N} f(x)$ soit dans $L^p(\mathbf{R}^d)$.*

Exercice 10.2.1 *Démontrer que les espaces $L^p_M(\mathbf{R}^d)$ forment une famille décroissante d'espaces, c'est-à-dire que si $p \leq q$, alors $L^q_M(\mathbf{R}^d) \subset L^p_M(\mathbf{R}^d)$.*

Exercice 10.2.2 *Démontrer que la fonction exponentielle n'appartient pas à $L^1_M(\mathbf{R}^d)$ et que ce n'est pas une distribution tempérée.*

Remarque L'exercice ci-dessus montre que la notion de distributions tempérées contient une information sur le comportement à l'infini.

Exercice 10.2.3 *Démontrer que la distribution $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ définie à la définition 8.1.3 page 109 est une distribution tempérée.*

L'identification des fonctions avec les distributions tempérées se fait grâce au théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 10.2.1 *Soit ι l'application définie par*

$$\iota \left\{ \begin{array}{ccc} L^1_M(\mathbf{R}^d) & \to & \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \\ f & \mapsto & \iota(f) : \varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\varphi(x)dx \end{array} \right.$$

est une injection linéaire. De plus, on a la propriété suivante. Soit N tel que $(1+|x|)^{-N} f(x) \in L^1(\mathbf{R}^d)$, alors

$$|\langle \iota(f), \phi\rangle| \leq \|(1 + |\cdot|)^{-N} f\|_{L^1} \|\phi\|_{N,\mathcal{S}}.$$

La définition de la transformation de Fourier d'une distribution par dualité, c'est-à-dire par une formule du type

$$\langle \widehat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle$$

impose de pouvoir définir T sur l'espace $\mathcal{S}$ tout entier. Cette extension se fait grâce au théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 10.2.2 *Soit T une distribution tempérée sur $\mathbf{R}^d$. Il existe une unique forme linéaire $\widetilde{T}$ définie sur $\mathcal{S}$ telle que $\widetilde{T}_{|\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)} = T$ et telle qu'il existe une constante C et un entier k telle que*

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,, |\langle \widetilde{T}, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_{k,\mathcal{S}}. \tag{10.2}$$

Convention Dans toute la suite, on identifiera T et $\widetilde{T}$. Ainsi donc, une distribution tempérée désignera aussi bien une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ satisfaisant (10.1) qu'une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ vérifiant (10.2).

Proposition 10.2.1 *L'espace des distributions à support compact est inclus dans l'espace des distributions tempérées.*

Démonstration de la proposition 10.2.1 Soit T une distribution à support compact. Il existe un entier N et un compact K tels que

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha\leq N}} |\partial^\alpha \varphi(x)\|.$$

Par définition de $\|\cdot\|_{k,\mathcal{S}}$, on a

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_{k,\mathcal{S}}.$$

D'où la proposition.

Proposition 10.2.2 *Tout distribution tempérée est d'ordre fini. Toute distribution à support compact est une distribution tempérée.*

Démonstration de la proposition 10.2.2 Par définition d'une distribution tempérée, il existe un entier k et une contante C telle que, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, on a

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{k,\mathcal{S}}.$$

Par définition de $\|\cdot\|_{k,\mathcal{S}}$, on a, pour tout compact K et pour toute fonction φ de $\mathcal{D}_K$,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{k,\mathcal{S}} &\leq \sup_{\substack{\|\alpha|,\|\beta|\leq k\\ x\in K}} \|x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)\|_{L^\infty}\\ &\leq \Big(\sup_{\substack{j\leq k\\ x\in K}} |x|^j\Big)\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

D'après la définition 8.1.5 page 110, la distribution tempérée T est d'ordre fini.

Soit S une distribution à support compact sur $\mathbf{R}^d$. D'après la proposition 9.1.2, il existe une constante C et un entier p tel que, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, on ait

$$|\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty} \leq C\|\varphi\|_{p,\mathcal{S}}.$$

D'où la proposition. Nous allons maintenant donner une définition de la convergence d'une suite de distributions tempérées.

Définition 10.2.3 *Soient $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et T une distribution tempérée sur $\mathbf{R}^d$. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers T si et seulement si*

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle.$$

10.3 Opérations sur les distributions tempérées.

Comme lors du chapitre 8, nous allons définir un certain nombre d'opérations linéaires continues sur les fonctions de $\mathcal{S}$, puis nous étendrons ces opérations par dualité sur l'espace $\mathcal{S}'$. Commençons par ce qui a motivé la construction précédente, à savoir la définition de la transformation de Fourier.

Proposition 10.3.1 *Soit T une distribution tempérée. La forme linéaire définie par*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) & \to & \mathbf{C} \\ \phi & \mapsto & \langle T, \widehat{\phi} \rangle \end{array} \right.$$

est une distribution tempérée.

Démonstration de la propostion 10.3.1 Par définition d'une distribution tempérée, il existe un entier k et une constante C telle que

$$\forall \theta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle T, \theta \rangle| \leq C \|\theta\|_{k,\mathcal{S}}. \tag{10.3}$$

Le théorème 10.1.1 dit que, pour tout entier k, il existe un entier k' et une constante C telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}\,,\ \|\widehat{\phi}\|_{k,\mathcal{S}} \leq C \|\phi\|_{k',\mathcal{S}}.$$

L'inégalité (10.3) appliquée avec $\theta = \widehat{\phi}$ implique alors que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle T, \theta \rangle| \leq C \|\phi\|_{k',\mathcal{S}},$$

ce qui démontre la proposition.

On peut maintenant définir la notion de transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Définition 10.3.1 *Soit T un élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. On appelle transformée de Fourier de T la distribution tempérée définie par*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) & \to & \mathbf{C} \\ \phi & \mapsto & \langle T, \widehat{\phi} \rangle \end{array} \right.$$

La transformée de Fourier de T est notée $\mathcal{F}(T)$ ou bien $\widehat{T}$.

Comme dans le cas de la définition de la dérivation d'une distribution, nous devons vérifier que cela généralise bien la définition de la transformée de Fourier donnée au chapitre 6. Soit f une fonction de $L^1(\mathbf{R}^d)$. Grâce au théorème de Fubini, on a, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{f}(x)\phi(x)dx &= \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} e^{-i(x|y)} f(y)\phi(x)dxdy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(y)\widehat{\phi}(y)dy. \end{aligned}$$

Donc la définition de la transformation de Fourier donnée ici coïncide bien avec celle donnée au chapitre 6 pour les fonctions de L^1.

Nous avons aussi défini la transformation de Fourier sur L^2 par prolongement continu de $L^1 \cap L^2$ à L^2. Il suffit donc de vérifier que notre définition au sens des distributions,

restreinte à l'espace L^2, définit une application linéaire continue de L^2 dans L^2. On peut écrire que, pour toute distribution u dans L^2 et pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{S}$, on a

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{u}, \phi \rangle| &\leq |\langle u, \widehat{\phi} \rangle| \\ &= \Big| \int_{\mathbf{R}^d} u(x) \widehat{\phi}(x) dx \Big| \\ &\leq \|u\|_{L^2} \|\widehat{\phi}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Le théorème de Fourier-Plancherel 6.2.2 affirme que

$$\|\widehat{\phi}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|\phi\|_{L^2}.$$

D'où il résulte que

$$|\langle \widehat{u}, \phi \rangle| \leq (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|\phi\|_{L^2}.$$

Ainsi donc la distribution tempérée $\widehat{u}$ peut se prolonger en une forme linéaire continue sur L^2. On peut donc l'identifier à une fonction de L^2. La transformation de Fourier coïncidant sur l'espace L^1 donc en particulier sur l'espace $L^1 \cap L^2$ qui est dense dans L^2, toutes les définitions coïncident.

Comme dans le cas des opérations sur les distributions, ce que nous venons de faire est un cas particulier d'une méthode générale. Nous allons établir maintenant un théorème qui est, dans le cadre des distributions tempérées, l'analogue du théorème de dualité 8.2.1 page 113.

Théorème 10.3.1 *Soit A une application linéaire de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ telle que, pour tout entier k, il existe un entier k' et une constante C telle que*

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ \|A\phi\|_{k,\mathcal{S}} \leq C \|\phi\|_{k',\mathcal{S}}.$$

Alors l'application linéaire ${}^tA$

$${}^tA \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) & \to & \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \\ T & \mapsto & {}^tAT \quad \text{définie par} \quad \langle {}^tAT, \phi \rangle = \langle T, A\phi \rangle. \end{array} \right.$$

est bien définie. De plus, elle est continue au sens suivant: si $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de distributions tempérées qui converge vers une distribution tempérée T, alors la suite $({}^tAT_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ${}^tAT$.

Démonstration du théorème 10.3.1 Par définition des distributions tempérées, il existe un entier k et une constante C telle que

$$\forall \theta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle T, \theta \rangle| \leq C \|\theta\|_{k,\mathcal{S}}.$$

En appliquant cette inégalité avec $\theta = A\phi$, on trouve que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle T, A\phi \rangle| \leq C \|A\phi\|_{k,\mathcal{S}}.$$

Par hypothèse sur l'application linéaire A, il existe un entier k' et une constante C telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ \|A\phi\|_{k,\mathcal{S}} \leq C \|\phi\|_{k',\mathcal{S}}.$$

Ainsi donc, on a

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ |\langle T, A\phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{k',\mathcal{S}}.$$

La forme linéaire $\phi \mapsto \langle T, A\phi\rangle$ est donc bien une distribution tempérée. De plus, soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de distributions tempérées convergeant vers T au sens de la définition 10.2.3. Par définition de la convergence, ceci signifie que, pour toute fonction θ de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$,

$$\lim_{n\infty}\langle T_n, \theta\rangle = \langle T, \theta\rangle.$$

En appliquant cela avec $\theta = A\phi$, on trouve que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\,,\ \lim_{n\infty}\langle {}^tAT_n, \phi\rangle = \langle {}^tAT, \phi\rangle.$$

D'où le théorème.

Comme dans le chapitre 8, nous allons donner une liste d'opérations sur $\mathcal{S}$ que nous étendrons bien sûr à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Tout d'abord, définissons l'espaces suivant.

Définition 10.3.2 *On appelle espace des fonctions à croissance modérée (ou lente) et l'on désigne par $\mathcal{O}_M$ l'espace des fonctions f indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^d$ telles que*

$$\forall k \in \mathbf{N}\,,\ \exists N \in \mathbf{N}\,,\ \exists C \in \mathbf{R}^+\ /\ \sup_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha f(x)| \leq (1+|x|)^N.$$

On désigne par $L^1_{\mathcal{S}}$ l'espace des fonctions localement intégrables telles que, pour tout entier N, la fonction $(1+|x|)^N f(x)$ soit dans L^1.

Les polynômes sont d'excellents exemples de fonctions de $\mathcal{O}_M$. Les fonctions localement intégrables décroissant à l'infini plus vite que toute puissance négative de $|x|$ sont d'excellents exemples de fonctions de $L^1_{\mathcal{S}}$.

Proposition 10.3.2 *Les applications linéaires suivantes satisfont aux hypothèses du théorème 10.3.1*

- *l'application ∂^α;*
- *si f désigne une fonction de $\mathcal{O}_M$, l'application M_f désigne la multiplication par f;*
- *si f désigne une fonction de L^1_M, l'application $f\star$ désigne la convolution par f, c'est-à-dire que*

$$f \star \phi(x) \stackrel{déf}{=} \int_{\mathbf{R}^d} f(y)\phi(x-y)dy\,;$$

Démonstration de la proposition 10.3.2 Par définition des normes $\|\cdot\|_{k,\mathcal{S}}$, il est immédiat que

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{k,\mathcal{S}} \leq C\|\phi\|_{k+\alpha,\mathcal{S}}.$$

Pour la continuité de la multiplication, il suffit d'appliquer la formule de Leinitz qui dit que

$$\partial^\alpha(f\phi) = \sum_{\beta\leq\alpha} C^\beta_\alpha \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta \phi.$$

Comme la fonction f appartient à $\mathcal{O}_M$, il existe un entier N tel que, pour tout multientier γ de longueur plus petite que k, on ait

$$\forall x \in \mathbf{R}^d\,,\ |\partial^\gamma f(x)| \leq C(1+|x|)^N.$$

On en déduit alors que

$$\|\partial^\alpha(f\phi)(x)\|_{k,\mathcal{S}} \leq C\|\phi\|_{k+N,\mathcal{S}}.$$

Étudions maintenant la convolution. Par dérivation sous le signe somme, on a

$$\partial^\alpha(f\star\phi)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(y)\partial^\alpha\phi(x-y)dy.$$

De plus, on a $(1+|x|)^k \leq 2^k\Big((1+|x-y|)^k + (1+|y|)^k\Big)$. Ainsi donc, on peut écrire que

$$\begin{aligned}(1+|x|)^k|\partial^\alpha(f\star\phi)(x)| \leq 2^k\int_{\mathbf{R}^d}|f(y)|(1+|x-y|)^k|\partial^\alpha\phi(x-y)|dy \\ + 2^k\int_{\mathbf{R}^d}(1+|y|)^k|f(y)|\,|\partial^\alpha\phi(x-y)|dy.\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\|f\star\phi\|_{k,\mathcal{S}} \leq C\|(1+|\cdot|)^k f\|_{L^1}\|\phi\|_{k,\mathcal{S}}.$$

D'où la continuité de la convolution et ainsi la proposition puisque la continuité de la transformée de Fourier fait l'objet du théorème 10.1.1 page 141.

Nous allons maintenant, comme lors du chapitre 8, étendre ces opérations à l'espace $\mathcal{S}'$ en utilisant le théorème 10.3.1.

Définition 10.3.3 *On définit les opérations suivantes sur $\mathcal{S}'$:*

- *On définit la dérivation par*
$$\partial^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t((-\partial)^\alpha)\,;$$
- *on définit la multiplication par une fonction de $\mathcal{O}_M$ par ${}^tM_f$;*
- *on définit la convolution par une fonction f de $L^1_{\mathcal{S}}$ par*
$$f\star \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t(\check{f}\star\cdot)\,;$$

La vérification du fait que l'on étend bien les notions usuelles est sans surprise et laissée au lecteur.

Nous allons maintenant étendre aux distributions tempérées les diverses formules sur la transformation de Fourier démontrées dans le cadre de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$.

Théorème 10.3.2 (d'inversion de Fourier) *Pour toute distribution tempérée T, on a*

$$\mathcal{F}^{-1}T = (2\pi)^{-d}(\check{\mathcal{F}}T).$$

Démonstration du théorème 10.3.2 Écrivons que

$$\langle\mathcal{F}^{-1}T,\phi\rangle = \langle T,\mathcal{F}^{-1}\phi\rangle.$$

D'après le théorème 6.2.1 d'inversion de Fourier, on a

$$\mathcal{F}^{-1}\phi = (2\pi)^{-d}(\check{\mathcal{F}}\phi).$$

Or, on peut écrire, grâce au changement de variable $x = -x$, que

$$\begin{aligned}\check{\widehat{\phi}}(\xi) &\overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x|\xi)}\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(-x|\xi)}\phi(-x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)}\phi(-x)dx \\ &= \widehat{\check{\phi}}(\xi).\end{aligned}$$

D'où il résulte que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}^{-1}T, \phi\rangle &= (2\pi)^{-d}\langle T, \mathcal{F}(\check{\phi})\rangle \\ &= (2\pi)^{-d}\langle \widehat{T}, \check{\phi}\rangle \\ &= (2\pi)^{-d}\langle \check{\widehat{T}}, \phi\rangle.\end{aligned}$$

D'où le théorème.

Proposition 10.3.3 *Soit T une distribution tempérée. On a alors*

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = \xi^\alpha \widehat{T} \quad et \quad \mathcal{F}(x^\alpha T) = (-D)^\alpha \widehat{T}.$$

Démonstration de la proposition 10.3.3 On utilise la proposition 10.1.1. Par définition,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(D^\alpha T), \phi\rangle &= \langle D^\alpha T, \widehat{\phi}\rangle \\ &= \langle T, (-D)^\alpha \widehat{\phi}\rangle.\end{aligned}$$

La proposition 10.1.1 nous dit que

$$(-D)^\alpha \widehat{\phi} = \mathcal{F}(x^\alpha \phi).$$

D'où il résulte que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(D^\alpha T), \phi\rangle &= \langle T, \mathcal{F}(x^\alpha \phi)\rangle \\ &= \langle \widehat{T}, (x^\alpha \phi)\rangle \\ &= \langle \xi^\alpha \widehat{T}, \phi\rangle.\end{aligned}$$

D'où la proposition, la démonstration de la seconde relation, strictement analogue, est laissée au lecteur.

Proposition 10.3.4 *Soit T une distribution tempérée et θ une fonction de $\mathcal{S}$. Alors*

$$\mathcal{F}(T \star \theta) = \widehat{\theta}\widehat{T}$$

Démonstration de la propostion 10.3.4 Par définition de la transformée de Fourier et de la convolution, on a, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T \star \theta), \phi\rangle &= \langle T \star \theta, \widehat{\phi}\rangle \\ &= \langle T, \check{\theta} \star \widehat{\phi}\rangle \\ &= \langle \widehat{T}, \mathcal{F}^{-1}(\check{\theta} \star \widehat{\phi})\rangle.\end{aligned}$$

D'après la formule d'inversion de Fourier et la formule de calcul de la transformée de Fourier pour la convoluée des fonctions (voir Proposition 6.1.1 page 92), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\check{\theta} \star \widehat{\phi})(\xi) &= (2\pi)^{-d}\mathcal{F}(\check{\theta} \star \widehat{\phi})(-\xi) \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} e^{i(x|\xi)}\theta(y-x)\widehat{f}(y)dydx \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} e^{-i(y-x|\xi)}\theta(y-x)e^{i(y|\xi)}\widehat{f}(y)dydx \\
&= \widehat{\theta}(\xi)\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\phi})(\xi) \\
&= \widehat{\theta}(\xi)\phi(\xi).
\end{aligned}$$

Par définition de la multiplication, on en déduit que

$$\langle \mathcal{F}(T \star \theta), \phi \rangle = \langle \widehat{T}, \widehat{\theta}\phi \rangle = \langle \widehat{\theta}\widehat{T}, \phi \rangle.$$

D'où la proposition.

À FAIRE: $\mathcal{S}' \star \mathcal{E}'$

Ces relations sont extrêmement importantes dans les calculs pratiques de transformée de Fourier. Par exemple, calculons la transformée de Fourier de la masse de Dirac δ_0. Par définition de la transformation de Fourier, on a

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\delta}_0, \phi \rangle &= \langle \delta_0, \widehat{\phi} \rangle \\
&= \widehat{\phi}(0) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Ceci signifie exactement que

$$\widehat{\delta}_0 = 1. \tag{10.4}$$

De ceci et du théorème d'inversion de Fourier 10.3.2, on déduit que

$$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^d \delta_0. \tag{10.5}$$

10.4 Exemples d'applications

L'utilisation pratique des formules ci-dessus est très souvent couplée avec des résolutions d'équations simples sur les distributions.

Parmi toutes les applications de la transformée de Fourier, citons en exemple celle-ci.

Théorème 10.4.1 *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, il existe une unique distribution u de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ solution de*

$$(\mathrm{Id} - \Delta)u = f \quad \text{où} \quad \Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Pour démontrer cela, utilisons la proposition 10.3.3 pour affirmer que

$$\mathcal{F}((\mathrm{Id} - \Delta)u) = (1 + |\xi|^2)\widehat{u}.$$

Le théorème 10.3.2 d'inversion de Fourier permet d'écrire que

$$(\mathrm{Id} - \Delta)u = f \Longleftrightarrow (1 + |\xi|^2)\widehat{u} = \widehat{f}.$$

La fonction $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\pm 1}$ est une fonction indéfiniment différentiable à croissance lente. D'où il vient que

$$\begin{aligned} \widehat{u} &= \frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\xi|^2}\widehat{u} \\ &= \frac{1}{1 + |\xi|^2}\widehat{f}. \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation s'écrit

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + |\xi|^2}\widehat{f}\right).$$

Nous allons maintenant étudier l'opérateur de convolution par la valeur principale. Le résultat principal que nous allons démontrer est le suivant.

Théorème 10.4.2 *Il existe une constante C telle que, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, on ait*

$$\left\|\mathrm{vp}\frac{1}{x} \star \phi\right\|_{L^2} \leq C\|\phi\|_{L^2}.$$

Démonstration du théorème 10.4.2 Utilisons la transformation de Fourier. D'après la proposition 10.3.4, on a

$$\mathcal{F}\Big(\mathrm{vp}\frac{1}{x} \star \phi\Big) = \widehat{\phi}\mathcal{F}\Big(\mathrm{vp}\frac{1}{x}\Big).$$

Calculons la transformée de Fourier de la valeur principale.

Proposition 10.4.1

$$\mathcal{F}\Big(\mathrm{vp}\frac{1}{x}\Big)(\xi) = -i\pi\frac{\xi}{|\xi|}.$$

Admettons momentanément cette proposition. Le théorème de Fourier-Plancherel 6.2.2 page 95 assure immédiatement le résultat pourvu que l'on démontre la proposition.

Démonstration de la proposition 10.4.1 Par définition de la valeur principale, on a, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} \Big\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, x\varphi \Big\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x) + x\varphi(-x)}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} (\varphi(x) + \varphi(-x)) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) dx \\ &= \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi donc $x\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} = 1$. En utilisant la proposition 10.3.3, on en déduit que

$$-\frac{1}{i}\frac{d}{d\xi}\widehat{T} = \mathcal{F}(\mathbf{1}).$$

Or, on sait que $\mathcal{F}\mathbf{1} = (2\pi)\delta_0$. Ainsi donc, nous avons

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{T} = -2i\pi\delta_0.$$

Ainsi donc, on a, d'après la proposition 8.2.2 page 112 et le lemme 8.3.1 page 118, nous avons

$$\widehat{T} = -2i\pi H(\xi) + C$$

où C est un scalaire à déterminer[1]. Pour ce faire, observons que la valeur principale est une distribution impaire, c'est-à-dire que

$$\check{\mathrm{vp}}\frac{1}{x} = -\mathrm{vp}\frac{1}{x}\cdot$$

De plus, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la transformée de Fourier d'une distribution tempérée impaire est une distribution tempérée impaire. Ainsi donc la distribution $\widehat{T}$ doit être impaire et donc $C = i\pi$. D'où le résultat.

[1]Remarquons que cela suffit pour assurer le théorème 10.4.2

Sommaire

1 Espaces métriques **3**
- 1.1 Définition des espaces métriques . . . 3
- 1.2 Espaces complets . . . 11
- 1.3 La notion de compacité . . . 17
- 1.4 Espaces séparables . . . 26
- 1.5 Quelques remarques sur la topologie des ouverts de $\mathbf{R}^d$ . . . 28

2 Espaces normés, de Banach **31**
- 2.1 Définition des espaces normés . . . 31
- 2.2 Espaces de Banach . . . 34
- 2.3 Inverses et spectre dans $\mathcal{L}(E)$ . . . 38
- 2.4 Opérateurs compacts . . . 42
- 2.5 Le théorème de Stone-Weierstrass . . . 43

3 Dualité dans les espaces de Banach **47**
- 3.1 Présentation du concept de dualité . . . 47
- 3.2 Identification d'un espace normé avec un dual . . . 49
- 3.3 Une définition affaiblie de la convergence dans E' . . . 52
- 3.4 La notion d'application linéaire transposée . . . 54

4 Espaces de Hilbert **57**
- 4.1 Le concept d'orthogonalité . . . 57
- 4.2 Les propriétés des espaces de Hilbert . . . 59
- 4.3 Dualité des espaces de Hilbert . . . 64
- 4.4 La notion d'adjoint . . . 66

5 Espaces L^p **71**
- 5.1 Rappel sur la théorie de la mesure . . . 71
- 5.2 Définition des espaces L^p . . . 73
- 5.3 Densité des fonctions continues dans les espaces L^p . . . 77
- 5.4 Convolution et régularisation . . . 80
- 5.5 Dualité entre L^p et $L^{p'}$ . . . 86

6 Transformation de Fourier des fonctions **91**
- 6.1 Définition sur l'espace L^1. . . . 91
- 6.2 La formule d'inversion et l'extension à L^2 . . . 94

7 Un exemple de problème de minimisation **97**
7.1 Une approche classique du problème 97
7.2 Le concept de quasi-dérivée 99
7.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$ 100
7.4 Retour au problème initial 102

8 Les distributions sur un ouvert de $\mathbf{R}^d$ **105**
8.1 Le concept de distribution 105
8.2 Les opérations sur les distributions 110
8.3 La formule des sauts en dimension 1 118
8.4 Exemples et compléments 121

9 Convolution des distributions **123**
9.1 La notion de support; les distributions à support compact 123
9.2 La convolution d'une distribution et d'une fonction de test 127
9.3 La convolution entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}'$ 132
9.4 Un exemple d'application: la notion de solution fondamentale 135

10 Les distributions tempérées et la transformée de Fourier **139**
10.1 L'espace $\mathcal{S}$ et la transformée de Fourier 139
10.2 Définition des distributions tempérées 143
10.3 Opérations sur les distributions tempérées. 145
10.4 Exemples d'applications 150