Espaces de Sobolev

1 - Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour $s \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on notera $W^{s,p}(\Omega)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions f sur Ω qui appartiennent à $L^p(\Omega)$, ainsi que toutes leurs dérivées partielles au sens des distributions $\partial_\alpha f$ pour $|\alpha| \leqslant s$. On définit alors une norme sur $W^{s,p}$ en posant

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \|\partial_\alpha f\|_p^p \Big)^{1/p}$$

Théorème 1.1. *L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Si on note $E_s = \{\alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leqslant s\}$, l'espace $W^{s,p}$ s'identifie à un sous-espace de l'espace de Banach $L^p(\Omega)^{E_s}$ par l'injection linéaire $j : f \mapsto (\partial_\alpha f)_{\alpha \in E_s}$. Il suffit donc de voir que $j(W^{s,p})$ est fermé, ce qui résulte aisément de l'équivalence :

$$(g_\alpha)_{\alpha \in E} \in j(W^{s,p}) \iff \forall \alpha \in E_s \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \int_\Omega (g_0 \partial_\alpha \varphi - (-1)^{|\alpha|} g_\alpha \varphi)\, dx = 0$$

puisque φ et $\partial_\alpha \varphi$ appartiennent à $L^{p'}(\Omega)$. ■

Théorème 1.2. *Lorsque $p = 2$, l'espace $W^{s,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, souvent noté $H^s(\Omega)$.*

Il suffit de remarquer que la norme de $W^{s,2}(\Omega)$ est associée au produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_\Omega \partial_\alpha f(x) . \partial_\alpha \bar{g}(x)\, dx$$

puisque la complétude résulte du théorème précédent. ■

Théorème 1.3. *Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, Φ un $\mathscr{C}^s$-difféomorphisme de Ω sur Ω', ω un sous-ouvert relativement compact de Ω et $\omega' = \Phi(\omega)$. L'application $\Phi^* : f \mapsto f \circ \Phi^{-1}$ envoie continuement $W^{s,p}(\omega)$ dans $W^{s,p}(\omega')$.*

On montre par récurrence sur $|\alpha| \leqslant s$ l'existence de fonctions continues $c_{\alpha,\beta}$ sur Ω' telles que $\partial_\alpha (f \circ \Phi^{-1})(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} c_{\alpha,\beta}(x) \partial_\beta f \circ \Phi^{-1}(x)$. Puisque $\omega' \subset \Phi(\overline{\omega})$ est relativement compact dans Ω', les fonctions $c_{\alpha,\beta}$ sont toutes uniformément bornées sur ω', et le jacobien J_Φ de Φ est borné sur ω. On a

$$\int_{\omega'} \left|\partial_\beta f \circ \Phi^{-1}(x)\right|^p\, dx = \int_\omega |\partial_\beta f(y)|^p \, |J_\Phi(y)|\, dy < +\infty$$

dont on déduit que $\partial_\beta f \circ \Phi^{-1} \in L^p(\omega')$, et puisque chaque $c_{\alpha,\beta}$ est bornée sur ω', on conclut que $\partial_\alpha (f \circ \Phi^{-1}) \in L^p(\omega')$ pour $|\alpha| \leqslant s$, donc que $f \circ \Phi^{-1} \in W^{s,p}(\omega')$. Les majorations de J_Φ et des $c_{\alpha,\beta}$ ne dépendant que de Φ et de ω, on voit alors qu'il existe une constante M telle que $\left\| f \circ \Phi^{-1} \right\|_{W s,p} \leqslant M \|f\|_{W^{s,p}}$, ce qui montre la continuité de Φ^*. ■

---

version du 24 Novembre 2009

Théorème 1.4. *Si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, l'application $M_\varphi : f \mapsto \varphi.f$ envoie continuement $W^{s,p}(\Omega)$ dans lui-même.*

Par la formule de Leibniz, il existe, pour tout α des coefficients $(c_{\alpha,\beta})_{\beta\leqslant\alpha}$ tels que $\partial_\alpha(\varphi.f)(x) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} c_{\alpha,\beta}\partial_\beta\varphi(x).\partial_{\alpha-\beta}f(x)$. Par continuité sur le support compact de φ, les $\partial_\beta\varphi$ sont uniformément bornées sur Ω. On en déduit aisément que $\partial_\alpha(\varphi.f)$ est dans $L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in E_s$, donc que $\varphi.f \in W^{s,p}(\Omega)$ et qu'on peut trouver une constante M telle que $\|\varphi.f)\|_{W^{s,p}} \leqslant M. \|f\|_{W^{s,p}}$, ce qui prouve la continuité de l'application linéaire M_φ. ■

2 - Injections de Sobolev

On va maintenant montrer que sous des hypothèses convenables sur l'ouvert Ω, les espaces $W^{s,p}$ s'injectent les uns dans les autres. On notera désormais H_d le demi-espace $\{y \in \mathbb{R}^d : y_1 < 0\}$ de $\mathbb{R}^d$.

Lemme 2.1. *On suppose que l'ouvert Ω est borné dans $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout point $a \in \partial\Omega$, il existe un $\mathscr{C}^s$-difféomorphisme Φ_a d'un voisinage V_a de a sur un voisinage U_a de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\Phi_a(\Omega \cap V_a) = U_a \cap H_d$. Alors il existe un recouvrement ouvert fini $(V_j)_{j\in J}$ de $\overline{\Omega}$, des fonctions $\psi_j \in \mathscr{D}(V_j)$ telles que $\sum_{j\in J}\psi_j = 1$ au voisinage de $\overline{\Omega}$, et des difféomorphismes Φ_j de V_j sur des ouverts bornés U_j de $\mathbb{R}^d$ tels que $\Phi_j(\Omega \cap V_j) = U_j \cap H_d$.*

Par hypothèse, tout point de la frontière de Ω possède un voisinage ouvert difféomorphe à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ par une fonction transformant la trace de Ω en celle de H_d. Et tout point de Ω possède un voisinage ouvert difféomorphe à un sous-ouvert de H_d (par exemple par une translation). Par compacité de $\overline{\Omega}$, on peut donc trouver un sous-recouvrement fini $(V_j)_{j\in J}$ extrait de ce recouvrement, puis une partition $\mathscr{C}^\infty$ de l'unité, $(\psi_j)_{j\in J}$, subordonnée à ce recouvrement, c'est-à-dire des fonctions positives $\psi_j \in \mathscr{D}(V_j)$ telles que $\sum_j \psi_j = 1$ au voisinage du compact $\overline{\Omega}$. ■

Alors si $f \in W^{s,p}(\Omega)$, chaque fonction $f_j := \Phi_j^*(\psi_j.f)$ est dans $W^{s,p}(H_d)$ avec un support compact contenu dans $\Phi_j(V_j)$. Inversement, si (f_j) est une famille de fonctions de $W^{s,p}(H_d)$ telles que le support de f_j soit un compact contenu dans $\Phi_j(V_j)$, la somme $\sum_j(\Phi_j^*)^{-1}(f_j)$ est dans $W^{s,p}(\Omega)$. Ceci permet de transposer à $W^{s,p}(\Omega)$ des résultats prouvés pour $W^{s,p}(H_d)$.

Si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, on notera encore $W_K^{s,p}(\Omega)$ le sous-espace (fermé) de $W^{s,p}(\Omega)$ formé des fonctions nulles hors de K.

3 - Le cas $s = 1$ pour le demi-espace

Dans tout ce qui suit, on se place sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. On note B la boule unité de $\mathbb{R}^d$ et $B^+ = B \cap (-H_d)$, $v_d = \dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$ le volume de la boule unité et $\sigma_d = dv_d$ le volume de la sphère unité.

On considère, pour $1 \leqslant j \leqslant d$, les distributions T_j associées aux fonctions

$$\chi_j : x \mapsto \mathbb{1}_{B^+}(x).x_j\frac{1-\|x\|^d}{d\,\|x\|^d}$$

Lemme 3.1. *Chaque T_j est dans L^p pour $1 \leqslant p < \dfrac{d}{d-1}$, et on a $\sum_{j=1}^d \partial_j T_j = \dfrac{v_d}{2}\delta_0 - \mathbb{1}_{B^+}$.*

On a pour tout j : $|\chi_j(x)| \leqslant \|x\|^{1-d} . \mathbb{1}_{B^+}(x)$, donc

$$\int |\chi_j(x)|^p \, dx \leqslant \frac{\sigma}{2} \int_0^1 r^{p(1-d)} r^{d-1} \, dr = \frac{\sigma_d}{2q}$$

où $q = 1 - (p-1)(d-1) = p + d - pd$, pourvu que $p(d-1) < d$,

Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, on a pour $y \in \mathbb{R}^d$: $\varphi(y) - \varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \sum_j y_j \partial_j \varphi(ty) \, dt$, donc, en faisant $x = ty$, puis $s = \dfrac{\|x\|}{t}$,

$$\begin{aligned}
\int_{B^+} (\varphi(y) - \varphi(0)) \, dy &= \sum_j \int_0^1 dt \int y_j \partial_j \varphi(ty) \mathbb{1}_{B^+}(y) \, dy \\
&= \sum_j \int \partial_j \varphi(x) \, dx \int_0^1 \mathbb{1}_{B^+}(\frac{x}{t}) \frac{x_j}{t^{d+1}} \, dt \\
&= \sum_j \int_{B^+} x_j \partial_j \varphi(x) \, dx \int_{\|x\|}^1 \|x\|^{-d} s^{d-1} \, ds \\
&= \sum_j \int_{B^+} \frac{x_j .(1 - \|x\|^d)}{d \, \|x\|^d} \partial_j \varphi(x) \, dx = \sum_j \langle T_j, \partial_j \varphi \rangle = - \sum_j \langle \partial_j T_j, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\langle \mathbb{1}_{B^+} - c.\delta_0, \varphi \rangle = -\langle \sum_j \partial_j T_j, \varphi \rangle$, en posant $c = \mu(B^+) = \dfrac{v_d}{2}$, d'où le résultat. ∎

Théorème 3.2. *Soit $p > d$. Si g est dans $W^{1,p}(H_d)$, alors g est sur H_d presque partout égale à la restriction d'une fonction de $\mathscr{C}_0(\overline{H_d})$ et l'injection de $W^{1,p}(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0(\overline{H_d})$ est continue.*

De plus, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, l'injection de $W_K^{1,p}(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0(\overline{H_d})$ est compacte.

Si $p > d$, on a $p' < \dfrac{d}{d-1}$. Il en résulte que les χ_j et $\mathbb{1}_{B^+}$ appartiennent à $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, et que $g * \mathbb{1}_{B^+}$ appartient à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$, ainsi que les $\chi_j * \partial_j g$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$. Pour $x \in H_d$, on a $x - B^+ \subset H_d$. Il en résulte que si $\varphi \in \mathscr{D}(H_d)$, on a

$$\langle g * \partial_j \chi_j, \varphi \rangle = \langle g, \varphi * (\partial_j \chi_j)\check{} \rangle = -\langle g, \varphi * \partial_j \check{\chi}_j \rangle = -\langle g, \partial_j(\varphi * \check{\chi}_j) \rangle$$

Alors $\partial_j(\varphi * \check{\chi}_j) \in \mathscr{D}(H_d)$, et la quantité précédente est égale à $\langle \partial_j g, \varphi * \check{\chi}_j \rangle = \langle \partial_j g * \chi_j, \varphi \rangle$, donc on a dans $\mathscr{D}'(H_d)$: $\partial_j g * \chi_j = g * \partial_j \chi_j$. Et puisque les distributions $\mathbb{1}_{B^+}$ et χ_j sont à support compact on a dans $\mathscr{D}'(H_d)$:

$$g = \delta_0 * g = \frac{1}{c}(\mathbb{1}_{B^+} * g + \sum_j \partial_j \chi_j * g) = \frac{1}{c}(\mathbb{1}_{B^+} * g + \sum_j \chi_j * \partial_j g)$$

et cette dernière distribution est dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Sa restriction à $\overline{H_d}$ est dans $\mathscr{C}_0(\overline{H_d})$ et coïncide sur H_d avec g en tant que distributions, donc presque partout en tant que fonctions. De plus on a

$$\|g\|_\infty \leqslant \frac{1}{c}\Big(\|\mathbb{1}_{B^+}\|_{p'} . \|g\|_p + \sum_j \|\chi_j\|_{p'} . \|\partial_j g\|_p\Big) \leqslant \frac{1}{c}\Big(\|\mathbb{1}_{B^+}\|_{p'} + \sum_j \|\chi_j\|_{p'}\Big) . \|g\|_{W^{1,p}}$$

ce qui prouve la continuité de l'injection de $W^{1,p}(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0(\overline{H_d})$.

Et si K est un compact de H_d, il résulte du théorème de compacité des opérateurs de convolution que l'injection de $W^{1,p}_K(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0(\overline{H_d})$ est compacte. ■

Théorème 3.3. *Soient $p < d$ et r tel que $\dfrac{1}{r} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$. Si g est dans $W^{1,p}(H_d)$, alors g est dans $L^r(H_d)$ et l'injection de $W^{1,p}(H_d)$ dans $L^r(H_d)$ est continue. De plus, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, l'injection de $W^{1,p}_K(H_d)$ dans $L^r(H_d)$ est compacte.*

Soit q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$. On a $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} > 1 - \dfrac{1}{d}$. Il en résulte que $\mathbb{1}_{B^+}$ et les χ_j sont dans $L^q(\mathbb{R}^d)$, donc que $f * \mathbb{1}_{B^+}$ et $\partial_j g * \chi_j$ appartiennent à $L^r(\mathbb{R}^d)$. Et comme ci-dessus, on a dans $\mathscr{D}'(H_d)$:

$$g = \delta_0 * g = \frac{1}{c}(\mathbb{1}_{B^+} * g + \sum_j \partial_j \chi_j * g) = \frac{1}{c}(\mathbb{1}_{B^+} * g + \sum_j \chi_j * \partial_j g)$$

et cette dernière distribution est dans $L^r(\mathbb{R}^d)$. Sa restriction à H_d est dans $L^r(H_d)$ et coïncide sur H_d avec g en tant que distributions, donc presque partout en tant que fonctions.

Et on a

$$\|g\|_r \leqslant \frac{1}{c}\Big(\|\mathbb{1}_{B^+}\|_q . \|g\|_p + \sum_j \|\chi_j\|_q \|\partial_j g\|_p\Big) \leqslant \frac{1}{c}\Big(\|\mathbb{1}_{B^+}\|_q + \sum_j \|\chi_j\|_q\Big) \|g\|_{W^{1,p}}$$

ce qui montre la continuité de l'injection de $W^{1,p}(H_d)$ dans $L^r(H_d)$.

Enfin, si K est un compact de H_d, il résulte du théorème de compacité des opérateurs de convolution que l'injection de $W^{1,p}_K(H_d)$ dans $L^r(H_d)$ est compacte. ■

4 - Le cas général

Théorème 4.1. *Soient $s \geqslant 1$ et $p < d$. Si g est dans $W^{s,p}(H_d)$, alors g est dans $W^{s-1,q}(H_d)$ pour q tel que $\dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$ et l'injection de $W^{s,p}(H_d)$ dans $W^{s-1,q}(H_d)$ est continue. De plus, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, l'injection de $W^{s,p}_K(H_d)$ dans $W^{s-1,q}(H_d)$ est compacte.*

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| < s$, $\partial_\alpha f \in W^{1,p}(H_d)$, avec $\|\partial_\alpha f\|_{W^{1,p}} \leqslant \|\chi\|_{W^{s,p}}$. Il résulte alors du théorème 3.3 que chaque $\partial_\alpha f$ appartient à $L^q(H_d)$, puisque $\dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$ et que $\|\partial_\alpha f\|_q \leqslant C(q,d) . \|\partial_\alpha f\|_{W^{1,p}} \leqslant C(q,d)\, \|\chi\|_{W^{s,p}}$. Ceci montre que f appartient à $W^{s-1,q}(H_d)$ et que l'injection de $W^{s,p}(H_d)$ dans $W^{s-1,q}(H_d)$ est continue.

Si de plus, K est un compact de $\mathbb{R}^d$, le même argument montre que l'injection de $W^{s,p}_K(H_d)$ dans $W^{s-1,q}(H_d)$ est compacte. ■

Théorème 4.2. *Soient $s \geqslant 1$ et $p > d$. Si g est dans $W^{s,p}(H_d)$, alors g est la restriction à $\overline{H_d}$ d'un élément de $\mathscr{C}_0^{s-1}(\mathbb{R}^d)$, et l'injection de $W^{s,p}(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0^{s-1}(\overline{H_d})$ est continue. De plus, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, l'injection de $W_K^{s,p}(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0^{s-1}(\overline{H_d})$ est compacte.*

A nouveau, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| < s$, il résulte du théorème 3.2 que $\partial_\alpha g$ est la restriction à H_d d'une fonction de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que g est $\mathscr{C}^{s-1}$ sur H_d et que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant s-1$ sont continues sur $\overline{H_d}$. Et on voit comme précédemment que l'injection de $W^{s,p}$ dans $\mathscr{C}_0^{s-1}$ est continue, et même compacte sur $W_K^{s,p}(H_d)$. ■

Théorème 4.3. *Soient $s \geqslant 1$ et $p > \dfrac{d}{s}$. Si g est dans $W^{s,p}(H_d)$, alors g est la restriction à $\overline{H_d}$ d'un élément de $\mathscr{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ pour k tel que $s - \dfrac{d}{p} > k$, et l'injection de $W^{s,p}(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0^k(\overline{H_d})$ est continue. De plus, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, l'injection de $W_K^{s,p}(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0^k(\overline{H_d})$ est compacte.*

Soit $m < s$ le plus grand entier tel que $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{d} \geqslant 0$. On a alors $\dfrac{s-k}{d} > \dfrac{1}{p} \geqslant \dfrac{m}{d}$, donc $s - m - 1 \geqslant k$, et $\dfrac{m+1}{d} > \dfrac{1}{p}$. Prenant alors q_j tel que $\dfrac{1}{q_j} = \dfrac{m+1-j}{p(m+1)}$, on obtient $q_0 = p < q_1 < q_2 < \cdots q_m$ tels que $\dfrac{1}{q_{j+1}} > \dfrac{1}{q_j} - \dfrac{1}{d}$ pour $0 \leqslant j < m$ et $\dfrac{1}{q_m} < \dfrac{1}{d}$. Il résulte alors du théorème 4.1 que, pour $0 \leqslant j < m$, $W^{s-j,q_j}(H_d)$ s'injecte continuement dans $W^{s-j-1,q_{j+1}}(H_d)$, donc que $W^{s,p}(H_d)$ s'injecte continuement dans $W^{s-m,q_m}(H_d)$, et du théorème précédent que ce dernier espace s'injecte continuement dans $\mathscr{C}_0^k(\overline{H_d})$ puisque $s - m - 1 \geqslant k$.

Et de même, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, par composition d'injections compactes, on trouve que l'injection de $W_K^{s,p}(H_d)$ dans $\mathscr{C}_0^k(\overline{H_d})$ est compacte. ■

Soit s entier non nul. On suppose maintenant que l'ouvert Ω est borné dans $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout point $a \in \partial\Omega$, il existe un $\mathscr{C}^s$-difféomorphisme Φ_a d'un voisinage V_a de a sur un voisinage U_a de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\Phi_a(\Omega \cap V_a) = U_a \cap H_d$.

Le recouvrement $(V_j)_{j\in J}$, les ouverts bornés U_j de $\mathbb{R}^d$, les difféomorphismes Φ_j et la partition $\mathscr{C}^\infty$ de l'unité, $(\psi_j)_{j\in J}$, fournis par le lemme 2.1 permettent de construire des opérateurs linéaires continus $\Psi_{s,p} : W^{s,p}(\Omega) \to \prod_{j\in J} W^{s,p}(H_d)$ et $\Theta_{s,p} : \prod_{j\in J} W^{s,p}(H_d) \to W^{s,p}(\Omega)$ tels que $\Psi_{s,p}(f) = (\Phi_j^*(f.\psi_j))_{j\in J}$ et $\Theta_{s,p}((g_j)_{j\in J}) = \sum_j (\Phi_j^*)^{-1}(g_j)$, vérifiant $\Theta_{s,p}\circ\Psi_{s,p} = Id$.

De plus, lorsque $f \in W^{s,p}(\Omega)$, la fonction $\Phi_j^*(f.\psi_j)$ appartient à $W_{K_j}^{s,p}(H_d)$ pour $K_j = \overline{U_j}$.

Théorème 4.4. *Soient $s \geqslant 1$ et $p < d$. Si g est dans $W^{s,p}(\Omega)$, alors g est dans $W^{s-1,q}(\Omega)$ pour q tel que $\dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$ et l'injection de $W^{s,p}(\Omega)$ dans $W^{s-1,q}(\Omega)$ est compacte.*

Soit $g \in W^{s,p}(\Omega)$. Pour tout $j \in J$, $\Phi_j^*(g.\psi_j) \in W_{K_j}^{s,p}(H_d) \subset W_{K_j}^{s-1,q}(H_d)$. On en déduit que $g.\psi_j = (\Phi_j^*)^{-1}(\Phi_j^*(g.\psi_j)) \in W^{s-1,q}(\Omega)$ et enfin que $g = \sum_j g.\psi_j \in W^{s-1,q}(\Omega)$. Et puisque chaque injection τ_j de $W_{K_j}^{s,p}(H_d)$ dans $W_{K_j}^{s-1,q}(H_d)$ est compacte, l'injection $\tau = \Theta_{s-1,q}\circ(\prod_j \tau_j)\circ\Phi_{s,p}$ de $W^{s,p}(\Omega)$ dans $W^{s-1,q}(\Omega)$ est compacte. ■

Le résultat précédent concernant la compacité de l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est appelé *théorème de Rellich-Kondrachov.*

Théorème 4.5. *Soient $s \geqslant 1$ et $p > \dfrac{d}{s}$. Si g est dans $W^{s,p}(\Omega)$, alors g est dans $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ pour k tel que $s - \dfrac{d}{p} > k$, et l'injection de $W^{s,p}(\Omega)$ dans $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ est compacte.*

Soit $g \in W^{s,p}(\Omega)$. Comme précédemment, $\Phi_j^*(g.\psi_j) \in W^{s,p}_{K_j}(H_d) \subset \mathscr{C}^k_0(\overline{H_d})$ pour tout $j \in J$ et par composition avec le difféomorphisme Φ_j, on voit que $g.\psi_j$ est la la restriction à Ω d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d$, donc que g est la restriction à Ω d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d$. Et puisque chaque injection τ_j de $W^{s,p}_{K_j}(H_d)$ dans $\mathscr{C}^k_0(\overline{H_d})$ est compacte, l'injection $\tau = \Theta_k \circ (\prod_j \tau_j) \circ \Phi_{s,p}$ de $W^{s,p}(\Omega)$ dans $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ est compacte, où Θ_k est l'application linéaire continue de $\prod_j \mathscr{C}^k_0(\overline{H_d})$ dans $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ définie par $\Theta_k((g_j)_{j\in J}) = \sum_j g_j \circ \Phi_j$. ∎

5 - Le cas limite

De fait, si $p < d$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$, on peut montrer que $W^{1,p}(H_d)$ se plonge encore dans $L^q(H_d)$. Néanmoins, la compacité de l'opérateur de plongement est perdue, comme le montre l'exemple suivant, où $d = 2$, $p = 1$ et $q = 2$.

Exemple 5.1. *Il existe une suite bornée (g_k) de fonctions dans $W^{1,1}(H_2)$, dont les suppports restent dans un même compact, mais dont aucune sous-suite ne converge dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Soit ρ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ positive à support dans $]-1, -\dfrac{1}{2}[$. On définit la fonction $g_k \in \mathscr{C}^1_c(H_2)$ par $g_k(x,y) = 2^k g(2^k x).g(2^k y)$. Clairement le support de g_k est un compact contenu dans $]-1,0[\times]-1,0[$, donc dans H_2. On vérifie immédiatement que $\|g\|_1 = 2^{-k}\,\|\rho\|_1^2$ et que $\|\partial_x g\|_1 = \|\partial_y g\|_1 = \|\rho\|_1 . \|\rho'\|_1$, ce qui montre que la suite (g_k) est bornée dans $W^{1,1}(H_2)$. Enfin, on a $\|g_k\|_2^2 = \displaystyle\int 2^{2k}\rho^2(2^k x)\rho^2(2^k y)\,dx\,dy = \Big(\int_{-1}^0 \rho^2(t)\,dt\Big)^2 = \|\rho\|_2^4$, et

$$\langle g_k, g_\ell\rangle = 2^{k+\ell}\int \rho(2^k x)\rho(2^\ell x)\rho(2^k y)\rho(2^\ell y)\,dx\,dy = 2^{k+\ell}\Big(\int \rho(2^k x)\rho(2^\ell x)\,dx\Big)^2$$

et cette quantité est nulle si $k < \ell$ puisque $\rho(2^k x) = 0$ si $x \leqslant -2^{-k}$ et $\rho(2^\ell x) = 0$ si $x \geqslant -2^{1-\ell} \geqslant -2^{-k}$. Il en résulte que $\|g_k - g_\ell\|_2^2 = \|g_k\|_2^2 + \|g_\ell\|_2^2 = 2\,\|\rho\|_2^4$ si $k \neq \ell$, et que la suite (g_k) ne peut avoir de sous-suite qui converge dans L^2. ∎

En utilisant les méthodes de la section 4, on montrerait de même que, sous réserve que Ω vérifie les conditions convenables, on a $W^{s,p}(\Omega) \subset W^{s-1,q}(\Omega)$. Et on remarque que cette inclusion peut ne pas être vérifiée si on n'impose aucune condition sur Ω.

Exemple 5.2. *Soit Ω l'ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < 1$ et $|y| < x^5\}$. Alors la fonction $g : (x,y) \mapsto x^{-4}$ est dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \dfrac{6}{5}$, mais pas dans $L^q(\Omega)$ pour $\dfrac{3}{2} \leqslant q \leqslant 2$.*

On a

$$\int_\Omega g(x,y)^p\,dx\,dy = \int_0^1 x^{-4p}\,dx \int_{-x^5}^{x^5} dy = 2\int_0^1 x^{5-4p}\,dx < +\infty \text{ si } p < \frac{3}{2}$$

$$\int_\Omega |\partial_x g|^p\;dx\,dy = \int_0^1 4^p x^{-5p}\,dx \int_{-x^5}^{x^5} dy = 2^{2p+1}\int_0^1 x^{5-5p}\,dx < +\infty \text{ si } p < \frac{6}{5}$$

$$\int_\Omega |\partial_y g|^p\;dx\,dy = 0$$

mais $\displaystyle\int_\Omega g(x,y)^q\,dx\,dy = +\infty$ si si $q \geqslant \frac{3}{2}$. ∎

Au contraire du cas $p < d$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$ pour lequel $W^{1,p}$ se plonge dans L^q, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ ne se plonge pas dans $L^\infty(\Omega)$ lorsque $p = d \geqslant 2$, même pour un ouvert borné comme la boule unité.

Exemple 5.3. *Soit D le disque unité du plan $\mathbb{R}^2$. La fonction $f : x \mapsto \log^{1/3}(2/\|x\|)$ est dans $W^{1,2}(D)$ sans être localement bornée.*

Il est clair que f n'est bornée sur aucun voisinage de 0. Néanmoins, on a

$$\int_D |f(x,y)|^2\;dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \log^{2/3}(2/r)\,r\,dr \leqslant 2\pi \sup_{0<r\leqslant 1} r\log^{2/3}(2/r) < +\infty$$

et

$$\begin{aligned}\int |\partial_x f(x,y)|^2\;dx\,dy = \int |\partial_y f(x,y)|^2\;dx\,dy &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \int_0^1 \frac{1}{9r^2\log^{4/3}(2/r)}\,r\,dr \\ &= \frac{\pi}{9}\int_0^1 \frac{dr}{r\log^{4/3}(2/r)} = \frac{\pi}{9}\Big[3\log^{-1/3}(2/r)\Big]_0^1 = \frac{\pi\log^{-1/3}(2)}{3} < \infty\end{aligned}$$

ce qui montre que $f \in W^{1,2}(D)$. ∎