# COURS D'ANALYSE SPECTRALE

# par Jean Saint Raymond

Chapitre	I	-	Algèbres de Banach	page	1
Chapitre	II	•	Exemples d'algèbres de Banach	page	12
Chapitre	III	-	Algèbres de Banach commutatives	page	24
Chapitre	IV	•	Algèbres hermitiennes et C*-algèbres	page	39
Chapitre	V	-	Espaces hilbertiens	page	
Chapitre	VI	-	Parties orthonormales	page	
Chapitre	VII	-	Théorie spectrale des opérateurs normaux compacts	page	
Chapitre	VIII	-	Calcul fonctionnel des opérateurs normaux	page	
Chapitre	IX .	•			
			d'opérateurs unitaires	page	124
Chapitre	X	-	Opérateurs non bornés. Théorie spectrale des	r ····································	
•			opérateurs auto-adjoints	page	132
Chapitre	XI		Transformation de Fourier.	-	
			- A CONTROL	page	155

#### Chapitre I - Algèbres de Banach

<u>Définition 1.</u> On appelle <u>algèbre de Banach</u> un espace de Banach A (espace vectoriel normé complet) sur le corps des nombres complexes muni d'une multiplication bilinéaire et associative vérifiant

$$||xy|| \leq ||x||, ||y||$$

pour tout x et tout y de A.

<u>Définition 2.</u> On appelle <u>involution</u> sur une algèbre de Banach A une application  $x\mapsto x^*$  de A dans A vérifiant :

$$||x^{\star}|| = ||x||$$

$$(x^{\star})^{\star} = x$$

$$(x+y)^{\star} = x^{\star} + y^{\star}$$

$$(\lambda_x)^{\star} = \overline{\lambda}x^{\star}$$

$$(xy)^{\star} = y^{\star}x^{\star}$$

On appelle <u>algèbre de Banach involutive</u> une algèbre de Banach munie d'une involution.

Théorème 3. Soient A une algèbre de Banach et x un élément de A. Alors  $|x^m|^{1/m}$  a une limite  $\rho(x)$  quand m tend vers l'infini, appelée rayon spectral de x. De plus  $\rho(x)$  est la borne inférieure des nombres  $|x^m|^{1/m}$ .

L'inégalité  $||xy|| \le ||x||.||y||$  entraîne que, pour m entier  $\ge 1$ ,  $||x^m|| \le ||x||^m$ .

Soit p un entier. Pour tout m entier il existe q et r entiers tels que m=pq+r et  $0 \le r < p$ .

Alors 
$$x^{m} = (x^{p})^{q} \cdot x^{r}$$
  
et  $||x^{m}|| \le ||x^{p}||^{q} \cdot ||x||^{r}$ 

d'où 
$$||x^{m}||^{1/m} \le ||x^{p}||^{\frac{q}{m}} \cdot ||x||^{r/m}$$

Si, fixant p, on fait tendre m vers l'infini, on a  $\lim_{m\to\infty} \frac{q}{m} = \frac{1}{p}$ ,  $\lim_{m\to\infty} \frac{r}{m} = 0$ , d'où

$$\lim\sup_{m\to\infty} ||x^m||^{1/m} \leq ||x^p||^{1/p}$$

donc 
$$\lim \sup_{m \to \infty} ||x^m||^{1/m} \le \inf_{p \ge 1} ||x^p||^{1/p} \le \lim \inf_{p \to \infty} ||x^p||^{1/p}$$

d'où la convergence de la suite  $||x^m||^{1/m}$  vers  $\rho(x)=\inf_p||x^p||^{1/p}$ . En particulier, pour p=1,  $\rho(x) \leq ||x||$ .

Définition 4. Soit A une algèbre de Banach. Un élément e de A est appelé unité de A si, pour tout x de A, on a

e.x=x.e=x

Un tel élément est clairement unique, car si e et e' ont cette propriété, on a e.e'=e=e'.

Théorème 5. Soit A une algèbre de Banach. Il existe une algèbre de Banach A' avec unité et un isomorphisme isométrique de A' sur une sous-algèbre de A'. On appelle A' l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A.

On pose A'=A×C et on définit

$$\begin{cases} ||(x,\lambda)|| = ||x|| + |\lambda| & \text{pour } x \in A, \ \lambda \in \mathbb{C} \\ (x,\lambda) + (y,\mu) = (x+y,\lambda+\mu) & \text{pour } x,y \in A, \ \lambda,\mu \in \mathbb{C} \\ (x,\lambda) \cdot (y,\mu) = (xy+\lambda y+\mu x,\lambda \mu) \end{cases}$$

On vérifie sans peine que A' est une algèbre de Banach, que l'application  $x \to (x,0)$  est un isomorphisme isométrique de A sur son image dans A' et que (0,1) est unité de A'.

Si, de plus,  $x \mapsto x^*$  est une involution sur A, cette involution se prolonge en une involution sur A' par

$$(x,\lambda) \rightarrow (x^{\star},\overline{\lambda}).$$

<u>Définition 6.</u> Soit A une algèbre de Banach avec une unité e. On dit que l'élément y est l'inverse de l'élément x et on le note  $x^{-1}$  si

$$xy=yx=e$$

Un tel élément est clairement unique puisque si y et y' sont inverses de x

$$y=y.e=y(xy')=(yx).y'=e.y'=y'.$$

Lemme 7. Soient A une algèbre de Banach avec unité e et x un élément dont le rayon spectral vérifie  $\rho(x) < 1$ . Alors e-x possède un inverse y. De plus, si ||x|| < 1, on a

$$||e-y|| \leq \frac{||x||}{1-||x||}$$

Soit r tel que  $\rho(x) < r < 1$ . Il existe un entier m tel que, pour  $n \ge m$ ,  $||x^n||^{1/n} \le r$ , donc  $||x^n|| \le r^n$ . La série de terme général  $x^n$  est donc normalement convergente, donc convergente puisque A est un espace complet.

Notons  $s_n = \sum_{m=0}^{n-1} x^m$  et  $y = \sum_{n=0}^{\infty} x^m = \lim_{n \to \infty} s_n$ . Alors  $(e-x) \cdot s_n = s_n \cdot (e-x) = e-x^n$ , et puisque  $||x^n|| \le r^n$  pour  $n \ge m$ ,  $e-x^n \ne q$  quand  $n \ne \infty$ . Donc  $(e-x) \cdot y = \lim_{n \to \infty} (e-x) \cdot s_n = e$ 

$$y.(e-x)=\lim_{n\to\infty} s_n.(e-x)=e$$

Donc y est l'inverse de e-x.

De plus,

$$||e-y||=\lim||e-s_n|| \le \sum_{1}^{\infty} \cdot ||x^n||$$

Donc si ||x|| < 1 (auquel cas on a nécessairement  $\rho(x) < 1$ ),

$$||e-y|| = ||e-(e-x)^{-1}|| \le \sum_{1}^{\infty} ||x^{n}|| \le \sum_{1}^{\infty} ||x||^{n} = \frac{||x||}{1-||x||}$$

Théorème 8. Soit A une algèbre de Banach avec unité e. L'ensemble U des éléments inversibles est un ouvert contenant la boule de centre e et de rayon 1, et l'application  $x\mapsto x^{-1}$  est continue sur U.

D'après le lemme précédent, si ||e-y|| < 1, y=e-(e-y) est inversible. Donc U contient la boule de centre et de rayon 1. De plus, si  $x_0$  est dans U et si  $||h|| < r = \frac{1}{||x_0^-||}$ , on a

$$x_0 - h = x_0 (e - x_0^{-1} h)$$

donc

$$||x_0^{-1},h|| \le ||x_0^{-1}||.||h|| < 1.$$

Il en résulte que  $e-x_0^{-1}$ .h est inversible et que  $(e-x_0^{-1}.h)^{-1}x_0^{-1}$  est l'inverse de  $x_0$ -h.

Donc U contient la boule de centre  $x_0$  et de rayon r, ce qui prouve que U est ouvert. De plus, si ||h|| < r,

$$(x_0-h)^{-1}-x_0^{-1}=[(e-x_0^{-1}h)^{-1}-e].x_0^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned} |||(x_{o}^{-h})^{-1} - x_{o}^{-1}|| &\leq |||(e - x_{o}^{-1}h)^{-1} - e||.||x_{o}^{-1}|| \\ &\leq \frac{||x_{o}^{-1}.h||}{1 - ||x_{o}^{-1}.h||} . ||x_{o}^{-1}|| &\leq \frac{||h||}{r(r - ||h||)} \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de l'application inverse en x<sub>o</sub>.

Définition 9. Soit A une algèbre de Banach avec unité e. On appelle spectre d'un élément x de A l'ensemble des nombres complexes  $\lambda$  tels que x- $\lambda$ e ne soit pas inversible dans A.

Lemme 10. Soient A une algèbre de Banach avec unité et x un élément de A. Le spectre de x est compact et contenu dans le disque fermé de centre 0 et de rayon  $\rho(x)$ .

Soit U l'ensemble des éléments inversibles de A. L'application  $\lambda \mapsto x-\lambda e$  étant continue de C dans A et U ouvert dans A, il est clair que le spectre de x est fermé dans C. De plus, si  $|\lambda| > \rho(x)$ ,

$$\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\rho(x)}{|\lambda|} < 1$$

et  $(e-\frac{x}{\lambda})^{-1}$  existe, de même que  $(x-\lambda e)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(e-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}$ . Donc  $\lambda$  n'appartient pas au spectre de x. Ceci achève de prouver que le spectre de x est fermé et borné, donc compact et contenu dans le disque de rayon  $\rho(x)$ .

Théorème 11. Soient A une algèbre de Banach avec unité et x un élément de A. Le spectre de x est un compact o(x) non vide de C et

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in o(x)\} = \rho(x)$$

Compte tenu du lemme précédent, il suffit de montrer l'existence d'un  $\lambda$  dans c(x) tel que  $|\lambda| = \rho(x)$ . Il est possible de démontrer ce résultat au moyen des inégalités de Cauchy, en utilisant l'holomorphie de la résolvante :  $\lambda \mapsto (x-\lambda e)^{-1}$ . La démonstration qui suit évite le recours à la théorie des fonctions analytiques.

Si  $\rho(x)=0$ , il faut montrer que x ne peut être inversible. Mais si x est inversible, on a :

$$|x|^{-1} \le ||e|| \le ||x^{m}|| ||(x^{-1})^{m}|| \le ||x^{m}|| \cdot ||x^{-1}||^{m}$$

d'où 
$$||x^{m}||^{1/m} \ge \frac{1}{||x^{-1}||}$$
 et  $\rho(x) \ge \frac{1}{||x^{-1}||} > 0$ .

Si  $\rho(x) > 0$  et s'il n'existait pas de  $\lambda$  dans o(x) tel que  $|\lambda| = \rho(x)$ . La résolvante  $R(\lambda)$  serait alors définie et continue pour  $|\lambda| \ge \rho(x)$ ; et  $\mu \mapsto (e^{-\mu x})^{-1} = -\frac{1}{\mu} R \left(\frac{1}{\mu}\right)$  serait uniformément continue sur la couronne compacte  $\{\mu \mid \frac{1}{2\rho(x)} \le |\mu| \le \frac{1}{\rho(x)}\}$ . On pourrait donc trouver r tel que

$$\frac{1}{2\rho(x)} \le \frac{1}{r} < \frac{1}{\rho(x)}$$

et que, pour tout  $\omega \in C$  de module 1,

$$||(e-\frac{\omega x}{r})^{-1}-(e-\frac{\omega x}{\rho(x)})^{-1}|| \le \frac{1}{6}$$

Il existerait alors un entier m tel que

$$\left|\left|\left(\frac{x}{r}\right)^{m}\right|\right| < \frac{1}{4}$$
 alors que  $\left|\left|\left(\frac{x}{\rho(x)}\right)^{m}\right|\right| \ge 1$ .

Alors, pour  $\omega=e^{\frac{2\pi i}{m}}$ , on a la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{1-x^m}$  égale à

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{1-\omega^k X}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} \prod_{j \neq k} (1-\omega^j X)$$

donc

II en résulte que pour  $t \le \frac{1}{\rho(x)}$ 

$$e = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} \prod_{j \neq k} (e - t\omega^{j} x)$$

donc

$$(e^{-t^m x^m})^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} (e^{-t\omega^k x})^{-1}$$

Il en résulte donc que

$$(e^{-\frac{x^m}{r^m}})^{-1} - (e^{-\frac{x^m}{\rho(x)^m}})^{-1} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} [(e^{-\frac{\omega^k x}{r}})^{-1} - (e^{-\frac{\omega^k x}{\rho(x)}})^{-1}]$$

donc

$$||(e - \frac{x^m}{r^m})^{-1} - (e - \frac{x^m}{\rho(x)^m})^{-1}|| \le \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} ||(e - \frac{w^k x}{r})^{-1} - (e - \frac{w^k x}{\rho(x)})^{-1}||$$

$$\le \frac{1}{6}$$

En utilisant le *lemme* 7, puisque  $\left|\left|\frac{x^m}{r^m}\right|\right| < \frac{1}{4}$ ,

$$\left| \left| \left( e - \frac{x^m}{r^m} \right)^{-1} - e \right| \right| < \frac{1/4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

d'où

$$\left| \left| \left( e - \frac{x^m}{\rho(x)^m} \right)^{-1} - e \right| \right| < \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

et, avec le lemme 7 à nouveau.

$$\left| \left| \frac{x^{m}}{\rho(x)^{m}} \right| \right| < \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

contrairement à  $||x^m|| \ge \rho(x)^m$ . Cette contradiction achève la démonstration.

Théorème 12. (Gelfand-Mazur). Si l'algèbre de Banach A est un corps, A est isomorphe à C.

L'application de  $\phi$  de  $\mathfrak C$  dans A définie par  $\phi(\lambda)=\lambda e$  est un isomorphisme de  $\mathfrak C$  sur son image. Si cette application n'était pas surjective, il existerait un x de A distinct de  $\lambda$ .e pour tout  $\lambda \in \mathfrak C$ . Alors x- $\lambda e$  serait non nul, donc inversible pour tout  $\lambda$ , et o(x) serait vide, en contradiction avec le théorème précédent.

Théorème 13. Soient A une algèbre de Banach avec unité u et x un élément de E. La série de terme général  $\frac{x^n}{n!}$  converge normalement et sa somme est notée  $e^x$ . De plus, si x et y commutent, on a

$$e^{x+y}=e^x.e^y$$

Puisque  $||x^n|| \le ||x||^n$ , on a  $\sum\limits_{0}^{\infty} ||\frac{x^n}{n!}|| \le \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{||x||^n}{n!} = e^{||x||}$ , d'où la convergence normale de la série. Puisque A est un espace complet, la série converge donc.

Si les éléments x et y commutent, on a pour tout entier n,

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n}^{r} C_n^p x^p y^q$$
$$= \sum_{p+q=n} \frac{x^p}{p!} \cdot \frac{y^p}{q!}$$

Donc, par convergence normale des séries,

$$\begin{split} \mathbf{e}^{\mathbf{x}}.\mathbf{e}^{\mathbf{y}} &= (\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{p}}}{\mathbf{n}!}) (\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}!}) = \sum\limits_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!} \cdot \frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}!} \\ &= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=n} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}!} \cdot \frac{\mathbf{y}^{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}!}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{x}+\mathbf{y})^{n}}{\mathbf{n}!} = \mathbf{e}^{\mathbf{x}+\mathbf{y}}. \end{split}$$

Définition 14. Une algèbre de Banach A possède une unité approchée s'il existe une constante M telle que, pour tout  $\varepsilon>0$  et toute famille finie  $(x_1,\ldots,x_k)$  d'éléments de A, il existe un élément u de A vérifiant

La <u>norme</u> de l'unité approchée est la plus petite constante M qui possède cette propriété.

Il est clair qu'une algèbre qui possède une unité possède une unité approchée.

Théorème 15. Si une algèbre de Banach séparable A possède une unité approchée, il existe une suite bornée  $(u_n)$  dans A telle que, pour tout x de A,

$$x=\lim_{n\to\infty} xu_n=\lim_{n\to\infty} u_n.x$$

Soit  $(x_k)$  une suite dense dans A. Il existe une constante M et, pour tout n, un élément  $u_n$  de A tel que

$$\begin{aligned} ||u_n|| &\leq M \\ ||u_n x_k - x_k|| &< \frac{1}{n}, ||x_k u_n - x_k|| &< \frac{1}{n}, k=0,1,...,n \end{aligned}$$

Alors, pour tout k, on a  $x_k=\lim_{n\to\infty}x_ku_n=\lim_{n\to\infty}u_nx_k$ . Si F désigne l'ensemble des x de A tels que  $x=\lim_n xu_n=\lim_n u_nx$ , F est dense puisque il contient tous les  $x_k$ . De plus, si x est adhérent à F, il existe pour tout  $\varepsilon>0$  un y dans F tel que  $||x-y|| \leq \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$  et un entier m tel que, pour  $n \geq m$ ,  $||u_ny-y|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $||yu_n-y|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors, pour  $n \geq m$ ,

$$||u_{n}x-x|| \le ||u_{n}\cdot(x-y)|| + ||u_{n}y-y|| + ||x-y||$$
  
 $\le (1+||u_{n}||)||x-y|| + ||u_{n}y-y|| \le \varepsilon$ 

Donc  $x=\lim_n x$ . Et de même  $x=\lim_n xu_n$ , ce qui prouve que x est dans F. Donc F est fermé, et égal à A puisque il est dense. Ceci achève la démonstration.

Théorème 18. Soit A une algèbre de Banach qui possède une unité approchée. Pour tout x de A, il existe y et z dans A tels que x=y.z.

Soit A' l'algèbre de Banach obtenue par adjonction d'une unité e à A On construit par récurrence sur n deux suites  $(y_n^*)$  et  $(z_n)$  telles que

$$\begin{cases} a) & y_0^* = et z_0 = x \\ b) & y_n^* z_n = x \\ c) & y_n^* - \left(\frac{2M}{2M+1}\right)^n \cdot e = y_n \in A \text{ et } z_n \in A \\ d) & \left| \left| y_n^* - y_{n-1}^* \right| \right| < \left(\frac{2M}{2M+1}\right)^{n-1} \text{ et } \left| \left| z_n - z_{n-1} \right| \right| < \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

où M est la norme de l'unité approchée de A.

Supposons en effet construits  $y_{n-1}'$  et  $z_{n-1}$ . On va trouver un élément  $u_n$  de A tel que  $\frac{2M \cdot e^+ u_n}{2M+1} = v_n$  soit inversible dans A' et poser

$$y_n^t = y_{n-1}^t \cdot v_n$$

$$z_n = v_n^{-1} \cdot z_{n-1}$$

d'où  $y_n^* \cdot z_n^* y_{n-1}^* z_{n-1}^* = x$ . Remarquons que, si  $||u_n^*|| \le M$ ,

 $v_n = \frac{2M \cdot e + u_n}{2M + 1} = \frac{2M}{2M + 1} \cdot (e + \frac{u_n}{2M}) \text{ et que } ||\frac{u_n}{2M}|| \leq \frac{1}{2} < 1, \text{ d'où l'inversibilité de } v_n$  par le *lemme 7*.

De plus, 
$$||v_n^{-1}|| = ||\frac{2M+1}{2M} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (\frac{u_n}{2M})^p|| \le \frac{2M+1}{2M} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \le \frac{2M+1}{M}$$

De plus, si 
$$y'_{n-1} = (\frac{2M}{2M+1})^{n-1} \cdot e^+ y_{n-1}$$
, avec  $y_{n-1} \in A$ , on a  $y'_n = [(\frac{2M}{2M+1})^{n-1} \cdot e^+ y_{n-1}] \cdot [\frac{2Me+u}{2M+1}]$   $y'_n = (\frac{2M}{2M+1})^n e^+ y_n$   $y_n = \frac{2M}{2M+1} y_{n-1} + \frac{(2M)^{n-1}}{(2M+1)^n} u_n + \frac{y_{n-1}}{2M+1} \in A$ .

Infin,  $y'_n - y'_{n-1} = y'_{n-1} \cdot (v_n - e) = \frac{1}{2M+1} y'_{n-1} \cdot (u_n - e)$ 

Enfin, 
$$y'_{n-1} = y'_{n-1} \cdot (v_{n} - e) = \frac{1}{2M+1} y'_{n-1} \cdot (u_{n} - e)$$

$$= \frac{1}{2M+1} \left[ \left( \frac{2M}{2M+1} \right)^{n-1} (u_{n} - e) + (y_{n-1} u_{n} - y_{n-1}) \right]$$

$$d'où \qquad \left| |y'_{n} - y'_{n-1}| \right| \leq \frac{M+1}{2M+1} \cdot \left( \frac{2M}{2M+1} \right)^{n-1} + \frac{\left| |y_{n-1} u_{n} - y_{n-1}| \right|}{2M+1}$$

$$\leq \left( \frac{2M}{2M+1} \right)^{n-1} \quad \text{si} \quad \left| |y_{n-1} u_{n} - y_{n-1}| \right| \leq M \cdot \left( \frac{2M}{2M+1} \right)^{n-1}$$

Et 
$$z_{n-1} = z_{n-1} = v_{n-1} = v_{n-1}^{-1} \cdot (z_{n-1} - v_{n} z_{n-1})$$
  
=  $\frac{1}{2M+1} v_{n-1}^{-1} \cdot (z_{n-1} - u_{n-1} z_{n-1})$ 

$$\begin{aligned} ||z_{n}^{-}z_{n-1}^{-}|| &\leq \frac{1}{2M+1} ||v_{n}^{-1}||.||z_{n-1}^{-}u_{n}^{z_{n-1}}|| \\ &\leq \frac{1}{M} ||z_{n-1}^{-}u_{n}^{z_{n-1}}|| \end{aligned}$$

Il suffit donc pour assurer b), c) et d) au rang n de choisir un  $u_n$  tel que  $||u_n|| \le M$ ,  $||z_{n-1} - u_n z_{n-1}|| \le M \cdot 2^{-n}$  et  $||y_{n-1} - u_n y_{n-1}|| < M \cdot (\frac{2M}{2M+1})^{n-1}$ , ce qui est possible puisque. A possède une unité approchée de norme M.

Les suites  $(\mathbf{y}_n^*)$  et  $(\mathbf{z}_n)$  étant construites comme ci-dessus sont des suites de Cauchy puisque

$$\Sigma ||y_{n}^{\prime}-y_{n-1}^{\prime}|| < +\infty \text{ et } \Sigma ||z_{n}^{\prime}-z_{n-1}^{\prime}|| < +\infty$$

Il existe donc  $y \in A'$  et  $z \in A$  tels que  $y=\lim y_n'$  et  $z=\lim z_n$ . De plus, on a  $y=\lim y_n \in A$  puisque  $y_n-y_n' \to 0$ . Il en résulte que

$$yz=lim y_n z_n=x$$

ce qui achève la démonstration.

## Chapitre II - Exemples d'algèbres de Banach

1. Soit K un espace topologique compact. Notons C(K) l'ensemble des fonctions continues de K dans C muni de l'addition et de la multiplication ponctuelles, et de la norme de la convergence uniforme.

Alors C(K) est une algèbre de Banach avec unité, sur laquelle on peut définir une involution par

$$f^*(t)=\overline{f(t)}$$
 pour  $t \in K$ 

2. Plus généralement, si X est un espace localement compact, on note  $C_{\mathbb{Q}}(X)$  l'ensemble des fonctions continues f de X dans C qui tendent vers O à l'infini, c'est-à-dire telles que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact de X en dehors duquel |f| est inférieur à  $\varepsilon$ . Ces fonctions s'identifient aux fonctions continues sur le compactifié d'Alexandroff X de X qui s'annulent au point à l'infini.

Muni de l'addition et la multiplication ponctuelles, et de la norme de la convergence uniforme,  $C_{_{\rm O}}(X)$  est une algèbre de Banach sur laquelle on peut encore définir une involution par

$$f^{*}(t)=\overline{f(t)}$$

L'algèbre  $C_o(X)$  a une unité si et seulement si la fonction constante 1 est dans  $C_o(X)$ , c'est-à-dire si X est compact.

Néanmoins, même si X n'est pas compact,  $C_0(X)$  a une unité approchée. En effet, si  $\epsilon > 0$  et si  $f_1, \ldots, f_k$  sont dans  $C_0(X)$ , il existe un compact K de X tel que  $|f_j(t)| < \epsilon$  si  $t \notin K$  et  $j=1,2,\ldots,k$ . Il existe alors une fonction u sur X, continue à support compact, à valeurs dans [0,1], et valant 1 sur K. Il en résulte que ||u||=1,  $u\in C_0(X)$  et  $||uf_j-f_j||<\epsilon$  pour 1 < j < k.

3. Si E est un espace de Banach, l'ensemble  $\mathcal{L}$  (E) des applications linéaires continues de E dans E, muni de la somme usuelle et de la composition, et de la norme usuelle est une algèbre de Banach avec unité, mais non commutative dès que E est de dimension  $\geq 2$ .

Il est clair que les éléments inversibles de & (E) sont des bijections de E sur E. La réciproque est exacte : toute bijection linéaire continue de E sur E a un inverse continu.

Théorème 1. (Banach). Soient E et F deux espaces de Banach et u une surjection linéaire continue de E sur F. Alors l'application u est ouverte (c'est-à-dire que, pour tout ouvert V de E, u(V) est ouvert dans F).

Il suffit de montrer que l'image de la boule unité B de E est un voisinage de O dans F. Soit  $C=\overline{u(B)}$ . Puisque U est surjective,

$$\overset{\circ}{\cup} nC \supset \overset{\circ}{\cup} nu(B) = u(\overset{\circ}{\cup} nB) = u(E) = F$$
 $\overset{\circ}{n=1} n=1 \qquad n=1$ 

Puisque F est un espace métrique complet, il résulte du théorème de Baire que l'un des fermés nC est d'intérieur non vide. Il existe donc  $y_0 \in F$  et  $\rho > 0$  tels que la boule de centre  $y_0$  et de rayon  $\rho$  soit incluse dans nC. Puisque nC est symétrique, il en est de même de la boule de centre -  $y_0$  et de rayon  $\rho$ . Et puisque nC est convexe, pour tout y tel que  $||y|| \leqslant \rho$ 

$$y = \frac{1}{2} [(y_0 + y) + (-y_0 + y)] \in nC$$

Donc C contient la boule de rayon  $\frac{\rho}{n}$  =r

On va montrer maintenant que u(B) contient la boule ouverte de rayon r. Soit donc  $z \in F$  tel que ||z|| < r. Il existe q tel que 0 < q < 1 et ||z|| < r. (1-q).

On va construire par récurrence une suite  $(x_n)$  dans B telle que  $||z-\frac{||z||}{r}u(x_0+qx_1+\ldots+q^{n-1}x_{n-1})|| \leq q^n, ||z||.$ 

Si les  $x_j$  sont déterminés pour  $0 \le j < n$ , vérifiant l'inégalité précédente,

$$z_{n} = \frac{r}{q^{n} \cdot ||z||} [z - \frac{||z||}{r} u(x_{0} + ... + q^{n-1}x_{n-1})]$$

appartient à la boule de rayon r de F donc à  $C=\overline{u(B)}$ . Il existe donc  $x_n$  dans B tel que  $||z_n-u(x_n)|| \leq qr$ .

Alors 
$$||z - \frac{||z||}{r} u(x_0 + ... + q^n x_n)|| = ||\frac{q^n ||z||}{r} (z_n - u(x_n))||$$

$$\leq \frac{q^n ||z||}{r} .qr = q^{n+1} ||z||$$

ce qui termine la construction par récurrence.

Alors la série  $(q^n x_n)$  converge normalement dans E vers un élément x tel que

$$||x|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||q^n x_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$
et 
$$z - \frac{||z||}{r} u(x) = 0$$
d'où 
$$z = u(\frac{||z||}{r} x)$$
et 
$$||\frac{||z||}{r} \cdot x|| \leq \frac{||z||}{r(1-q)} < 1$$

ce qui prouve que z est dans l'image de la boule unité ouverte, et achève la démonstration.

Corollaire 2. Toute bijection linéaire continue d'un espace de Banach E sur un espace de Banach F est un isomorphisme. En particulier toute bijection linéaire continue de E sur E est inversible dans  $\mathcal{L}(E)$ .

Si u est bijective linéaire et continue, elle est ouverte d'après le théorème précédent ; donc  $u^{-1}$  est continue. Si F=E,  $u^{-1}$  est dans  $\mathscr{L}(E)$  l'inverse de u.

Corollaire 3. (Théorème du graphe fermé). Soient E et F deux espaces de Banach et u une application linéaire de E dans F. Si le graphe de u est fermé, u est continue.

Soit G le graphe de u, c'est-à-dire l'ensemble des (x,u(x)) où x parcourt E. C'est un sous-espace vectoriel de ExF qui est un espace de Banach s'il est fermé dans ExF pour la norme : ||(x,y)||=||x||+||y||.

Si on note P la restriction à G de la projection  $(x,y) \mapsto x$ , P est linéaire continue et bijective de G sur E, donc est un isomorphisme d'après le corollaire 2. Si Q est la projection  $(x,y) \mapsto y$  de ExF sur F, on a  $u=Q\circ P^{-1}$ , d'où la continuité de u.

Inversement, si u est continue, son graphe est fermé, et la condition est nécessaire et suffisante.

4. Soit G un groupe localement compact, c'est-à-dire un groupe muni d'une topologie localement compacte pour laquelle les applications  $x \mapsto x^{-1}$  et  $(x,y) \mapsto xy$  sont continues respectivement de G dans G et de G×G dans G. On peut démontrer le théorème suivant, que nous admettrons :

Théorème 4. Il existe sur G une mesure de Radon  $\mu$  invariante à gauche, c'est-à-dire vérifiant

$$\int f(y) d\mu(y) = \int f_{x}(y) d\mu(y)$$

pour tout x de G et toute fonction f continue à support compact (où  $f_x$  est la fonction définie par  $f_x(y)=f(x^{-1}y)$ ). De plus deux telles mesures sont toujours proportionnelles.

La mesure  $\mu$  est appelée mesure de Haar de G. Son existence et son unicité (à un facteur près) sont bien connues pour les groupes usuels,  $R^n$ ,  $Z^n$  ou  $T^n$ .

Lemme 5. Soient G un groupe localement compact et  $\mu$  une mesure de Haar de G. Si N est un ensemble essentiellement négligeable de G pour  $\mu$ , les ensembles

$$N' = \{(x,y) \in G \times G | xy \in N\}$$

$$et \qquad N'' = \{(x,y) \in G \times G | x^{-1}y \in N\}$$

sont essentiellement négligeables pour  $\mu \times \mu$ .

Notons d'abord que, pour tout z de G, l'ensemble  $N_z$  défini par  $\{zx \mid x \in N\}$  est essentiellement négligeable puisque  $\mu$  est invariante à gauche.

Soit maintenant K un compact de GxG. Il faut démontrer que K  $\cap$  N' et K  $\cap$  N' sont négligeables pour  $\mu \bigotimes \mu$ . Puisque on peut restreindre  $\mu$  aux projections de K sur G, le théorème de Fubini est applicable et on a :

$$\mu \otimes \mu \ (\mathbb{K} \cap \mathbb{N}') = \int (\mu\{y | (x,y) \in \mathbb{K} \cap \mathbb{N}'\}) d\mu(x)$$
$$= \int \mu(\{y | (x,y) \in \mathbb{K}\} \cap \mathbb{N}_{\underline{x}}) d\mu(x)$$

 $=0\quad \text{puisque}\quad N_{_{X}}\quad \text{est essentiellement negligeable pour}$  tout x et que  $\{y\,|\,(x,y)\in K\}$  est compact. Donc N' est essentiellement negligeable. Le même raisonnement s'applique à N''.

Corollaire 6. Soient G un groupe localement compact,  $\mu$  une mesure de Haar de G et f une fonction  $\mu$ -mesurable sur G. Alors les fonctions f' et f'' définies sur G×G par

$$f'(x,y)=f(xy)\quad et\quad f''(x,y)=f(x^{-1}y)$$
 sont mesurables pour  $\mu\bigotimes\mu$ .

Les démonstrations étant analogues, nous le prouvons pour f'. Soit K un compact de  $G^2$ . Alors  $K_1 = \{xy \mid (x,y) \in K\}$  est compact dans G. Il existe, puisque f est mesurable, une suite  $(f_n)$  de fonctions continues sur  $K_1$  qui converge  $\mu$ -presque partout vers  $f_{|K_1|}$ . Alors les  $f_n'(x,y) = f_n(xy)$  sont continues et convergent vers f' presque partout sur K d'après le *lemme 5*. Donc f' est mesurable.

Théorème 7. Soient G un groupe localement compact et µ une mesure de Haar de G. Si f et g sont µ-intégrables, l'intégrale

$$J(y) = \int f(x)g(x^{-1},y)d\mu(x)$$

converge absolument pour µ-presque tout y de G. La fonction J ainsi définie presque partout est µ-intégrable et on a

$$\int |J(y)| d\mu(y) \leq \int |f(x)| d\mu(x) \cdot \int |g(x)| d\mu(x)$$

On note f\*g la fonction J et on l'appelle convolée de f et g.

Si G n'est pas dénombrable à l'infini, µ n'est pas une mesure offinie, et le théorème de Fubini ne peut être employé sans précaution. Néanmoins, en négligeant les ensembles essentiellement négligeables (c'est-à-dire dont la trace sur tout compact est négligeable) et en utilisant les intégrales essentielles, on pourra l'appliquer aux fonctions sur G×G qui sont nulles presque partout en dehors d'une réunion dénombrable de compacts. On pourra vérifier que, chaque fois que le théorème de Fubini sera utilisé, la fonction aura cette propriété, mais nous ne l'expliciterons pas pour ne pas allonger les démonstrations puisque, dans les cas usuels où G est dénombrable à l'infini, cette remarque est inutile.

Notons K(y) l'intégrale  $\int |f(x)| \cdot |g(x^{-1}y)| d\mu(x)$ , à valeurs dans  $[0,+\infty]$ . Par le théorème de Fubini, on a

Donc K(y) est fini pour presque tout y, et puisque, en chaque point où K est fini, J est défini et que  $|J| \le K$ , on a

$$\int |J(y)| d\mu(y) \le \int K(y) d\mu(y)$$

d'où le résultat.

Lemme 8. Soient G un groupe localement compact,  $\mu$  une mesure de Haar de G et f,g,h trois fonctions intégrables sur G pour  $\mu$ . Alors h=f\*g si et seulement si, pour toute fonction mesurable bornée  $\phi$  sur G, on a

$$\int h(t)\phi(t)d\mu(t) = \iint f(x)g(y)\phi(xy)d\mu(x)d\mu(y)$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{split} \int f * g(t) \phi(t) d\mu(t) &= \iint f(x) g(x^{-1}t) \phi(t) d\mu(x) d\mu(t) \\ &= \int f(x) [\int g(x^{-1}t) \phi(t) d\mu(t) ] d\mu(x) \\ &= \int f(x) [\int g(t) \phi(xt) d\mu(t) ] d\mu(x) \\ &= \int f(x) g(t) \phi(xt) d\mu(x) d\mu(t) \end{split}$$

Inversement, si  $\int h(t)\phi(t)d\mu(t)=\iint f(x)g(y)\phi(xy)d\mu(x)d\mu(y)$  on a  $\int (h-f*g)(t)\phi(t)d\mu(t)=0$  pour toute fonction mesurable bornée  $\phi$ , ce qui entraîne que h-f\*g est nulle presque partout.

D'après l'unicité à un facteur près de la mesure de Haar, les espaces de Banach  $L^1(G,\mu')$  et  $L^1(G,\mu'')$  pour deux mesures de Haar  $\mu'$  et  $\mu''$  sont isométriques. On notera  $L^1(G)$  l'espace  $L^1(G,\mu)$  pour une mesure de Haar  $\mu$  arbitraire.

Théorème 9. L'espace de Banach  $L^1(G)$  muni du produit de convolution  $(f,g) \to f*g$  est une algèbre de Banach, commutative si G est commutatif, avec unité si G est discret.

Il résulte du théorème 7 que la convolution, qui est clairement bilinéaire, vérifie  $||f*g|| \le ||f||.||g||$ . Pour prouver que  $L^1(G)$  est une algèbre de Banach, il reste à prouve l'associativité. Soient donc f,g,h dans  $L^1(G)$  et  $\phi$  dans  $L^\infty(G)$ . Alors, d'après le lemme 8.

Un calcul analogue donne aussi

$$\int [(f*g)*h](t)\phi(t)d\mu(t) = \iiint f(x)g(y)h(z)\phi(xyz)d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z)$$

d'où le résultat cherché.

Si G est commutatif, on a, pour f et g dans  $L^1(G)$  et  $\phi$  dans  $L^\infty(G)$ , d'après le *lemme 8*.

$$\int f *g(t) \phi(t) d\mu(t) = \int f(x) g(y) \phi(xy) d\mu(x) d\mu(y)$$

$$\int g *f(t) \phi(t) d\mu(t) = \int f(x) g(y) \phi(yx) d\mu(x) d\mu(y)$$

d'où f\*g=g\*f, puisque  $\phi(xy)=\phi(yx)$ .

Si G est discret, la mesure de Haar est discrète et charge chaque point. Si  $\alpha$  est la mesure de  $\{\theta\}$ , où  $\theta$  désigne l'élément neutre de G, et si  $\delta$  est la fonction qui vaut  $\frac{1}{\alpha}$  en  $\theta$  et O ailleurs, on vérifie sans peine que, pour toute f,  $f*\delta=\delta*f=f$ . Donc  $\delta$  est l'unité de convolution de  $L^1(G)$ .

Lemme 10. Soit f un élément de  $L^1(G)$ . L'application de G dans  $L^1(G)$  qui à x associe  $f_x$  est continue.

Puisque 
$$||f_{xy}-f_y||=||(f_x-f)_y||=||f_x-f||$$

il suffit de montrer que  $\lim_{x\to 0} ||f_x-f||=0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe une fonction g continue à support compact K telle que  $||f-g|| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Soit  $V_0$  un voisinage relativement compact de  $\theta$ . Alors  $V_0 \cdot K = \{x,y | x \in V_0, y \in K\}$  est relativement compact, donc de mesure finie. Et puisque g est uniformément continue, il existe un voisinage V de  $\theta$ , qu'on peut supposer inclus dans  $V_0$  tel que

$$v_x \in V$$
,  $v_y \in G$   $|g(x^{-1}y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(V_o \cdot K)}$ 

Alors, si  $y \notin V_0$ .K (donc  $y \notin K$ ),  $g(x^{-1}y)=g(y)=0$ , car  $g(x^{-1}y)\neq 0 \Rightarrow x^{-1}y \in K \Rightarrow y=x.x^{-1}y \in V.K \subset V_0$ .K. II en résulte que, pour x dans V,

$$\int |(g_{x}-g)(y)| d\mu(y) < \frac{\varepsilon}{3\mu(V_{o}\cdot K)} \mu(V_{o}\cdot K) = \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où 
$$||f_{X}-f|| \le ||f_{X}-g_{X}|| + ||g_{X}-g|| + ||f-g|| = ||g_{X}-g|| + 2||f-g||$$
  
 $\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$ 

Ceci achève la démonstration du lemme.

Théorème 11. L'algèbre  $L^1(G)$  a une unité approchée de norme 1, quand G est commutatif.

Soient  $\epsilon > 0$  et  $f_1, \ldots, f_k$  dans  $L^1(G)$ . Il existe, d'après le lemme précédent, un voisinage V de  $\theta$  tel que

$$\forall x \in V, \quad \forall j \leq k \quad ||(f_j)_x - f_j|| < \epsilon$$

Si u est une fonction mesurable réelle positive d'intégrale 1 à support

dans V, on a 
$$||u||=1$$
. De plus, pour  $j \le k$ ,

$$(u*f_{j}-f_{j})(y) = \int u(x)f_{j}(x^{-1}y)d\mu(x)-f_{j}(y)$$

$$= \int u(x)(f_{j}(x^{-1}y)-f_{j}(y))d\mu(x)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} & \left| \left( u * f_j - f_j \right) (y) \right| \leq \int \!\!\!\!\! \left| u(x) \right| f_j(x^{-1}y) - f_j(y) \left| d\mu(x) \right| \\ & \left| \left| u * f_j - f_j \right| \right| \leq \left| u(x) \right| f_j(x^{-1}y) - f_j(y) \left| d\mu(x) d\mu(y) \right| \end{aligned}$$

et puisque 
$$u(x)=0$$
 si  $x \notin V$  et que  $||(f_j)_x - f_j|| < \epsilon$  si  $x \in V$ , 
$$||u*f_j - f_j|| \le \left|u(x).\epsilon.d\mu(x)=\epsilon \right| = car \left|u(x)d\mu(x)=1.$$

Le résultat cherché s'en déduit puisque  $u*f_j=f_j*u$  si G est commutatif.

Corollaire 12. Soit G un groupe localement compact. Si  $L^1(G)$  a une unité, G est discret.

 $\leq \left[ u(x) \left[ \left[ f_i(x^{-1}y) - f_i(y) \right] d\mu(y) \right] d\mu(x)$ 

Soit  $\delta$  l'unité de L<sup>1</sup>(G). Il résulte du théorème précédent qu'il existe un voisinage V de  $\theta$  tel que si u est positive d'intégrale 1 nulle hors de V,  $||u*\delta-\delta|| \leq \frac{1}{4} \text{ . En appliquant d'abord à } u_V = \frac{1}{\mu(V)} 1_V \text{, puis à } u_W = \frac{1}{\mu(W)} 1_W \text{ pour } W \text{ voisinage de } \theta \text{ inclus dans } V \text{, on obtient}$ 

$$||u_{V}*\delta-\delta||=||u_{V}-\delta|| \leq \frac{1}{4}$$
  
 $||u_{W}*\delta-\delta||=||u_{W}-\delta|| \leq \frac{1}{4}$ 

donc

$$||u_{V}^{-}u_{W}^{-}|| \leq \frac{1}{2}$$
.

Mais

$$||u_{V}^{-1}u_{W}^{-1}|| = \mu(V \setminus W) \times \frac{1}{\mu(V)} + \mu(W) \times (\frac{1}{\mu(W)} - \frac{1}{\mu(V)})$$

$$= 2 \frac{\mu(V) - \mu(W)}{\mu(V)} \leq \frac{1}{2}$$

d'où

$$\mu(W) \geq \frac{3}{4} \mu(V)$$

c'est-à-dire  $\mu(\{\theta\})=\inf \mu(W) \ge \frac{3}{4} \mu(V) > 0$ .

Et puisque alors, pour tout x de G, on aura  $\mu(\{x\})=\mu(\{\theta\})$ , on aura  $\mu(V) = \sum_{x \in V} \mu(\{x\}) \le \frac{4}{3} \mu(\{\theta\})$ 

d'où  $V=\{\theta\}$ , ce qui signifie que G est discret.

Lemme 13. Si G est commutatif, on a pour f dans  $L^1(G)$ ,  $\int f(x) d\mu(x) = \int f(x^{-1}) d\mu(x)$ 

La forme linéaire  $\nu$  définie sur l'espace des fonctions continues à support compact par

$$v(g) = \int g(x^{-1}) d\mu(x)$$

est une mesure de Haar sur G puisque

$$\begin{split} \nu(g_y) = & \int g((y^{-1}x)^{-1}) d\mu(x) = \int g(x^{-1}y) d\mu(x) \\ = & \int g(yx^{-1}) d\mu(x) = \int g(x^{-1}) d\mu(x) = \nu(g) \end{split}$$

Il en résulte que  $\nu=\lambda\mu$  pour un  $\lambda>0$ . Si G est continue positive à support compact, on a  $\int g(x)d\mu(x)>0$  pourvu que g ne soit pas identiquement nulle, et  $\int g(x^{-1})d\mu(x)>0$ . Donc

$$\int [g(x)+g(x^{-1})] d\nu(x) = \lambda \int [g(x)+g(x^{-1})] d\mu(x)$$

$$= \int g(x^{-1}) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x)$$

$$= \int (g(x^{-1})+g(x)) d\mu(x)$$

Donc  $\lambda=1$  et  $\nu=\mu$ . D'où le lemme.

Théorème 14. Si G est commutatif, on peut définir une involution sur  $L^1(G)$  par  $f^*(x)=f(x^{-1})$ 

Il résulte du lemme précédent que ||f\*||=||f||. Il est clair que

$$(f+g)^*=f^*+g^*$$
, que  $(\lambda f)^*=\overline{\lambda}f^*$  et que  $(f^*)^*=f$ .  
Enfin

$$\begin{aligned} \left(f * g\right)^*(y) &= (\overline{f * g})(y^{-1}) = \int \overline{f}(x) \overline{g}(x^{-1}y^{-1}) d\mu(x) \\ &= \int \overline{f}(x^{-1}) \overline{g}(xy^{-1}) d\mu(x) \qquad \text{d'après 1e lemme 13} \\ &= \int f^*(x) g^*(x^{-1}y) d\mu(x) = f^* * g^*(y) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

### Chapitre III - Algèbres de Banach commutatives

Toutes les algèbres de Banach considérées dans ce chapitre seront supposées commutatives.

<u>Définition 1.</u> Soit A une algèbre de Banach. Une partie I de A est appelé <u>idéal</u> de A si c'est un sous-espace vectoriel et si le produit de tout élément de I et de tout élément de A est dans I.

Théorème 2. Si I est un idéal, son adhérence est un idéal fermê.

Puisque I est un sous-espace vectoriel,  $\overline{I}$  est aussi un sous-espace vectoriel. Et si  $a \in A$ , l'ensemble des x de A tels que xa soit dans  $\overline{I}$  est fermé et contient I, donc contient  $\overline{I}$ .

<u>Définition 3.</u> Si A est une algèbre de Banach avec unité, et I un idéal de A, I est dit <u>maximal</u> si  $I \not= A$  et si tout idéal contenant I est égal à I ou à A.

<u>Théorème 4.</u> Un idéal maximal d'une algèbre de Banach à unité est toujours fermé.

Soit I un idéal maximal de A. Alors I ne contient aucun élément inversible de A. En effet, si I contenait un élément inversible u,  $u^{-1}u=e$  serait dans I, ainsi que x.e=x pour tout x de A, et on aurait I=A. Et puisque les éléments inversibles forment un voisinage de e,  $e \notin \overline{I}$ . Donc  $\overline{I} \not= A$ . Et puisque  $\overline{I}$  est un idéal contenant I, on doit avoir  $\overline{I}=I$ , c'est-à-dire que I est fermé.

Théorème 5. Soient A une algèbre de Banach et I un idéal fermé de A. La relation  $x-y \in I$  est une relation d'équivalence sur A et on peut munir le quotient A/I d'une structure d'algèbre de Banach pour laquelle la projection canonique de A sur A/I est un morphisme continu.

Puisque I est un sous-espace fermé, A/I muni de la norme  $||y||=\inf\{||x|| \mid |x\in y\} \text{ est un espace de Banach} \text{ Si } y_1 \text{ et } y_2 \text{ sont deux classes appartenant à A/I, la classe de } x_1x_2 \text{ est la même pour tout } x_1 \text{ dans } y_1 \text{ et tout } x_2 \text{ dans } y_2. \text{ En effet, si } x_1 \in y_1, x_2 \in y_2, x_1' \in y_1, x_2' \in y_2, x_1' \in y_1' \in y_1$ 

$$\begin{aligned} ||y_1y_2|| &\leq \inf\{||x_1x_2|| \ |x_1 \in y_1, x_2 \in y_2\} \\ &\leq \inf\{||x_1||.||x_2|| \ |x_1 \in y_1, x_2 \in y_2\} \\ &\leq ||y_1||.||y_2|| \end{aligned}$$

Le produit sur A/I est bilinéaire et associatif, comme on le vérifie sans peine.

Il est alors clair que la projection est un morphisme de norme au plus 1.

Théorème 6. Soient A une algèbre de Banach avec unité, et I un idéal fermé. Alors I est maximal si et seulement si A/I est isomorphe à C.

Si A/I est isomorphe à C, on a A $\neq$ I. De plus, si J est un idéal contenant I et si  $\pi$  est la projection canonique de A sur A/I,  $\pi(J)$  est un idéal de A/I. C'est en effet un sous-espace vectoriel, et si  $x \in J$ ,  $y \in A/I$ , il existe  $z \in A$  tel que  $y=\pi(z)$ . Alors  $y.\pi(x)=\pi(zx)\in\pi(J)$  puisque  $zx\in J$ .

Donc, ou bien  $\pi(J)=\{0\}$  ou  $\pi(J)=A/I$  puisque A/I est isomorphe à C qui est un corps.

Si  $\pi(J) = \{0\}, J \subset \pi^{-1}(0) = I \text{ d'où } I = J.$ 

Si  $\pi(J)=A/I$ , pour tout x de A, il existe y dans J tel que  $\pi(x)=\pi(y)$ ,

donc  $x-y \in I \subset J$ , et x=y+(x-y) est dans J. Donc J=A.

Ceci prouve que I est maximal.

Inversement, si I est maximal, A/I est un corps. En effet, si  $y \in A/I$  est non nul et non inversible, l'ensemble J = y.A/I de ses multiples est un idéal de A/I et  $\pi^{-1}(J)$  est un idéal de A, contenant  $\pi^{-1}(y)$  donc distinct de I et ne contenant pas e, donc distinct de A. Puisque, de plus, A/I est une algèbre de Banach, il résulte du théorème de Gelfand-Mazur que A/I est isomorphe à C. Cet isomorphisme  $\phi$  est unique puisque A/I a une unité unique e et qu'on a nécessairement  $\phi(\lambda)=\lambda e$  pour  $\lambda \in C$ .

Théorème 7. (Krull). Si A est une algèbre de Banach avec unité, tout idéal distinct de A est contenu dans un idéal maximal.

Notons J l'ensemble des idéaux de A ne contenant pas l'unité e, ordonné par inclusion. Alors J est inductif : en effet, si  $(I_t)_{t\in T}$  est une famille totalement ordonnée d'idéaux,  $I=\bigcup I_t$  est un idéal de A, qui ne contient pas e si aucun des  $I_t$  ne contient e, et qui majore chaque  $I_t$ .

Il résulte alors du théorème de Zorn que chaque J de  $\overline{J}$  est contenu dans un élément maximal de  $\overline{J}$  , c'est-à-dire un idéal maximal.

<u>Définition 8.</u> On appelle <u>caractère</u> de l'algèbre A tout homomorphisme d'algèbre non nul de A dans C.

Un caractère est donc nécessairement surjectif.

Soit  $\chi$  un caractère de A.

Théorème 9. Tout caractère de A est une forme linéaire continue de norme au plus 1. Si A possède une unité e, pour tout x de A et tout  $\lambda$  tel que  $|\lambda| > ||x||$ , e- $\frac{x}{\lambda}$  est inversible, d'inverse y.

On a donc

$$\chi(e^2) = [\chi(e)]^2 = \chi(e)$$

d'où  $\chi(e)=0$  ou  $\chi(e)=1$ . Mais si  $\chi(e)=0$ , on doit avoir pour tout x de A

$$\chi(x)=\chi(ex)=\chi(e)\chi(x)=0$$

et  $\chi$ , identiquement nul, n'est pas un caractère. Donc  $\chi(e)=1$ , et

$$1=\chi(e)=\chi((e-\frac{x}{\lambda}).y)=[1-\frac{\chi(x)}{\lambda}].\chi(y)$$

d'où 1- $\frac{\chi(x)}{\lambda}\neq 0$ , c'est-à-dire  $\chi(x)\neq \lambda$ . Il en résulte que  $|\chi(x)| \leq ||x||$ , d'où le résultat.

Si A n'a pas d'unité et si A' est obtenue par adjonction d'une unité à A, on peut prolonger de façon unique  $\chi$  en un caractère  $\chi$ ' sur A' en posant

$$\chi'(x,\lambda)=\chi(x)+\lambda$$

puisque

 $(x,\lambda)=(x,0)+\lambda(0,1)$  et qu'on doit avoir

$$\chi'(x,0)=\chi(x)$$
 et  $\chi(0,1)=1$ .

On vérifie immédiatement que  $\chi'$  est un caractère de A'. Il en résulte, d'après ce qui précède, que

$$|\chi'(x,\lambda)| \leq ||x|| + |\lambda|$$

donc que  $|\chi(x)| \le ||x||$ , pour  $\lambda=0$ .

Ceci achève la démonstration.

Théorème 10. Si l'algèbre de Banach A a une unité, le noyau de tout caractère est un idéal maximal. Inversement tout idéal maximal est le noyau d'un unique caractère. Ceci définit donc une bijection entre les caractères et les idéaux maximaux.

Si  $\chi$  est un caractère,  $M=\chi^{-1}(0)$  est un sous-espace vectoriel de A. De plus, si  $\chi\in M$  et  $\chi\in A$ ,

$$\chi(xy)=\chi(x)\cdot\chi(y)=0\cdot\chi(y)=0$$

d'où  $xy \in M$ . Donc M est un idéal. Puisque  $\chi$  est continu, M est fermé. L'homomorphisme  $\chi$  se factorise par A/M: il existe  $\phi$ , homomorphisme de A/M dans C tel que  $\chi=\phi\circ\pi$ , où  $\pi$  est la projection canonique de A sur A/M. Puisque M est le noyau de  $\pi$ ,  $\phi$  est bijective, donc un isomorphisme de A/M sur C. Et M est donc un idéal maximal.

Inversement, si M est un idéal maximal, il existe un unique isomorphisme  $\phi$  de A/M sur C. Alors  $\chi=\phi\circ\pi$  est un homomorphisme surjectif de A sur C, donc un caractère. Si  $\chi_1$  était un autre caractère de noyau M, il existerait un isomorphisme  $\phi_1$  de A/M sur C tel que  $\chi_1=\phi_1\circ\pi$ . Mais l'unicité de l'isomorphisme de A/M sur C donne  $\phi=\phi_1$ , d'où  $\chi=\chi_1$ .

<u>Définition 11.</u> On appelle <u>spectre</u> de l'algèbre A l'ensemble X(A) des caractères de A, muni de la topologie de la convergence simple sur A.

Théorème 12. Si A possède une unité, X(A) est un espace compact. Dans le cas général, X(A) est localement compact.

Notons, pour  $a \in A$ ,  $D_a$  le disque fermé de C centré en O et de rayon ||a||, qui est un espace compact. Puisque pour tout caractère  $\chi$  de A,  $\chi(a) \in D_a$  d'après le théorème 9, on peut définir une application j de  $\chi(A)$  dans l'espace produit A par A

$$j(\chi)=(\chi(a))_{a\in A}$$

L'espace produit  $Q = \Pi$  D est compact d'après le théorème de Tychonnof, et j est un homéomorphisme de X(A) sur son image dans Q par définition de la topologie de la convergence simple.

Si A possède une unité e, l'image dans Q du spectre de A est l'ensemble

des  $q=(q_a)_{a\in A}$  qui vérifient

$$\begin{cases} i) & q_e^{=1} \\ i)) & \forall x \in A, \ \forall \lambda \in C \\ & q_{\lambda x}^{=\lambda q_x} \end{cases}$$

$$iii) & \forall x \in A, \ \forall y \in A$$

$$q_{x+y}^{=q_x+q_y} = q_x+q_y \text{ et } q_{xy}=q_x,q_y.$$

Alors pour tout x et tout y de A et tout  $\lambda$  de C, les sous-ensembles de Q :

$$\begin{split} &F_{o} = \{q \in Q | q_{e} = 1\} \\ &F_{x,\lambda} = \{q \in Q | q_{\lambda x} - \lambda q_{x} = 0\} \\ &H_{x,y} = \{q \in Q | q_{x+y} - q_{x} - q_{y} = 0\} \\ &H_{x,y}^{t} = \{q \in Q | q_{xy} - q_{x} q_{y} = 0\} \end{split}$$

sont fermés dans Q et leur intersection, fermée dans Q, est compacte. Il en résulte que X(A) est compact.

Dans le cas général, l'ensemble des éléments de Q qui vérifient ii) et iii) ci-dessus est compact car fermé dans Q comme intersection des  $F_{X,\lambda}$ , des  $H_{X,y}$  et des  $H'_{X,y}$ , et est la réunion de j(X(A)) et du point  $\omega$  défini par :  $\omega_X$ =0 pour tout x. En effet, un homomorphisme de A dans C est soit un caractère, soit identiquement nul.

Il en résulte que j(X(A)), complémentaire d'un point dans un compact, est localement compact, de même que X(A) puisque j est un homéomorphisme de X(A) sur son image.

Théorème 13. Si l'algèbre de Banach A a une unité, et si x est un élément de A, le spectre de x est l'ensemble des valeurs prises sur x par les caractères de A.

Soit o(x) le spectre de x. Si  $\lambda$  est dans o(x), x- $\lambda$ e n'est pas inversible, et  $J=\{(x-\lambda e).y | y\in A\}$  est un idéal de A qui ne contient pas e. Il existe donc un idéal maximal M, noyau d'un caractère  $\chi$  qui contient J.

Par conséquent,

 $x-\lambda e=(x-\lambda e).e \in J \subset M$ 

et

 $\chi(x-\lambda e)=\chi(x)-\lambda=0$ . Donc  $\chi(x)=\lambda$ .

Inversement, si  $\chi(x)=\lambda$ , x- $\lambda$ e est dans le noyau de  $\chi$ , donc n'est pas inversible, et  $\lambda$  appartient à  $\sigma(x)$ .

Corollaire 14. Soit A une algèbre avec unité. Si aucun caractère de A ne s'annule sur un élément x, x est inversible dans A.

En effet, O n'appartient pas au spectre de x.

<u>Définition 15.</u> On appelle <u>radical</u> d'une algèbre de Banach A l'ensemble des éléments <u>quasi-nilpotents</u>, c'est-à-dire dont le rayon spectral est nul.

Théorème 16. Le radical de A est un idéal fermé, intersection des noyaux des caractères de A.

Il suffit clairement de montrer que le radical  $\mathcal R$  de A est l'intersection des noyaux des caractères de A. Supposons d'abord que A a une unité.

Si x appartient à  $\Re$ , le spectre de x est  $\{0\}$  d'après le théorème 11 du chapitre I. Il résulte alors du théorème 13 que tout caractère s'annule sur x. Inversement, si x n'appartient pas à  $\Re$ , il existe dans o(x) un  $\lambda$  de module  $o(x)\neq 0$ . Il existe donc un caractère  $\chi$  de A tel que  $\chi(x)=\lambda\neq 0$ .

Si A n'a pas d'unité, soit A' l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A. Si x est dans  $\mathcal{R}$ ,  $||x^n||^{1/n}\to 0$ . Donc x est dans le radical  $\mathcal{R}'$  de A'. Et puisque tout caractère  $\chi$  de A est la restriction d'un caractère  $\chi'$  de A', on a  $\chi(x)=0$ . Si x n'est pas dans  $\mathcal{R}'$ ,  $||x^n||^{1/n}$  ne tend pas vers 0, et x n'est pas dans  $\mathcal{R}'$ . Il existe donc  $\chi'$  dans  $\chi(A')$  tel que  $\chi'(x)\neq 0$ . La restriction  $\chi$  de  $\chi'$  à A n'est pas identiquement nulle puisque  $\chi(x)\neq 0$ . C'est donc un

caractère de A qui ne s'annule pas sur x.

Définition 17. Soient A une algèbre de Banach et X son spectre. Pour tout élément x de A, la transformée de Gelfand de x est la fonction  $\hat{x}$  de X dans C définie par  $\hat{x}(\chi)=\chi(x)$ .

Théorème 18. La transformation de Gelfand est un homomorphisme continu, de norme au plus 1, de A dans  $C_{C}(X)$ .

Soient A' l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A, et Y son spectre. Alors Y est compact, et X s'identifie à un sous-espace de Y en identifiant un caractère de A à son unique prolongement à A'. Notons  $\omega$  l'unique caractère de A' dont la restriction à A n'est pas un caractère, car identiquement nulle :

$$\omega(x,\lambda)=\lambda$$
.

Alors X=Y\{ $\omega$ \}. Et, pour tout x de A, la transformée de Gelfand de x relativement à A est la restriction à X de la transformée de Gelfand de x relativement à A', donc la restriction à X d'une fonction sur Y nulle en  $\omega$ , et continue par définition de la topologie de Y.

Donc  $\hat{x}$  appartient à  $C_{O}(X)$ . De plus,

 $||\hat{x}|| = \sup_{\chi \in X(A)} |\hat{x}(\chi)|$  est égal à  $\rho(x)$ , donc au plus égal à ||x||,

en vertu du théorème 13.

Enfin, par définition des caractères, l'application  $x \to \hat{x}$  est un homomorphisme d'algèbre.

Il en résulte que l'ensemble  $\widehat{A}$  des transformées de Gelfand des éléments de A est une sous-algèbre de  $C_n(X)$ .

Théorème 19. Le spectre de  $C_o(X)$  s'identifie à X. La transformation de Gelfand est alors l'identité.

Supposons d'abord X compact. Alors  $C_O(X)=C(X)$ . Soit  $\chi$  un caractère de C(X). S'il n'existe aucum point de X où s'annulent toutes les fonctions de M=Ker  $\chi$ , les ouverts  $U_f=\{x\mid f(x)\neq 0\}$  pour  $f\in M$  recouvrent le compact X.

Il existe alors  $f_1, \ldots, f_k$  dans M telles que  $X = \bigcup_{j=1}^K U_j$ . Alors la fonction  $g = \sum_{j=1}^K f_j \cdot \overline{f_j}$  est dans M et ne s'annule pas sur X. Donc  $\frac{1}{g}$  est dans C(X), d'où  $1 = g \cdot \frac{1}{g} \in M$ , ce qui est impossible.

Donc il existe un point  $x_0$  de X où s'annulent toutes les fonctions de M. Et puisque l'ensemble  $I_{x_0}$  des fonctions continues nulles en  $x_0$  est un idéal qui ne contient pas 1, on a  $M \subseteq I_{x_0}$  donc  $M=I_{x_0}$  puisque M est un idéal maximal.

Enfin, l'application  $\epsilon_{\chi_0}: f \to f(x_0)$  est clairement un caractère, de noyau M, donc est égale à  $\chi$ .

Les caractères de C(X) sont donc les évaluations  $\varepsilon_X$  aux points de X. L'application  $\varepsilon: x \to \varepsilon_X$  de X dans le spectre de C(X) est continue et surjective. De plus, si x et x' sont deux points distincts de X, il existe une fonction continue sur X qui vaut 1 en x et 0 en x', ce qui entraîne que  $\varepsilon_X \ne \varepsilon_{X'}$ , c'est-àdire que  $\varepsilon$  est injective, donc est un homéomorphisme puisque X est compact.

Si on identifie X au spectre de C(X) par  $\epsilon$ , la transformée de Gelfand de f vaut

$$\hat{f}(x) = \varepsilon_x(f) = f(x)$$

d'où f=f.

Dans le cas général, si Y est le compactifié d'Alexandroff de X,  $C_0(X)$  s'identifie à l'ensemble des fonctions continues sur Y qui s'annulent au point à l'infini, et l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à  $C_0(X)$  est isomorphe à C(Y).

Le spectre de  $C_0(X)$  est donc homéomorphe au complémentaire dans le spectre de C(X) du caractère nul sur  $C_0(X)$ , c'est-à-dire au complémentaire dans Y du point à l'infini, donc à X. Et comme précédemment, la transformation de Gelfand est l'identité de  $C_0(X)$  dans  $C_0(X)$ .

<u>Définition 20.</u> Soit G un groupe localement compact commutatif. On appelle <u>caractère</u> de G tout homomorphisme continu de G dans le groupe multiplicatif U des nombres complexes de module 1.

Théorème 21. L'ensemble des caractères de G muni du produit ponetuel est un groupe, noté  $\hat{G}$ , et appelé groupe dual de G. Si on le munit de la topologie de la convergence compacte,  $\hat{G}$  est un groupe localement compact.

Il est clair que le produit de deux caractères est un caractère, ainsi que l'inverse d'un caractère. Donc Ĝ est un groupe, dont l'élément neutre est la fonction constante 1.

Pour tout voisinage compact V de l'élément neutre 0 de G, nous noterons  $\tilde{V}$  l'ensemble des caractères  $\xi$  de G, tels que, pour tout x de V,  $|\xi(x)-1| \le 1$ .

Par définition de la topologie de la convergence compacte,  $\tilde{V}$  est un voisinage de 1 dans  $\hat{G}$ . De plus  $\tilde{V}$  est compact : en effet, en vertu du théorème d'Ascoli, il suffit, puisque U est compact, de montrer que  $\tilde{V}$  est équicontinu en chaque point de G, et que  $\tilde{V}$  est fermé.

V est clairement fermé dans les fonctions continues sur G. Et puisque

$$|\xi(x) - \xi(x_0)| = |\xi(x_0)(\xi(xx_0^{-1}) - \xi(\theta))|$$

$$= |\xi(xx_0^{-1}) - 1|$$

il suffit de prouver l'équicontinuité de  $\overset{\sim}{V}$  en  $\theta$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier n tel que  $|e^{\frac{1\pi}{3.2^n}} - 1| \le \varepsilon$ .

Si  $\frac{\pi}{3.2^n} \le \alpha \le \pi$ , il existe un  $k \le n$  tel que

$$\frac{\pi}{3} \le 2^k \cdot \alpha \le \pi$$

|w-1| ≤ ε

Donc, si w=e^{i\alpha} appartient à U, on a  $|\text{w-1}| \le \epsilon$  ou il existe  $k \le n$  tel que  $|\text{w}^2 - 1| > 1.$ 

Il existe une suite  $(V_k)$  de voisinages compacts de  $\theta$  dans G tels que  $V_0=V$  et  $V_k$ . $V_k\subseteq V_{k-1}$ . Alors, si x est dans  $V_n$ ,  $x^{2k}$  est dans V pour  $k=0,1,\ldots,n$ , et si  $\xi$  est dans V,  $w=\xi(x)$  vérifie

$$|w^{2^{k}} - 1| = |\xi(x^{2^{k}}) - 1| \le 1$$
 pour k=0,...,n

Il en résulte que, pour tout  $\xi$  dans  $\mathring{V}$ , on a  $|\xi(x)-1| \leq \epsilon$  dès que x est dans  $V_n$ , ce qui est l'équicontinuité de  $\mathring{V}$  en  $\theta$ .

Par ailleurs, il est clair que  $\hat{G}$  est muni d'une topologie de groupe. Et puisque 1 a un voisinage compact  $\hat{V}$  (pour un voisinage compact V arbitraire de  $\theta$ ),  $\hat{G}$  est localement compact.

Théorème 22. Si  $\xi$  est un caractère de G, l'application définie sur  $L^1(G)$  par  $f + \int f(x)\overline{\xi(x)}d\mu(x)$  est un caractère de  $L^1(G)$ . De plus, tout caractère de  $L^1(G)$  est de cette forme, et l'application ainsi définie de  $\hat{G}$  sur le spectre de  $L^1(G)$  est un homéomorphisme.

Soit  $\xi \in \hat{G}$ . L'application  $\chi : f \to \int f(x) \xi(\overline{x}) d\mu(x)$  est une forme linéaire continue sur  $L^1(G)$  puisque  $\overline{\xi}$  est dans  $L^\infty(G)$ . De plus, d'après le *lemme 8* du chapitre II, si f et g sont dans  $L^1(G)$ ,

$$\chi(f*g) = \int (f*g)(y)\xi(y)d\mu(y)$$

$$= \iint f(x)g(y)\xi(x)d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= \iint f(x)g(y)\xi(x)\xi(y)d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= \int f(x)\xi(x)d\mu(x) \cdot \int g(y)\xi(y)d\mu(y)$$

$$= \chi(f) \cdot \chi(g).$$

Donc, puisque  $\xi$  n'est pas nul presque partout,  $\chi$  n'est pas nul sur  $L^1(G)$  et est un caractère de  $L^1(G)$ .

Inversement, soit  $\chi$  un caractère de  $L^1(G)$ . Si f est dans  $L^1(G)$ , l'application  $x \to f_\chi$  est continue de G dans  $L^1(G)$ , donc l'application  $x \to \chi(f_\chi)$  est continue de G dans C.

On vérifie de plus sans peine que si f et g sont dans  $L^{1}(G)$   $f_{x}*g = f*g_{x}= (f*g)_{x}$ ,

donc que

$$\chi(f_{\underline{x}}).\chi(g)=\chi(f)\chi(g_{\underline{x}})$$

En particulier si  $g=f_{\chi^{-1}}$ ,  $\chi(f_{\chi}).\chi(f_{\chi^{-1}})=\chi(f)^2$ . Et si f n'est pas dans 1'idéal M noyau de  $\chi$ ,  $f_{\chi} \notin M$ . Donc, si f et g sont hors de M

$$\frac{\chi(f)}{\chi(f_X)} = \frac{\chi(g)}{\chi(g_X)}$$

La fonction  $\phi(x) = \frac{\chi(f)}{\chi(f_X)}$  est donc continue et indépendante de f choisie hors de M. Avec  $g=f_y$ , on a

$$\phi(xy) = \frac{\chi(f)}{\chi(g_x)} = \frac{\chi(f)}{\chi(f_y)} \cdot \frac{\chi(g)}{\chi(g_x)} = \phi(y) \cdot \phi(x)$$
Enfin
$$|\phi(x)| = \left| \frac{\chi(f_{-1})}{\chi(f)} \right| \leq \frac{x}{|\chi(f)|} = \frac{||f||}{|\chi(f)|}$$

Donc ø est bornée sur G. Et puisque

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\phi(x^n)| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\phi(x)|^n < +\infty$$

on a necessairement  $|\phi(x)|=1$ . Donc  $\phi$  est dans  $\hat{G}$ , et  $\frac{1}{\phi}=\overline{\phi}$ .

Puisque  $\chi$  est une forme linéaire continue sur  $L^1(G),$  il existe une fonction  $\xi$  dans  $L^\infty(G)$  telle que

$$\chi(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

Alors, si g est hors du noyau de  $\chi$ , on a, par le théorème de Fubini, pour f dans  $L^1(G)$  :

$$\chi(\mathbf{f}) \cdot \chi(\mathbf{g}) = \chi(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = \int \mathbf{f} * \mathbf{g}(\mathbf{y}) \overline{\xi}(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y})$$

$$= \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}^{-1} \mathbf{y}) \overline{\xi}(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{y})$$

$$= \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) [\int \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \overline{\xi}(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}) ] d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{g}_{\mathbf{x}}) d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{x})} \cdot \chi(\mathbf{g}) d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \chi(\mathbf{g}) \cdot \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \overline{\phi}(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

Donc

$$\chi(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \overline{\phi}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mu(\mathbf{x})$$

Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  dans  $\hat{G}$  définissent le même caractère, la fonction  $\phi_1 - \phi_2$  est continue et nulle presque partout, donc nulle, et  $\phi_1 = \phi_2$ .

Soit  $H=\widehat{G}\cup\{\infty\}$  le compactifié d'Alexandroff de  $\widehat{G}$  et soient X le spectre de  $L^1(G)$  et  $X'=X\cup\{\omega\}$  le compactifié d'Alexandroff de X ( $\omega$  est la fonction nulle sur  $L^1(G)$ ). On définit une fonction bijective j de H sur X' par :

$$j(\phi)$$
:  $f \to \int f(x)\overline{\phi}(x)d\mu(x)$  pour  $\phi \in \hat{G}$   
 $j(\infty)=\omega$ 

On va montrer que j est continue du compact H sur le compact X', donc est un homéomorphisme, d'où résultera que X est homéomorphe à  $\hat{G}$ .

Soit donc  $\phi_0 \in \hat{G}$ . Il faut montrer que, pour toute f de  $L^1(G)$ ,  $\int f(x)\overline{\phi}(x)d\mu(x) \text{ tend vers } \int f(x)\overline{\phi_0(x)}d\mu(X) \text{ quand } \phi \text{ tend vers } \phi_0. \text{ Si } f \in L^1(G)$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe g continue à support compact K telle que  $||f-g|| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Alors si  $x \notin K$  |f(x)| = |f(x) - g(x)| et donc

$$\int_{\mathbb{K}^{\mathbf{C}}} |f(\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}) \leq ||f - g|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Si V est le voisinage de  $\phi_{\mathbf{O}}$  défini par

$$V = \{ \phi \in \hat{G} | V_X \in K | \phi(x) - \phi_O(x) | \leq \frac{\varepsilon}{3||f||} \}$$

on a pour  $\phi \in V$ ,

$$\begin{split} \left| \int f(x) \overline{\phi}(x) d\mu(x) - \int f(x) \overline{\phi}_{O}(x) d\mu(x) \right| & \leq \int_{K} |f(x)| \cdot |(\phi - \phi_{O})(x)| d\mu(x) \\ & + \int_{K^{C}} |f(x)| \cdot |(\phi - \phi_{O})(x)| d\mu(x) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3 \cdot ||f||} \int_{K} |f(x)| d\mu(x) + 2 \int_{K^{C}} |f(x)| d\mu(x) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{split}$$

Donc j est continue en  $\phi_0$ .

Pour montrer la continuité de j en  $\infty$ , soient  $f \in L^1(G)$  et  $\epsilon > 0$ . Il existe un voisinage W de  $\theta$  dans G tel que

$$\forall x \in W \quad ||f_x - f|| < \varepsilon$$

Alors, si  $\phi$  n'appartient pas au compact  $\widetilde{W}$ , il existe x dans W tel que  $|\phi(x)-1| > 1$ , et on a, en notant  $\chi=j(\phi)$ :

$$|\chi(f)| \leq |\overline{\phi}(x)-1| \cdot |\chi(f)| = |\chi(f_x)-\chi(f)| \leq ||f_x-f|| < \varepsilon,$$

d'où la continuité de j en ∞ puisque  $H\setminus \widetilde{W}$  est un voisinage de ∞. Ceci achève la démonstration.

Théorème 23. (Wiener). Soit f une fonction continue sur T=R/Z ne s'annulant pas. Si la série de Fourier de f est absolument convergente, il en est de même de celle de  $\frac{1}{f}$ .

Supposons que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-2i\pi nt}$$

avec 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty.$$

Alors  $a=(a_n)$  appartient à l'algèbre de convolution  $A=L^{\hat{1}}(Z)$ . Si  $\phi$  est un caractère du groupe Z et si  $\phi(1)=e^{2i\pi t}$  avec  $t\in R/Z$ , on a  $\phi(n)=e^{2i\pi nt}$ . Inversement, pour tout  $t\in R/Z$ ,  $\phi(n)=e^{2i\pi nt}$  définit un caractère sur Z. Donc  $\hat{Z}=T=R/Z$ , et la transformée de Gelfand de a est la fonction

$$\hat{a}: t \rightarrow \Sigma a_n e^{-2i\pi nt} = f(t)$$

Puisque f ne s'annule pas, aucun caractère de A s'annule sur a. Donc a est inversible dans A (qui a une unité puisque Z est discret) et

$$\hat{a}^{-1} = \frac{1}{f}$$

II en résulte que si  $b=a^{-1}=(b_n)$ , on a

$$\frac{1}{f(t)} = \hat{b}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-2i\pi nt}$$

ce qui prouve la convergence absolue de la série de Fourier de  $\frac{1}{r}$ .

## Chapitre IV - Algèbres hermitiennes et C\*-algèbres

Lemme 1. Soient A une algèbre de Banach avec unité u, et A' l'algèbre de Banach obtenue par adjonction à A d'une unité e. Pour tout y de A, u+y est inversible dans A si et seulement si e+y est inversible dans A'.

Si e+y=(y,1) a un inverse  $(z,\lambda)$  dans  $A^1$ , on a

$$(y,1)(z,\lambda)=(z,\lambda)(y,1)=(0,1)$$

c'est-à-dire

$$(yz+z+\lambda y,\lambda)=(zy+z+\lambda y,\lambda)=(0,1)$$

ou encore

$$\lambda=1$$
 et  $yz=zy=-(y+z)$ 

Inversement, s'il existe  $z \in A$  tel que yz=zy=-(y+z), e+z est l'inverse de e+y dans A'.

Si u+y a un inverse u+w dans A, on a

$$(u+y)(u+w)=(u+w)(u+y)=u$$

c'est-à-dire

u+y+w+yw=u+y+w+wy=u

ou encore

yw=wy=- (y+w)

Inversement, s'il existe  $w \in A$  tel que yw=wy=-(y+w), u+w est l'inverse de u+y dans A.

L'inversibilité de e+y dans A' et de u+y dans A sont donc équivalentes.

<u>Définition 2.</u> Soit A une algèbre de Banach involutive. On dira que A est  $\frac{hermitienne}{hermitienne}$  si, pour tout x de A, e+xx est inversible dans l'algèbre A' obtenue par adjonction à A de l'unité e.

Il résulte du lemme précédent que si A a une unité u, elle est hermitienne si et seulement si, pour tout x, u+xx est inversible dans A.

<u>Théorème 3.</u> Si A est une algèbre de Banach commutative, A est hermitienne si et seulement si tout caractère  $\chi$  de A est hermitien, c'est-à-dire vérifie  $\chi(x^*)=\overline{\chi(x)}$  pour tout x de A.

Soit A' l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité e à A.

Si tout caractère de A est hermitien, il en est de même de tout caractère de A' : en effet, soient  $\chi'$  un caractère de A' et  $\chi$  sa restriction à A. Ou bien  $\chi$  est un caractère de A. Alors

$$\chi'((x,\lambda)^*) = \chi'(x^*,\overline{\lambda}) = \chi(x^*) + \overline{\lambda}$$
$$= \overline{\chi(x)} + \overline{\lambda} = \overline{\chi(x)} + \lambda = \overline{\chi'(x,\lambda)}$$

ou bien  $\chi=0$ , et

$$\chi'((x,\lambda)^*)=\overline{\lambda}=\overline{\chi'(x,\lambda)}$$

Donc si x est dans A, on a, pour tout caractère χ' de A',

$$\chi^*(e+x.x^*)=1+\chi(x).\chi(x^*)=1+\chi(x).\overline{\chi(x)}$$
  
=1+ $|\chi(x)|^2\neq0$ .

Donc e+xx\* est inversible dans A'. Ceci prouve que A est hermitienne.

Inversement, si A est hermitienne et si  $\chi$  est un caractère de A, on va montrer que  $\chi$  est réel sur les éléments hermitiens de A. Soit  $\chi'$  l'unique caractère de A' prolongeant  $\chi$ .

Si y est hermitien dans A et si  $\chi(y)=\alpha+i\beta$ , avec  $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$  et  $\beta\neq0$ , ou bien  $\alpha=0$ , et si on pose  $x=\frac{y}{\beta}$  on a  $x=x^*$  et  $\chi'(e+xx^*)=1+\chi(x)^2=1+i^2=0$ , contrairement à l'hypothèse que  $e+xx^*$  est inversible.

Si, au contraire,  $\alpha \neq 0$  et si, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $z=y^2+\theta y$ , on a  $z=z^*$  et  $\chi(z)=(\alpha+i\beta)^2+\theta(\alpha+i\beta)=\alpha^2-\beta^2+\theta\alpha+i\beta(2\alpha+\theta)$ 

En choisissant 
$$\theta = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha}$$
, on a  $\chi(z) = i\beta \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha}$ 

Et, comme plus haut, avec  $x = \frac{\alpha z}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)}$ 

$$\chi^{1}(e+xx^{*})=0$$

d'où la contradiction.

Donc  $\chi(y) \in \mathbb{R}$  si  $y=y^*$ . Soit maintenant  $x \in A$ . Alors  $x_1 = \frac{x+x^{-}}{2}$  et  $x_2 = \frac{x-x}{2i}$  sont hermitiens. Et si on pose  $\alpha = \chi(x_1)$  et  $\beta = \chi(x_2)$ , on a  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\chi(x) = \alpha + i\beta$  et  $\chi(x^*) = \alpha - i\beta$ .

D'où le résultat cherché.

On peut remarquer que ceci prouve que A' est hermitienne dès que A est hermitienne, puisque le caractère  $\chi'$  est hermitien dès que sa restriction  $\chi$  à A est hermitienne.

Lemme 4. Soient A une algèbre de Banach hermitienne avec une unité e, et B une sous-algèbre fermée involutive de A contenant e. Alors, si un élément de B est inversible dans A, son inverse est dans B.

Soit x un élément de B, d'inverse y dans A. Alors xy=yx=e. Donc \*\*\*\*\*\* y x=x y =e =e, et xx est inversible dans A, d'înverse y y.

Pour t > 0, on a  $xx^*+te=t(e+\frac{x}{\sqrt{t}}\cdot(\frac{x}{\sqrt{t}})^*)$  qui est inversible dans A. Donc  $\phi(t)=(xx^*+te)^{-1}$  existe dans A pour  $t \ge 0$ , et  $\phi$  est continue de R<sup>†</sup> dans A.

Alors  $H=\phi^{-1}(B)$  est fermé dans  $R^+$ . De plus, t est dans H si et seulement si  $\phi(t)$  est dans B, c'est-à-dire si  $xx^*$ +te est inversible dans B. Il résulte du théorème 8 du chapitre I que H est ouvert dans  $R^+$ . Enfin, si  $t > ||x||^2 = ||x|| . ||x^*|| \ge ||x.x^*||$   $\phi(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{-n} (xx^*)^n$ 

et puisque  $x \in B$ , on a  $x^* \in B$  et  $xx^* \in B$ , donc  $\phi(t) \in B$ , et  $t \in H$ .

Puisque  $R^{\dagger}$  est connexe, H, qui est ouvert fermé et non vide, est égal à  $R^{\dagger}$ , donc contient O.

Ceci montre que y y est dans B, ainsi que

$$x^{-1}=y=x^*,(y^*y).$$

La même démonstration prouve que si A est une algèbre hermitienne et B une sous-algèbre fermée involutive de A, tout élément de B qui est inversible dans A' a son inverse dans B'.

Théorème 5. Soient A une algèbre de Banach hermitienne avec une unité e, et B une sous-algèbre fermée involutive de A contenant e. Alors, pour tout x de B, les spectres  $\sigma_A(x)$  et  $\sigma_B(x)$  de x relativement aux algèbres A et B sont identiques.

En effet, pour  $\lambda \in C$ ,  $\lambda \notin \sigma_A(x)$  si et seulement si x- $\lambda$ e est inversible dans A, donc d'après le lemme précédent, si et seulement si x- $\lambda$ e est inversible dans B, c'est-à-dire si et seulement si  $\lambda \notin \sigma_R(x)$ .

Théorème 6. Soit A une algèbre de Banach hermitienne et B une sous-algèbre involutive. Alors B est hermitienne. Si, de plus, A est commutative, tout caractère de B se prolonge en un caractère de A.

Soit x um élément de B. Alors e+xx\* est inversible dans A', puisque A est hermitienne. Donc e+xx\* est inversible dans B' d'après la remarque qui suit le *lemme 4*. Donc B est hermitienne.

Si A est commutative, on peut, quitte à adjoindre une unité e à A et à B, supposer que A possède une unité qui appartient à B.

Soit  $\chi_0$  un caractère de B et notons  $M_0$  le noyau de  $\chi_0$  dans B. Supposons que  $\chi_0$  ne se prolonge pas en un caractère sur A. Alors, pour tout  $\chi$  dans

le spectre X de A, il existe un x dans B tel que  $\chi(x) \neq \chi_0(x)$ , et avec  $y=(x-\chi_0(x).e)$ , on a  $y \in M_0$  et  $\chi(yy^*)=|\chi(x)-\chi_0(x)|^2$  puisque B est hermitienne.

Alors l'ensemble  $V_y$  des caractères  $\psi$  sur A tels que  $\psi(yy^*) > 0$  est un voisinage de  $\chi$ . Donc  $(V_y)_{y\in M_0}$  est un recouvrement ouvert du compact X, et il existe un nombre fini  $(y_1,\ldots,y_k)$  d'éléments de  $M_0$  tel que  $X=\bigcup_{j=1}^k V_j$ . Posons alors

$$w = \sum_{j=1}^{k} y_j y_j^* \in B$$

On a

$$\chi_{o}(w) = \sum_{j=1}^{k} |\chi_{o}(y_{j})|^{2} = 0.$$

Donc O est dans le spectre de  $\,w\,$  relativement à  $\,B.$  Et pour tout  $\,\chi\,$  de  $\,\chi\,$ 

$$\chi(w) = \sum_{j=1}^{K} |\chi(y_{j})|^{2} > 0$$

Donc O n'est pas dans le spectre de w relativement à A. Et ceci contredit le théorème précédent.

Théorème 7. Soit A une algèbre de Banach avec une unité. Alors A est hermitienne si et seulement si, pour tout x de A, le spectre de xx est contenu dans  $R^{\dagger}$ .

Si le spectre de  $xx^*$  est contenu dans  $R^+$ , -1 n'y appartient pas. Donc  $e^+xx^*$  est inversible. Il en résulte que A est hermitienne si le spectre de  $xx^*$  est contenu dans  $R^+$  pour tout x de A.

Inversement, si A est hermitienne et si x est un élément de A, l'algèbre B engendrée par e et  $x^*$  est involutive, donc hermitienne, et commutative. Puisque  $x^*$  est hermitien, tout caractère de B prend sur  $x^*$  une valeur réelle. Donc le spectre de  $x^*$  est contenu dans R. Par ailleurs, pour  $x^*$  ne contient aucune valeur strictement négative. Il en résulte que le spectre de  $x^*$  est contenu dans  $x^*$ .

Théorème 8. Soient A une algèbre de Banach hermitienne commutative et X son spectre. Alors l'algèbre  $\hat{A}$  image de A par la transformation de Gelfand est dense dans  $C_O(X)$ .

Supposons d'abord que A possède une unité. Alors X est compact. De plus, puisque les caractères de A sont hermitiens, si f est la transformée de Gelfand de x,  $\overline{f}$  est la transformée de Gelfand de x.

Donc  $\hat{A}$  est stable par conjugaison. Si  $\chi \neq \chi'$  dans X, il existe x dans A tel que  $\chi(x) \neq \chi(x)$ . Donc  $\hat{A}$  sépare les points de X. Enfin  $\hat{A}$  contient les constantes.

Il résulte alors du théorème de Stone-Weierstrass que  $\hat{A}$  est dense dans  $C(X)=C_{o}(X)$ .

Dans le cas général, si A' est l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A et X'=XU{ $\omega$ } le spectre de A', il résulte de ce qui précède que Â' est dense dans C(X'). Donc, si f est dans  $C_{0}(X)$  et  $\varepsilon > 0$ , on peut prolonger f en une fonction continue sur X' en posant  $f(\omega)=0$ , et il existe  $(x,\lambda)$  dans A' dont la transformée de Gelfand g vérifie

$$||g-f|| < \frac{\varepsilon}{2}$$
.

En particulier  $|g(\omega)-f(\omega)|=|g(\omega)|=|\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}$ .

D'où  $||\hat{x}-f|| \le ||\hat{x}-g|| + ||g-f|| < \epsilon$  puisque  $\hat{x}-g=\lambda$ . Ceci prouve la densité de dans  $C_o(X)$ .

<u>Définition 9.</u> Soit A une algèbre de Banach hermitienne commutative. Une forme linéaire continue f sur A est dite <u>positive</u> si, pour tout x de A, on a  $f(xx^*) \in R^+$ .

<u>Théorème 10.</u> Tout caractère sur une algèbre de Banach hermitienne commutative est une forme linéaire positive.

En effet, si  $\chi$  est un caractère, on a  $\chi(x^*)=\overline{\chi(x)}$  d'après le théorème 3. D'où

$$\chi(xx^*)=\chi(x).\overline{\chi(x)}=|\chi(x)|^2 \in \mathbb{R}^+$$

Théorème 11. Si A est une algèbre de Banach hermitienne commutative possédant une unité approchée (en particulier si A possède une unité), pour toute forme linéaire positive f sur A, il existe une unique mesure de Radon  $\mu$  positive bornée sur le spectre X de A telle que, pour tout x de A,

$$f(x) = \int_{X} \hat{x}(\chi) d\mu(\chi)$$

Supposons d'abord que A possède une unité e. Soient x et y dans A avec x hermitien.

Posons 
$$\psi(t) = f(y^*(x+te)^{-1}y)$$

qui est défini pour t>0 si le spectre de x est dans  $R^{\dagger}.$  La fonction  $\psi$  est continue, et

$$\psi(t+h)-\psi(t)=f[y^*[(x+(t+h)e)^{-1}-(x+te)^{-1}]y]$$

$$=-f[y^*(x+(t+h)e)^{-1}(x+(t+h)e-(x+te))(x+te)^{-1}y]$$

$$=-h.f[y^*(x+(t+h)e)^{-1}(x+te)^{-1}y]$$

Il en résulte que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} = -f(y^*(x+te)^{-1}(x+te)^{-1}y)$$

$$= -f(z^*z) \le 0$$

en posant  $z=(x+te)^{-1}y$ .

La fonction  $\psi$  est donc dérivable, et sa dérivée est continue et négative.

Enfin, 
$$\psi(t) = \frac{1}{t} f(y^* (e + \frac{x}{t})^{-1} y)$$

$$\lim_{t\to\infty} t\psi(t) = f(y^*y)$$

Donc

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$$

Il en résulte que  $\psi$  est réelle, décroissante et positive. En particulier, avec  $y=y^*=x+te$  pour t>0

$$f((x+te)(x+te)^{-1}(x+te))=f(x)+tf(e) \ge 0.$$

En passant à la limite pour t-0, on a  $f(x) \ge 0$ .

Si x est dans le radical  $\Re$  de A, on a  $\sigma(x)=\{0\}$ . Si de plus x est hermitien, le résultat précédent appliqué à x et à -x donne

$$f(x) \ge 0$$
 et  $-f(x) \ge 0$ 

donc f(x)=0. Si  $x \in \mathbb{R}$ , on a pour tout caractère  $\chi$ ,  $\chi(x)=\chi(x^*)=0$ . Donc  $\frac{x+x^*}{2}$  et  $\frac{x-x^*}{2i}$  sont dans  $\Re$  et hermitiens, d'où  $f(\frac{x+x^*}{2})=f(\frac{x-x^*}{2i})=0$  et f(x)=0.

On peut donc définir sur  $\hat{A}$  une forme linéaire par L(g)=f(x) si  $g=\hat{x}$ , puisque, si  $\hat{x}=\hat{y}$ , x-y est dans  $\hat{A}$ , d'où f(x-y)=0.

Si h est une fonction réelle positive dans  $\hat{A}$ , il existe y dans A tel que  $\hat{y}$ =h, et si  $x=\frac{y+y}{2}$ , on a  $\hat{x}=\frac{\hat{y}+\hat{y}}{2}$ =h. De plus, le spectre de x, qui est l'ensemble des valeurs prises par h est contenu dans  $R^{\dagger}$ . Donc f(x)=L(h)  $\geq$  0. Il en résulte, puisque  $\hat{A}$  est engendrée par les fonctions réelles images des éléments hermitiens, que L est une forme linéaire positive sur les fonctions positives, dont continue pour la norme uniforme, et se prolonge en une mesure positive  $\mu$  sur X, unique puisque  $\hat{A}$  est dense dans C(X). D'où

$$L(\hat{x}) = f(x) = \int_{X} \hat{x}(\chi) d\mu(\chi)$$

Dans le cas où A possède une unité approchée de norme M, et si on prolonge f à A' en posant

$$f(x,\lambda)=f(x)+\lambda M^2||f||$$
,

v f est une forme linéaire continue sur A'.

Montrons que  $\hat{f}$  est une forme positive sur l'algèbre hermitienne A': si  $(x,\lambda)\in A'$ ,

$$(x,\lambda)(x,\lambda)^* = (xx^* + \lambda x^* + \overline{\lambda}x, |\lambda|^2)$$

Donc 
$$f((x,\lambda).(x,\lambda)^*)=f(xx^*+\lambda x^*+\overline{\lambda}x)+|\lambda|^2M^2.||f||$$

Mais, pour  $\varepsilon > 0$ , il existe u dans A avec  $||u|| \le M$  et

$$||ux^*-x^*||=||u^*x-x||<\frac{\varepsilon}{2||f||.|\lambda|}$$

Alors, puisque  $f((x+\lambda u)(x+\lambda u)^*) \in R^+$ , on a

$$f(xx^* + \lambda ux^* + \overline{\lambda} u^* x + \lambda \overline{\lambda} uu^*) \ge 0$$

Et puisque  $f(\lambda \overline{\lambda} uu^*) \le |\lambda|^2 ||f||.||u||.||u^*||=M^2 |\lambda|^2.||f||$ 

$$f(xx^*+\lambda ux^*+\overline{\lambda} u^*x)+|\lambda|^2M^2||f|| \ge 0$$

Alors puisque  $|f(xx^*+\lambda x^*+\overline{\lambda}x)-f(xx^*+\lambda ux^*+\overline{\lambda} u^*x)|$ 

est majoré par  $||f|| \cdot (|\lambda| \cdot ||x^* - ux^*|| + |\lambda| \cdot ||x - u^*x||) < \varepsilon$ ,  $f((x,\lambda) \cdot (x,\lambda)^*)$  est à distance de  $R^+$  au plus  $\varepsilon$ , ce qui achève de prouver la positivité de f, puisque  $\varepsilon$  est arbitraire.

Il existe donc une mesure  $\,\nu\,$  positive sur le spectre  $\,X^{\, \iota} \! = \! X \, \cup \, \{\omega\}\,$  de  $\,A^{\, \iota}$  telle que

$$V(x,\lambda) \in A'$$
  $f(x,\lambda) = \int_{X'} (x,\lambda)^{A} (\chi) d\nu(\chi)$ 

et si  $\mu$  est la restriction de  $\nu$  à X, on a, pour x dans A

$$f(x) = f(x,0) = \int_{X} \hat{x}(x) dv(x) = \int_{X} \hat{x}(x) d\mu x$$

Ceci achève la démonstration.

Théorème 12. Si G est un groupe localement compact commutatif,  $L^1(G)$  est une algèbre hermitienne.

Soit  $\chi$  un caractère de  $L^1(G)$ . Il existe  $\xi \in \hat{G}$  tel que

$$\chi(\mathbf{f}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \overline{\xi}(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

$$\chi(\mathbf{f}^*) = \int \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) \overline{\xi}(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \int \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{-1}) \xi(\mathbf{x}^{-1}) d\mu(\mathbf{x})$$

$$\chi(\mathbf{f}^*) = \int \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

$$= \overline{\chi(\mathbf{f})}$$

Donc  $\chi$  est hermitien. Il résulte du théorème 3 que  $L^1(G)$  est hermitienne.

Théorème 13. Si G est un groupe localement compact commutatif, le radical de  $L^1(G)$  est réduit à  $\{0\}$ .

Soient  $\mathcal{R}$  le radical de L<sup>1</sup>(G) et  $h \in \mathcal{R}$ . Puisque  $||h^n||^{1/n} = ||(h_X)^n||^{1/n}$ , on a  $h_X \in \mathcal{R}$  pour tout x de G. D'après le théorème 11 du chapitre II, il existe une suite  $\phi_k$  de fonctions continues à support compact positives d'intégrale 1 telles que

$$||h*\phi_k-h||\rightarrow 0$$
 et  $||h**\phi_k-h*||\rightarrow 0$ 

Alors 
$$||h_*\phi_k^*+\phi_k^*-h|| \le ||h_*\phi_k^*+\phi_k^*-h_*\phi_k^*||+||h_*\phi_k^*-h||$$

$$\le ||h_*\phi_k^*-h||.||\phi_k^*||+||h_*^*\phi_k^*-h^*||\to 0$$

Si on définit la forme linéaire  $\Phi_k$  sur  $L^1(G)$  par

$$\phi_k(\mathbf{f}) = \int (\phi_k * \phi_k^*)(\mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = (\phi_k * \phi_k^* * \mathbf{f})(\theta)$$

 $\Phi_{k}$  est continue puisque  $\phi_{k}*\phi_{k}^{*}$  est continue à support compact, donc dans  $L^{\infty}$ , et

$$\begin{aligned} \Phi_{k}(f*f^{*}) &= \phi_{k}*\phi_{k}^{*}f*f^{*}(\theta) \\ &= (\phi_{k}*f)*(\phi_{k}*f)^{*}(\theta) \\ &= \int (\phi_{k}*f)(t)(\overline{\phi_{k}*f})(t)d\mu(t) \ge 0 \end{aligned}$$

Donc  $\Phi_k$  est positive, donc nulle sur  $\mathcal R$ , et  $\Phi_k(h_\chi)=0$ . Mais puisque  $0=\Phi_k(h_\chi)=\Phi_k*\phi_k^*+h(\chi^{-1})$ , on  $a\phi_k*\phi_k^*+h=0$  et  $h=\lim_k \phi_k*\phi_k^*+h=0$ . D'où  $\mathcal R=\{0\}$ .

<u>Définition 14.</u> On appelle  $\underline{C^*-algèbre}$  une algèbre de Banach involutive A telle que, pour tout x de A,

$$||xx^*|| = ||x||^2$$

Lemme 15. Si une  $C^*$ -algèbre A a une unité e, on a ||e||=1, à moins que  $A=\{0\}$ . En effet,  $||e||^2=||e.e^*||=||e^*||=||e||$ . D'où ||e||=1 puisque e=0 est impossible si  $A \neq \{0\}$ .

Théorème 16. Si A est une  $C^*$ -algèbre et si  $x \in A$  est hermitien, le rayon spectral de x est égal à ||x||.

On a  $\rho(x) \le ||x||$  dans toute algebre. De plus, pour tout  $k \ge 0$ , on a  $(x^2) = (x^*)^2$ . Donc

$$||x^{2^{k+1}}|| = ||x^{2^k}(x^{2^k})^*|| = ||x^{2^k}||^2$$

Et par récurrence  $||x^{2^k}|| = ||x|||^{2^k}$ , d'où

$$\rho(x) = \lim_{k \to \infty} ||x^2^k||^{1/2^k} = ||x||$$

Théorème 17. Si A est une  $C^*$ -algèbre et si  $x \in A$  est normal, c'est-à-dire commute avec  $x^*$ , le rayon spectral de x est égal à ||x||.

D'après le théorème précédent, l'élément hermitien  $xx^*$  a un rayon spectral égal à  $||xx^*|| = ||x||^2$ . Et puisque  $||(xx^*)^n|| = ||x^n, (x^n)^*|| = ||x^n||^2$ 

$$||(xx^*)^n||^{\ln - ||x^n||^{2/n}$$

et 
$$\rho(xx^*) = \rho(x)^2$$

Donc  $\rho(x)^2 = \rho(xx^*) = ||xx^*|| = ||x||^2$ . D'où le résultat.

Théorème 18. Si A est une  $C^*$ -algèbre commutative, son radical est réduit à  $\{0\}$ , et le rayon spectral de tout élément est égal à sa norme.

Puisque tout élément est normal, on a toujours  $\rho(x)=||x||$ . En particulier, si x est dans le radical de A, on a  $||x||=\rho(x)=0$ , donc x=0.

Lemme 19. Si A est une  $C^*$ -algèbre, il existe un plongement isométrique de A dans une  $C^*$ -algèbre avec unité, qui est commutative si A l'est.

Soit A' l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A. On définit un homomorphisme  $\Phi$  de A' dans  $\mathcal{L}(A)$  par :

$$\Phi(x,\lambda)$$
:  $u \mapsto xu + \lambda u$ 

Soit B la sous-algèbre de  $\mathcal{L}(A)$  image de  $\Phi$ . Alors tout élément de B est somme d'un élément de  $\Phi(A)$  et d'un multiple de l'identité. Donc  $\Phi(A)$  est de codimension 0 ou 1 dans B.

Si  $x \in A$ , on a  $||\Phi(x).u|| = ||xu|| \le ||x||.||u||$  donc  $||\Phi(x)|| \le ||x||$ , et  $||\Phi(x).x^*|| = ||x^*|| = ||x||^2 \le ||\Phi(x)||.||x||$  donc  $||\Phi(x)|| \ge ||x||$ . La restriction de  $\Phi$  à A est donc isométrique, et  $\Phi(A)$  est complète. Donc B est aussi complète.

Si on définit  $\Phi(x,\lambda)^* = \Phi(x^*,\overline{\lambda})$ , on définit une involution sur B. Enfin, si  $t = \Phi(x,\lambda) \in B$ , on a pour tout u de A

$$||t(u)||^{2} = ||t(u)^{*}t(u)|| = ||u^{*}[t^{*}t(u)]||$$

$$\leq ||u^{*}|| ||t^{*}t||.||u||$$

$$||t(u)||^{2} \leq ||t^{*}t||.||u||^{2}$$
Donc
$$||t||^{2} \leq ||t^{*}t|| \leq ||t^{*}||.||t||$$

d'où  $||t|| \le ||t^*||$ , et puisque  $t^{**}=t$ ,  $||t||=||t^*||$  et  $||t||^2 \le ||t^*t|| \le ||t||^2$ . Donc B est une  $C^*$ -algèbre.

Si A est commutative, A' l'est aussi. Donc  $B=\Phi(A')$  est commutative si A l'est.

Théorème 20. Toute C - algèbre commutative est hermitienne.

Le 1emme précédent permet de supposer que la  $C^*$ -algèbre commutative A possède une unité u.

Soit  $\chi$  un caractère de A. Pour tout élément hermitien x de A, on a  $e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!}$ , donc  $(e^{ix})^* = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{x^n}{n!} = e^{-ix}$ 

Donc 
$$e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^{ix} \cdot (e^{ix})^*$$
  
et  $1 = ||u|| = ||e^{ix} \cdot (e^{ix})^*|| = ||e^{ix}||^2 = ||e^{-ix}||^2$   
d'où  $||e^{ix}|| = ||e^{-ix}|| = 1$ 

et 
$$|\chi(e^{ix})| = |\sum_{0}^{\infty} i^{n} \frac{\chi(x)^{n}}{n!}| = |e^{i\chi(x)}| \le ||e^{ix}|| = 1$$
  
 $|\chi(e^{-ix})| = |e^{-i\chi(x)}| \le ||e^{-ix}|| = 1.$ 

Donc  $|e^{i\chi(x)}|=1$ , c'est-à-dire  $\chi(x)\in R$ , ce qui prouve que  $\chi$  est un caractère hermitien.

Théorème 21. (Gelfand-Naimark). Soit A une  $C^*$ -algèbre commutative. Alors la trans-formation de Gelfand est un isomorphisme isométrique de A sur  $C_o(X)$ , où X est le spectre de A.

Puisque le rayon spectral de tout élément est égal à sa norme, la transformation de Gelfand est isométrique de A sur son image  $\hat{A}$  dans  $C_O(X)$ . Il en résulte que  $\hat{A}$  est complète, donc fermée dans  $C_O(X)$ . Et puisque A est hermitienne,  $\hat{A}$  est dense dans  $C_O(X)$ . Donc  $\hat{A}=C_O(X)$ .

Dans le cas où A possède une unité, X est compact, et  $\hat{A}=C_0(X)=C(X)$ .

Théorème 22. Toute C\*-algèbre est hermitienne.

On peut, par le *lemme 19*, se ramener au cas où la C\*-algèbre A possède une unité u.

Soit  $x \in A$ . Puisque  $xx^*$  est hermitien, la sous-algèbre fermée B \* de A engendrée par u et  $xx^*$  est une  $C^*$ -algèbre commutative avec une unité.

Puisque B \* est une algèbre hermitienne, le spectre de xx est contenu dans R. Soient K le spectre de B \* et f la fonction (réelle) xx sur K. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont les parties positive et négative de f, on a

$$f_1 \ge 0$$
,  $f_2 \ge 0$ ,  $f=f_1-f_2$  et  $f_1 \cdot f_2=0$ 

D'après le théorème de Gelfand-Naimark, il existe a et b hermitiens dans  $B_*$  tels que  $\hat{a} = \sqrt{f_1}$  et  $\hat{b} = \sqrt{f_2}$ . Donc  $||ab|| = ||\sqrt{f_1 \cdot f_2}|| = 0$ , et  $xx^* = \hat{a}^2 \cdot \hat{b}^2$ . D'où a.b=0 et  $xx^* = a^2 - b^2$ . On va montrer que  $xx^*$  est le carrê d'un élément hermitien; c'est clair si b=0. Supposons donc b≠0. Alors, si y=bx, on a y.y\*=bxx\*b=b(a^2-b^2)b=-b^4, et puisque b est hermitien,  $||b^2|| = ||b||^2 \neq 0$ . Quitte à remplacer x par y et b par b², on peut donc supposer a=0 et  $xx^* = -b^2 \neq 0$ .

Soit c l'élément hermitien  $\frac{x+x^-}{2}$ . La sous-algèbre fermée  $B_c$  de A engendrée par u et c est une  $C^*$ -algèbre commutative avec unité. Si L est son spectre, la fonction  $\hat{c}$  est réelle, et, quitte à changer x en -x, donc c en -c, on peut supposer

$$||\hat{c}|| = \sup_{\chi \in L} \hat{c}(\chi).$$

donc que, pour  $\epsilon > 0$ ,  $||(u+\epsilon c)^{\Lambda}||=||1+\epsilon c||=1+\epsilon||c||$ . D'après le théorème de Gelfand-Naimark, on a  $||u+\epsilon c||=1+\epsilon||c||$ .

Et puisque  $u+\varepsilon c = \frac{1}{2} (u+\varepsilon x) + \frac{1}{2} (u+\varepsilon x)^*$ , on a

 $1+\varepsilon ||c|| = ||u+\varepsilon c|| \le \frac{1}{2} ||u+\varepsilon x|| + \frac{1}{2} ||(u+\varepsilon x)^*|| = ||u+\varepsilon x||$ 

donc  $(1+\varepsilon||c||)^2=1+2\varepsilon||c||+\varepsilon^2||c||^2 \le ||u+\varepsilon x||^2=||(u+\varepsilon x)(u+\varepsilon x)^*||$  $\le ||u-\varepsilon^2b^2+2\varepsilon c|| \le ||u-\varepsilon^2b^2||+2\varepsilon||c||$ 

Alors, pour  $0 < \epsilon < \frac{1}{||b||}$ , on a  $||u-\epsilon^2b^2||=||1-\epsilon^26^2|| \le 1$ .

Donc  $1+2\varepsilon||c||+\varepsilon^2||c||^2 \le 1+2\varepsilon||c||$ , d'où c=0, et x=-x\*. Le même raisonnement, en remplaçant x par ix, donne x=x\*. Donc  $x=x^*=0$  et  $b^2=-xx^*=0$ .

Donc  $xx^*$  est le carré d'un élément hermitien a, dont le spectre est réel, et puisque  $u+xx^*=u+a^2=(a+iu)(a-iu)$ , a+iu et a-iu sont inversibles, et  $u+xx^*$  aussi.

Donc A est une algèbre hermitienne.

Dans une  $C^*$ -algèbre A, un élément hermitien x est dit positif si son spectre (relatif à l'algèbre A' obtenue par adjonction d'une unité) est contenu dans  $R^+$ . Le théorème précédent montre que, pour tout x,  $xx^*$  est un élément positif.

Théorème 23. Si A est une  $C^*$ -algèbre et a un élément hermitien positif, il existe un unique élément hermitien positif b de A tel que  $b^2$ =a. Cet élément est appelé racine carrée hermitienne de a.

Soit  $B_a$  la sous-algèbre fermée de A engendrée par a. Alors  $B_a$  est une  $C^*$ -algèbre commutative, de spectre  $X_a$ . Puisque le spectre de a est contenu dans  $R^+$ , relativement à A, donc aussi à  $B_a$ , tout caractère  $\chi$  de  $B_a$  est réel positif sur a ; donc  $\hat{a}$  est positif dans  $C_o(X_a)$ , et il existe une fonction positive f dans  $C_o(X_a)$  telle que  $f^2=\hat{a}$ . Par le théorème de Gelfand-Naimark, il existe b

dans  $B_a$  tel que  $\hat{b}=f$ . Puisque  $\hat{b}$  est réel,  $\hat{b}=\hat{b}^*$ ; donc  $b=b^*$ . Et puisque f est positive, le spectre de b dans  $B_a$ , donc aussi dans A est contenu dans  $R^{\dagger}$ .

Si c est un hermitien positif tel que  $c^2$ =a, la sous-algèbre  $B_c$  fermée engendrée par c est une  $C^*$ -algèbre commutative et contient  $c^2$ =a, donc contient  $B_a$ : Il en résulte que  $b \in B_c$ . Alors, si  $X_c$  est le spectre de  $B_c$ , les fonctions réelles positives  $\hat{b}$  et  $\hat{c}$  dans  $C_o(X_c)$  vérifient  $\hat{b}^2=\hat{c}^2=\hat{a}$ , d'où  $\hat{b}=\hat{c}$ . Et puisque  $||b-c||=||\hat{b}-\hat{c}||=0$ , on a b=c.

## Chapitre V - Espaces hilbertiens

<u>Définition 1.</u> Soit E un espace vectoriel sur C. On appelle <u>produit scalaire</u> sur E une fonction de  $E \times E$  dans  $C: (x,y) \rightarrow < x,y > qui satisfait:$ 

$$< x_1 + x_2, y > = < x_1, y > + < x_2, y >$$
 pour  $x_1, x_2, y$  dans  $E$ 
 $< x, y_1 + y_2 > = < x, y_1 > + < x, y_2 >$  pour  $x, y_1, y_2$  dans  $E$ 
 $< \lambda x, y > = \lambda$ .  $< x, y > = < x, \lambda y >$  pour  $x, y$  dans  $E$ ,  $\lambda$  dans  $C$ 
 $< x, x > \in R^+$  pour  $x$  dans  $E$ 
 $< x, x > = 0 \Rightarrow x = 0$ 

On appelle <u>espace préhilbertien</u> un espace vectoriel sur C muni d'un produit scalaire.

Lemme 2. Si E est un espace préhilbertien, on a, pour x et y dans E,

$$\langle \overline{x,y} \rangle = \langle y,x \rangle$$

En effet, 
$$\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle$$
  
=  $\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$ 

et 
$$2\alpha = \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle = \langle x+y,x+y \rangle - \langle x,x \rangle - \langle y,y \rangle \in \mathbb{R}$$
.

En remplaçant y par iy, on a

$$2\beta = -i < x,y > + i < y,x > = < x+iy,x+iy > - < x,x > - < iy,iy > \in R$$
Donc
$$< x,y > = \alpha+i\beta$$

$$< y,x > = \alpha-i\beta = < x,y >$$

Théorème 3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Si E est un espace préhilbertien,

on a pour tous x et y de E:

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle . \langle y,y \rangle$$

Si, de plus,  $|\langle x,y \rangle|^2$  est égal à  $\langle x,x \rangle$ .  $\langle y,y \rangle$ , x et y sont proportionnels.

5-52-1

. Posons  $< x,y > = r.e^{i\theta}$ , avec  $r \in R^+$ ,  $\theta \in R$ . Alors, pour  $t \in R$ , on a  $< y,x > = re^{-i\theta}$  et

$$0 \le < x + te^{i\theta}y, x + te^{i\theta}y > = < x, x > + te^{i\theta} < y, x >$$

$$+ te^{-i\theta} < x, y > + t^{2} < y, y >$$

$$= < x, x > + 2rt + t^{2} < y, y >$$

Puisque ce trinôme du second degré reste positif, on a

$$r^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0$$

d'où l'inégalité cherchée. Si  $r^2 = \langle x, x \rangle$ .  $\langle y, y \rangle$ ,  $t = -\frac{\langle x, x \rangle}{r}$  est racine du trinôme, ou  $r = \langle y, y \rangle = 0$ . Dans ce premier cas, on a  $x = \frac{\langle x, x \rangle}{r}$  e<sup>i $\theta$ </sup>.y, et dans le second y=0. Donc x et y sont proportionnels si  $|\langle x, y \rangle|^2 = r^2 = \langle x, x \rangle$ .  $\langle y, y \rangle$ .

On peut remarquer qu'on a l'inégalité dès que  $< x,x > \in R^+$  pour tout x, même si < x,x > = 0 n'entraîne pas x=0.

Théorème 4. Soit E un espace préhilbertien. Alors l'application  $x + (< x, x >)^{1/2}$  est une norme sur E. Un espace préhilbertien sera toujours considéré comme un espace normé, muni de la norme précédente.

On a bien  $||x|| = (\langle x,x \rangle)^{1/2} \in \mathbb{R}^+$  et  $||x|| = 0 \Rightarrow \langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x=0$ . De plus, pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ 

$$||\lambda x||^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \overline{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \cdot ||x||^2, \text{ d'où}$$

$$||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$$

Enfin,

$$||x+y||^2 = \langle x+y,x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle + \langle x,y \rangle + \langle x,y \rangle$$
  
=  $||x||^2 + ||y||^2 + 2 \Re (\langle x,y \rangle)$ 

Et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\Re(< x,y >) \le |< x,y >| \le ||x||.||y||$$

Donc  $||x+y||^2 \le ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$ .

Ceci achève de prouver le résultat cherché.

<u>Définition 5</u>. On appelle <u>espace de Hilbert</u> ou <u>espace hilbertien</u> un espace préhilbertien complet pour la norme.

<u>Lemme 6.</u> Soit E un espace préhilbertien. Pour tout x de E on a

$$||x|| = \sup \{|\langle x, y \rangle| : y \in E \ et \ ||y|| \leq 1\}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|< x,y>| \le ||x||.||y|| \le ||x|| \text{ si } ||y|| \le 1.$$

Inversement, si x=0, on a < x,y >=0 pour tout y. Et, si x $\neq$ 0 et y =  $\frac{x}{||x||}$ , on a

$$||y|| = \frac{1}{||x||} \cdot ||x|| = 1$$

$$< x,y > = \frac{< x,x >}{||x||} = ||x||$$

D'où le résultat.

Théorème 7. Soient E un espace de Hilbert et A une partie convexe fermée non vide de E. Alors, pour tout x de E, il existe un unique point y de A tel que

$$||x-y|| = d(x,A) = \inf_{z \in A} ||x-z||$$

De plus, y est caractérisé par :

$$[y \in A \ et \ \forall z \in A, \ \Re e < x-y, z-y > \leq 0]$$

Soit  $r = \inf_{z \in A} ||x-z||$ . Posons, pour  $\varepsilon > 0$ ,

$$A_{\varepsilon} = \{z \in A | ||x-z|| \le r+\varepsilon\} \neq \emptyset$$

Alors  $A_{\epsilon}$  est convexe et fermé. De plus, si z et z' sont dans  $A_{\epsilon}$ ,  $z'' = \frac{z+z'}{2}$  est dans  $A_{\epsilon}$  et on a

$$||x-z||^{2} + ||x-z^{*}||^{2} = ||(x-z^{*}) + (\frac{z-z^{*}}{2})||^{2} + ||(x-z^{*}) - (\frac{z-z^{*}}{2})||^{2}$$

$$= ||x-z^{*}||^{2} + \frac{1}{4}||z-z^{*}||^{2} + \frac{1}{2} \Re e < x-z^{**}, z-z^{*} >$$

$$+ ||x-z^{**}||^{2} + \frac{1}{4}||z-z^{*}||^{2} - \frac{1}{2} \Re e < x-z^{**}, z-z^{*} >$$

$$= 2||x-z^{**}||^{2} + \frac{1}{2}||z-z^{*}||^{2}$$

Et puisque  $||x-z''|| \ge r$  et  $||x-z|| \le r+\varepsilon$  et  $||x-z'|| \le r+\varepsilon$  on obtient :

$$\frac{1}{2} ||z-z^{\dagger}||^{2} = ||x-z||^{2} + ||x-z^{\dagger}||^{2} - 2||x-z^{\dagger\dagger}||^{2}$$

$$\leq 2(r+\varepsilon)^{2} - 2r^{2} = 2\varepsilon(2r+\varepsilon)$$

$$||z-z^{\dagger}||^2 \le 4\varepsilon(2r+\varepsilon)$$

Donc le diamètre de  $A_{\varepsilon}$  est au plus  $\sqrt{4\varepsilon(2r+\varepsilon)}$ .

Alors, puisque E est complet, la suite  $A_{1/n}$  de fermés décroissants dont les diamètres tendent vers 0 a une intersection non vide réduite à un singleton  $\{y\}$ .

On a donc ||x-y||=r et y est le seul point de A à distance  $\leq r$  de x. Si z est un point arbitraire de A, on a, puisque A est convexe,  $y+t(z-y) \in A$  pour  $0 < t \leq 1$ . Donc

$$||x-[y+t(z-y) | 1||^{2} \ge r^{2} = ||x-y||^{2}$$

$$||x-y||^{2} \le ||(x-y)-t(z-y)||^{2} = ||x-y||^{2} + t^{2} ||z-y||^{2} - 2t \Re e < x-y, z-y > t^{2}$$

d'où 
$$t[t||z-y||^2-2 \Re e < x-y,z-y > ] \ge 0$$
  
et  $\Re e < x-y,z-y > \le \frac{t}{2} ||z-y||^2$ 

d'où, en faisant tendre t vers 0,

$$\Re e < x-y, z-y > \le 0$$
 pour tout z de A.

Inversement, si un point y' de A vérifie

$$\forall z \in A$$
  $\Re e < x-y', z-y' > \leq 0$ 

on a, pour z=y,

$$\Re e < x-y', y-y' > \le 0$$

Mais, puisque

$$\Re e < x-y,y'-y > \le 0$$

on a 
$$\Re(x-y',y-y') + \Re(x-y-x,y-y') \le 0$$

donc 
$$\Re (x-y^*,y-y^*) = ||y-y^*||^2 \le 0$$

ce qui entraîne y=y'.

Corollaire 8. Soient E un espace hilbertien et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Pour tout x de E, il existe un unique point y de F tel que ||x-y|| soit égal à la distance de x à F. Ce point y est caractérisé dans F par  $[\forall z \in F, \langle x-y, z \rangle = 0]$ ; on l'appelle la projection orthogonale de x sur F.

Puisque F est convexe, l'existence et l'unicité de y résultent du théorème précédent.

De plus, si < x-y,z > = 0 pour tout z de F, on a pour tout z' de F, puisque  $z=z'-y \in F$ 

 $\Re < x-y,z'-y > = 0$ , d'où le fait que y est la projection orthogonale de x sur F, d'après le théorème précédent.

Inversement, si y est la projection orthogonale de x sur F, pour tout z de F, y+z est dans F. Donc

$$\Re(\langle x-y,(y+z)-y \rangle) = \Re(\langle x-y,z \rangle \leq 0.$$

En remplaçant z par -z on obtient

$$\Re(\langle x-y,-z\rangle) \leq 0$$

d'où  $\Re(\langle x-y,z \rangle)=0$ . Puis en remplaçant z par iz, on a  $\Im(\langle x-y,z \rangle)=0$ . Donc  $\langle x-y,z \rangle=0$ .

<u>Définition 9.</u> Deux vecteurs dans un espace hilbertien sont dits <u>orthogonaux</u> si leur produit scalaire est nul.

Théorème 10. Soit A une partie d'un espace hilbertien E. L'ensemble  $A^{\perp}$  des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de A est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Pour tout x de E, l'application  $y \rightarrow < y, x >$  est une forme linéaire sur E, continue puisque

$$|< y,x>| \le ||x||.||y||$$

Donc  $M_X = \{y \mid < y, x >= 0\}$  est un sous-espace vectoriel fermé de E, et  $A^\perp = \bigcap_{x \in A} M_x$  aussi.

Théorème 11. Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace hilbertien E. Alors, pour tout x de E, il existe une unique décomposition x=y+z avec  $y \in F$  et  $z \in F^{\perp}$ . De plus, on a alors  $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$ .

Si y est la projection de x sur F, z=x-y est dans F d'après le corollaire 8. Inversement, si x=y+z avec y dans F et z dans F , on a < x-y, u > = < z, u > = 0 pour tout u de F. Donc y est la projection orthogonale de x sur F. D'où l'unicité de la décomposition.

Enfin 
$$||x||^2 = \langle y+z,y+z \rangle = ||y||^2 + ||z||^2 + 2 \Re \langle y,z \rangle$$
  
=  $||y||^2 + ||z^2||$ 

puisque y et z sont orthogonaux.

Corollaire 12. Si F est un sous-espace fermé de l'espace hilbertien E, l'orthogonal  $(F^{\perp})^{\perp}$  de  $F^{\perp}$  est égal à F.

Si x est dans F, pour tout y de F, on a

$$< y,x > = < x,y > = 0.$$

Donc  $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$ . Inversement, soit  $x \in (F^{\perp})^{\perp}$ . It exists y dans F et z dans  $F^{\perp}$  tels que x=y+z. Alors x est orthogonal à z, et y aussi; donc

$$0 = \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle + \langle z, z \rangle = ||z||^2$$
.

D'où z=0 et x=y  $\in$  F. Ceci prouve que  $(F^{\perp})^{\perp} \subset$  F. Donc  $(F^{\perp})^{\perp} =$  F.

Corollaire 13. Si V est un sous-espace de l'espace hilbertien E, V est partout dense si et seulement si  $V^{\perp} = \{0\}$ .

Puisque  $\overline{V}$  est un sous-espace fermé, et que  $\overline{V}^{\perp}$  est égal à l'orthogonal de V, on a  $\overline{V}=(V^{\perp})^{\perp}$ .

Donc, si  $V^{\perp} = \{0\}$ ,  $\overline{V} = \{0\}^{\perp} = E$ , et si  $\overline{V} = E$ ,  $V^{\perp} = (\overline{V})^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$ . En effet, si  $x \in E^{\perp}$ , x est orthogonal à E; donc  $\langle x, x \rangle = ||x||^2 = 0$  et x = 0.

Théorème 14. Soient E un espace hilbertien et F un sous-espace fermé de E. L'application  $P_F$  qui à tout x de E associe sa projection orthogonale sur F est une application linéaire continue de norme 1, sauf si  $F=\{0\}$  auquel cas  $||P_F||=0$ . De plus  $P_F$  est idempotente, c'est-à-dire vérifie  $P_F^2=P_F$ .

Soient x,x' dans E,  $\lambda$  dans C, y,y' dans F, z,z' dans F tels que x=y+z et x'=y'+z'. Alors

$$x+x^{1}=(y+y^{1})+(z+z^{1}),$$

et puisque y+y' est dans F, et z+z' dans F, on a

$$y+y'=P_F(x+x')=P_F(x)+P_F(x')$$

De même  $\lambda x = \lambda y + \lambda z$ , et  $\lambda y = P_F(\lambda x) = \lambda P_F(x)$ . D'où la linéarité de  $P_F$ . De plus, puisque

$$||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$$

on a 
$$||P_F(x)|| = ||y|| \le ||x||$$

Denc  $||P_F|| \le 1$ . Si F={0}, on a  $P_F$ =0 donc  $||P_F||$ =0, et si F#{0}, pour  $x \in F$ ,  $x \ne 0$ , on a

$$||P_{F}x|| = ||x|| \neq 0$$
, d'où  $||P_{F}|| \geq 1$ .

Théorème 15. Soient E un espace de Hilbert et P une application linéaire de E dans E telle que  $P^2=P$  et  $||P|| \le 1$ . Alors P est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé de E.

Soit F le noyau de I-P et G le noyau de P (avec I l'opérateur identité). Alors, pour tout x, on a

$$x = Px + (I-P)x$$

De plus  $(I-P)(Px) = Px-P^2x=0$  et  $P((I-P)x)=Px-P^2x=0$ . Donc  $Px \in F$  et  $(I-P) x \in G$ .

Tout élément de E est donc la somme d'un élément de F et d'un élément de G. De plus, si  $x \in F \cap G$ , on a Px=(I-P)x=0, donc x=Px+(I-P)x=0.

Il en résulte que P est la projection sur F parallèlement à G. De plus F et G sont des sous-espaces fermés.

S'il existait un u dans F mais pas dans  $G^{\perp}$ , et si h était la projection orthogonale de u sur G, on aurait h $\neq 0$  et

$$||u-h|| < ||u-0|| = ||u||$$

Mais, puisque  $h \in G$  et  $u \in F$ , on a P(u-h)=u

donc 
$$||u|| = ||P(u-h)|| \le ||u-h|| < ||u||$$

d'où la contradiction. Donc  $F \subset G^{\perp}$ .

Si maintenant  $x \in G^{\perp}$ , on a x=Px+(I-P)x où  $Px \in F \subset G^{\perp}$  et  $(I-P)x \in G$ . Par unicité de la décomposition, on a Px=x donc  $x \in F$ . Il en résulte que  $G^{\perp} \subset F$ . Donc  $F = G^{\perp}$  et P est la projection orthogonale sur F.

Théorème 16. (F. Riesz). Soit E un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue f sur E, il existe un unique point x de E tel que, pour tout y de E,  $f(y) = \langle y, x \rangle$ . De plus, la correspondance ainsi définie entre E et son dual est isométrique et antilinéaire.

Si  $x \in E$ , l'application  $\phi_x : y \mapsto \langle y, x \rangle$  est une forme linéaire sur E, de norme  $||\phi_x|| = \sup\{\langle y, x \rangle : ||y|| \le 1\}$  donc  $||\phi_x|| = ||x||$  d'après le lemme 6.

Alors  $\phi_{X+X}$ ,  $(y) = \phi_X(y) + \phi_X$ , (y). Donc  $\phi_{X+X} = \phi_X + \phi_X$ . De même  $\phi_{\lambda X}(y) = \lambda \phi_X(y)$ , donc  $\phi_{\lambda X} = \lambda \phi_X$ . L'application  $x \mapsto \phi_X$  est donc antilinéaire et isométrique de E dans son dual. Reste à montrer la surjectivité.

Soit donc f une forme linéaire continue sur E. Si F est le noyau de f, F est un sous-espace vectoriel fermé.

Si f=0, F=E et  $f(y) = \langle y, 0 \rangle$  pour tout y.

Si  $f\neq 0$ , il existe un point  $x_0$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ . Notons  $y_0$  la projection de  $x_0$  sur F, on a  $y_0 \neq x_0$  et  $x_0 - y_0$  est orthogonal à F. Soit .

$$x = \frac{f(x_0)}{||x_0 - y_0||^2} (x_0 - y_0)$$

Alors 
$$\langle x_0, x \rangle = \frac{f(x_0)}{||x_0 - y_0||^2} \langle x_0, x_0 - y_0 \rangle$$

et puisque  $y_0$  est dans F, donc orthogonal à  $x_0 - y_0$ ,

$$\langle x_o, x \rangle = \frac{f(x_o)}{||x_o-y_o||^2} \langle x_o-y_o, x_o-y_o \rangle = f(x_o).$$

De plus, si f(y)=0, y est dans F, donc orthogonal à x et f(y)=< y, x>. Il en résulte que la forme linéaire g définie par g(y)=f(y)-< y, x> est nulle sur F et sur  $x_0$ . Et puisque E est somme directe de F et de C.  $x_0$ , g est identiquement nulle. Donc  $f=\phi_x$ .

Définition 17. Soit E un espace hilbertien. Une fonction de EXE dans C est appelée forme sesquilinéaire sur E si la fonction x + f(x,y) est linéaire pour tout y, ainsi que la fonction y + f(x,y) pour tout x.

Théorème 18. Soient E un espace hilbertien et f une forme sesquilinéaire sur E. Si

$$M = \sup\{|f(x,y)| : ||x|| \le 1 \text{ et } ||y|| \le 1\} < +\infty$$

il existe une unique application linéaire continue A de E dans E, telle que pour tout x et tout y de E,

$$f(x,y) = \langle Ax, y \rangle$$

De plus |A| = M.

Soit x dans E. L'application  $y \mapsto \overline{f(x,y)}$  est une forme linéaire. Et puisque, pour x et y,

$$|f(\frac{x}{||x||}, \frac{y}{||y||})| = \frac{1}{||x||.||y||} |f(x,y)| \le M$$

donc 
$$|f(x,y)| \le M.||x||.||y||$$

la forme linéaire ci-dessus est continue de norme au plus M. | x | |. Il existe

donc un point Ax de E tel que pour tout y,

$$\overline{f(x,y)} = \langle y,Ax \rangle$$
 et  $||Ax|| \leq M.||x||$ 

c'est-à-dire  $f(x,y) = \langle Ax,y \rangle$ .

On vérifie sans peine que A est linéaire. Donc A est continue de norme au plus M. De plus, puisque  $|\langle Ax,y \rangle| \leq ||Ax||.||y|| \leq ||A||.||x||.||y||$  on a  $M \leq ||A||$ . Donc ||A|| = M. Si, enfin,  $\langle Ax,y \rangle = \langle A'x,y \rangle$  pour tout x et tout y, on a, avec y=Ax-A'x,  $||Ax-A'x||^2=0$ . Donc Ax=A'x. Et puisque x est arbitraire, A=A'.

Théorème 19. Soient E un espace hilbertien, et q une fonction de E dans C, bornée sur la boule unité de E, qui vérifie

q(ix)=q(x) pour tout x de E q(x+y)+q(x-y)=2q(x)+2q(y) pour tout x et tout y.

Alors il existe une unique application linéaire continue A de E dans E telle que, pour tout x de E,

$$q(x) = \langle Ax, x \rangle$$

Si  $q(x) = \langle Ax, x \rangle$  pour tout x, on doit avoir

$$q(x+y)+iq(x+iy)+i^{2}q(x+i^{2}y)+i^{3}q(x+i^{3}y)$$

= < Ax,x >+< Ay,y >+< Ax,y >+< x,Ay >

+ i< Ax,x >+i< Ay,y >+< Ax,y >+i^{2}< x,Ay >

+i^{2}< Ax,x >+i^{2}< Ay,y >+< Ax,y >+< x,Ay >

+i^{3}< Ax,x >+i^{3}< Ay,y >+< Ax,y >+i^{2}< x,Ay >

=4< Ax,y >

On doit donc avoir

$$< Ax_y> = \frac{1}{4}[q(x+y)+iq(x+iy)+i^2q(x+i^2y)+i^3q(x+i^3y)]$$

ce qui donne l'unicité de A si elle existe.

On va montrer que la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{4} [q(x+y)+iq(x+iy)+i^2q(x+i^2y)+i^3q(x+i^3y)]$$

est une forme sesquilinéaire sur E.

On a 
$$f(0,y) = \frac{1}{4} [q(y)+iq(iy)+i^2q(i^2y)+i^3q(i^3y)] = 0$$

puisque

$$q(y)=q(iy)=q(i^2y)=q(i^3y).$$

On a aussi 
$$f(ix,y) = \frac{1}{4} [q(ix+y)+iq(ix+iy)+i^{2}q(ix+i^{2}y)+i^{3}q(ix+i^{3}y)]$$
$$= \frac{i}{4} [-iq(x-iy)+q(x+y)+iq(x+iy)+i^{2}q(x+i^{2}y)]$$
$$= if(x,y)$$

Enfin, 
$$f(u+v,y)+f(u-v,y) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{3} i^{k} [q(u+v+i^{k}y)+q(u-v+i^{k}y)]$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{3} i^{k} [2q(v)+2q(u+i^{k}y)]$$
$$= 2f(u,y)$$

Donc avec u=v, f(2u,y)=2f(u,y)

Et 
$$f(u,y)+f(v,y)=f(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2},y)+f(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2},y)$$
  
=2f(\frac{u+v}{2},y)=f(u+v,y)

Il en résulte que f(.,y) est additif. On en déduit que  $f(\frac{px}{q},y) = \frac{p}{q} f(x,y)$  si  $p \in Z$  et  $q \in N^*$ .

Par ailleurs, puisque

$$q(x+0)+q(x-0)=2q(x)+2q(0), \text{ on a } q(0)=0$$
 et 
$$q(x+x)+q(x-x)=2q(x)+2q(x), \text{ on a } q(2x)=4q(x)$$

Donc f(2x,2y)=4f(x,y) et f(x,2y)=2f(x,y)

d'où 
$$f(x,y)=2^{k}f(x, \frac{y}{2^{k}})$$

Il en résulte, avec  $2^{k+1} \ge ||y||$ , que puisque q est bornée sur la boule unité de E, f est bornée pour  $||x|| \le \frac{1}{2}$  et  $||y|| \le \frac{1}{2}$ , donc que  $x \mapsto f(x,y)$  est continue.

On a donc f(tx,y)=tf(x,y) pour  $t \in R$ , et puisque f(ix,y)=if(x,y),  $f(\lambda x,y)=\lambda f(x,y)$  pour  $\lambda \in C$ . Donc  $x \to f(x,y)$  est linéaire.

De plus

$$\overline{f}(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{0}^{3} i^{-k} \overline{q}(x+i^{k}y) = \frac{1}{4} \sum_{0}^{3} i^{-k} \overline{q}(i^{-k}x+y)$$

La démonstration précédente montre, en échangeant x et y, que, pour x fixé,  $y \to \overline{f}(x,y)$  est linéaire. Donc f est sesquilinéaire, et bornée pour  $||x|| \le 1$  et  $||y|| \le 1$ . Il existe donc un unique opérateur linéaire continu A tel que

$$f(x,y) = \langle Ax,y \rangle$$

Finalement,

$$f(x,x) = \frac{1}{4} [q(x+x)+iq((1+i)x)-q(x-x)-iq((1-i)x)]$$

et puisque

$$q(2x)=4q(x), q(0)=0 \text{ et } q((1+i)x)=q((1-i)x)$$

car i(1-i)x=(1+i)x, on a f(x,x)=q(x), donc

$$q(x)=f(x,x) = \langle Ax,x \rangle$$

Théorème 20. Soient E un espace hilbertien et A un opérateur continu sur E. Il existe un unique opérateur  $A^*$  sur E tel que, pour tout x et tout y,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A, y \rangle$$

A est appelé l'adjoint de A.

L'application  $f:(x,y)\mapsto \langle Ax,y\rangle$  est une forme sesquilinéaire bornée. Il en est donc de même de  $(x,y)\mapsto \overline{f(y,x)}$ . D'après le théorème 18, il existe donc un unique opérateur  $A^*$  tel que  $\overline{f(y,x)}=\langle A^*x,y\rangle$ .

Donc 
$$\langle Ax,y \rangle = f(x,y) = \langle Ay,x \rangle = \langle x,Ay \rangle$$
.

Théorème 21. Soit E un espace hilbertien. L'application  $A \to A^*$  sur  $\mathcal{C}(E)$  est une involution. Munie de cette involution, l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  est une  $C^*$ -algèbre.

Il est clair que (A\*) \*= A. Ensuite

$$|A| = \sup_{|x| \le 1} |\langle Ax, y \rangle| = \sup_{|x| \le 1} |\langle x, A^*y \rangle| = |A^*|$$
  
 $|y| \le 1$   $|y| \le 1$ 

Et 
$$||A||^2 = ||A|| \cdot ||A^*|| \ge ||AA^*|| \ge \sup_{||x|| \le 1} < AA^*x, x > = \sup_{||x|| \le 1} ||A^*x||^2$$
  
 $\ge ||A^*||^2 = ||A||^2$ 

D'où 
$$||AA^*|| = ||A||^2$$
.

Puisque 
$$< (A_1 + A_2)^* x, y > = < x, (A_1 + A_2)y > = < x, A_1y > + < x, A_2y >$$
  
=  $< A_1^* x, y > + < A_2^* x, y >$   
=  $< (A_1^* + A_2^*)x, y >$ 

on a 
$$(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$$

De même 
$$< (\lambda A)^* x, y > = < x, \lambda Ay > = \overline{\lambda} < x, Ay > = < \overline{\lambda} A^* x, y >$$
  
on a  $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ 

Enfin 
$$\langle A_1 A_2 x, y \rangle = \langle A_2 x, A_1^* y \rangle = \langle x, A_2^* A_1^* y \rangle$$
  
 $= \langle x, (A_1 A_2)^* y \rangle$   
d'où  $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$ 

Théorème 22. Soient E un espace hilbertien et A un opérateur continu sur E. Alors A est hermitien si et seulement si < Ax,x> est réel pour tout x de E. Puisque < A $^*$ x,x> = <  $\overline{Ax}$ ,x>, on a < (A $^*$ -A)x,x> = 0 pour tout x si < Ax,x> est toujours réel. Le résultat d'unicité du théorème 19 donne alors A $^*$ -A=0. Donc A est hermitien.

Inversement, si  $A^*=A$ , on a pour tout x:  $A^*x,x > = Ax,x > Ax,x >$ 

Théorème 23. Soient E un espace hilbertien et P un opérateur continu idempotent sur E. Alors P est un projecteur orthogonal si et seulement si P est hermitien.

Si P est le projecteur orthogonal sur un sous-espace fermé F, on a pour tout x de E,

x=y+z, avec  $Px=y \in F$  et  $z \in F^{\perp}$ 

Donc  $\langle Px, x \rangle = \langle y, y+z \rangle = ||y||^2 + \langle y, z \rangle = ||y||^2 \in \mathbb{R}^+$ 

Ceci entraîne que P=P\* d'après le théorème précédent.

Inversement, si  $P=P^*$ , on a  $P=P^2=PP^*$ , donc  $||P||=||PP^*||=||P||^2$ , d'où ||P||=0 ou ||P||=1. Et P est un projecteur orthogonal d'après le théorème 15.

Théorème 24. Soient E un espace hilbertien et A un opérateur continu sur E. Alors

- a) A\* a un espace image dense si et seulement si A est injectif.
- b)  $A^*$  est surjectif si et seulement s'il existe un c > 0 tel que pour tout x de  $E = ||Ax|| \ge c \cdot ||x||$ .
- c) Ker  $A = A(E)^{\perp}$ .

Prouvons d'abord c). Pour  $x \in E$ ,  $A^*x=0$  est équivalent à Vy,  $A^*x$ , Yy > 0 = 0, donc à  $x \in A(E)^{\perp}$ .

En appliquant c) et le corollaire 13 à A\*, on obtient a).

Supposons maintenant qu'il existe c > 0 tel que, pour tout x,  $||Ax|| \ge c.||x||$ . Alors A est injectif, donc  $A^*$  d'image dense d'après a). De plus, si F=A(E), le sous-espace F est complet, donc fermé : en effet, si  $(y_n)$ 

est une suite de Cauchy dans F, on a  $0 = \overline{\lim} ||y_n - y_p|| \ge \frac{1}{c} \overline{\lim} ||x_n - x_p||$  $y_n = Ax_n$ . Donc la suite  $(x_n)$  est de Cauchy, et converge vers un x. Alors  $(y_n)$ converge vers Ax. Alors A est un isomorphisme de E sur F. Si B<sub>o</sub> est l'opérateur inverse de A de F sur E,  $B = B_0 \cdot P_F$  vérifie BA = I, donc  $A^*B^* = I^* = I$ . Il en résulte que tout x de E est l'image par A\* de Bx;

Inversement, si A\* est surjectif, il existe, d'après le théorème de Banach (chapitre II - théorème 1) un c > 0 tel que, pour tout z tel que  $||z|| \le c$ , il existe y avec  $||y|| \le 1$  et  $z=A^*y$ .

D'où, pour x dans E:

$$||Ax|| = \sup_{||y|| \le 1} |\langle Ax, y \rangle| = \sup_{||y|| \le 1} |\langle x, A^*y \rangle|$$

$$||y|| \le |\langle x, z \rangle| = c ||x||$$

$$||z|| \le c$$

Définition 25. Un opérateur U sur l'espace de Hilbert E est dit unitaire si υυ\*=υ\*υ=Ι.

Théorème 26. Un opérateur U est unitaire si et seulement si U est isométrique et surjectif.

Si U est unitaire, il est inversible, d'inverse U\*, donc surjectif. De plus, pour tout x de E

$$||Ux||^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^*Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle = ||x||^2$$

et U est isométrique.

Inversement, si U est isométrique et surjectif, il est inversible et

$$\langle U^*Ux-x, x \rangle = ||Ux||^2 - ||x||^2 = 0 \text{ pour tout } x$$

$$donc \qquad \qquad U^*U = I \text{ et } U^{-1} = U^*. \text{ Donc } UU^* = U^*U = I.$$

<u>Définition 27.</u> Un opérateur A sur l'espace de Hilbert E est appelé une isométrie partielle si A\*A est un projecteur orthogonal.

Lemme 28. Soient E un espace de Hilbert et  $A \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $A^*A$  est un opérateur hermitien de noyau Ker A et d'image dense dans (Ker A) $^{\perp}$ .

Puisque  $(A^*A)^* = A^*A^* = A^*A$ ,  $A^*A$  est hermitien. Si Ax=0,  $A^*Ax=0$ . Donc  $Ker\ A \subseteq Ker\ (A^*A)$ . Inversement, si  $A^*Ax=0$ , on a  $A^*Ax=0$ , on a  $A^*Ax=0$ ,  $A^*Ax=0$ ,  $A^*Ax=0$ ,  $A^*Ax=0$ ,  $A^*Ax=0$ ,  $A^*Ax=0$ , on a  $A^*Ax=0$ ,  $A^*Ax=0$ , A

Puisque  $A^*A$  est hermitien, il résulte du théorème 24 que Ker  $A^*A=A^*A(E)^{\perp}$ , donc du corollaire 12 que  $A^*A(E) = \text{Ker}(A^*A)^{\perp}$ .

Théorème 29. Si A est une isométrie partielle, il en est de même de A.

L'opérateur  $AA^*$  est hermitien. Pour voir que  $AA^*$  est un projecteur orthogonal, il suffit donc de montrer que  $(AA^*)^2 = AA^*$ . Or  $(AA^*)^2 = A.(A^*A).A^*$ .

Si  $A^*A$  est un projecteur orthogonal, c'est le projecteur orthogonal sur  $F = Ker(A^*A)^{\perp} = Ker A^{\perp} = \overline{A^*(E)}$ .

Alors, si  $x \in E$  et  $y=A^*x$ , on a  $y \in F$ , donc  $A^*Ay=y$ , et  $(AA^*)^2 \cdot x = A(AA^*y) = Ay = AA^*x \cdot D'cu$  le résultat.

Théorème 30. Si A est une isométrie partielle, il existe un sous-espace fermé F de E tel que

a) 
$$Ax = 0$$
 si  $x \in F^{\perp}$ 

b) 
$$||Ax|| = ||x||$$
 si  $x \in F$ 

Inversement, un opérateur qui vérifie ces conditions est une isométrie partielle.

Si 
$$A^*A = P_F$$
, on a, pour  $x \in F^L$   
 $||Ax||^2 = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle P_Fx, x \rangle = 0$ , d'où Ax=0

et pour  $x \in F$ 

$$||Ax||^2 = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle P_Fx, x \rangle = \langle x, x \rangle = ||x||^2.$$

Inversement, si  $z \in F^{\perp}$ ,  $\langle A^*Az, z \rangle = ||Az||^2 = 0$ 

et si 
$$y \in F$$
:  $\langle A^*Ay, y \rangle = ||Ay||^2 = ||y||^2 = \langle y, y \rangle.$ 

D'après le lemme 28, on a, pour tout x,  $A^*Ax \in \text{Ker } A^{\perp}$ . Donc, si x=y+z avec  $y \in F$  et  $z \in F^{\perp}$ 

$$< A^*Ax, x > = < A^*Ay, y > + < A^*Az, z > + < A^*Az, y > + < A^*Ay, z >$$
  
=  $< y, y > = < y, y+z > = < P_Fx, x >$ 

Et, puisque pour tout x on a  $< (A^*A-P_F)x, x > = 0$ , on a  $A^*A = P_F$ . On désignera, jusqu'à la fin de ce chapitre, par H un espace de Hilbert.

On va maintenant donner une démonstration simple du théorème suivant, qui résulte aussi du fait que toute  $C^*$ -algèbre est hermitienne.

Théorème 31. L'algèbre L(H) est hermitienne.

Soit  $A \in \mathcal{L}'(H)$ . Pour tout x de H, on  $a < AA^*x, x > = ||A^*x||^2 > 0$ .

Donc  $< (I+AA^*)x, x > > ||x||^2$  et  $||x||^2 < < (I+AA^*)x, x > < ||x||.||(I+A^*A)x||$ .

D'où  $||(I+AA^*)x|| > ||x||$ . Il en résulte que  $T=I+AA^*$  est injectif, et, d'après le théorème 24, que  $T=T^*$  est surjectif. Donc T est inversible, ce qui prouve que  $\mathcal{L}'(H)$  est hermitienne.

Lemme 32. Soit  $A \in \mathcal{C}(H)$  un opérateur normal. Alors, pour tout x de H,  $||Ax|| = ||A^*x||$ . En particulier Ker  $A = \text{Ker } A^*$ .

Puisque AA\* = A\*A, on a

$$||Ax||^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle = ||A^*x||^2.$$

Donc  $x \in \text{Ker } A \iff ||Ax|| = 0 \iff ||A^*x|| = 0 \iff x \in \text{Ker } A^*$ .

Théorème 33. Soient  $A \in \mathcal{L}(H)$ , F un sous-espace fermé de H et P le projecteur orthogonal sur F. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $A(F) \subseteq F$  et  $A(F^{\perp}) \subseteq F^{\perp}$
- ii)  $A(F) \subseteq F$  et  $A^*(F) \subseteq F$
- iii) AP = PA.
- -i)  $\Rightarrow$  ii) A(F<sup>L</sup>)  $\subseteq$  F<sup>L</sup> est équivalent à  $\forall x \in$  F<sup>L</sup>,  $\forall y \in$  F < Ax,y > = 0 donc à  $\forall x \in$  F<sup>L</sup>,  $\forall y \in$  F < A\*y,x > = 0, c'est-à-dire à A\*(F)  $\subseteq$  F<sup>LL</sup> = F.
- -i)  $\Rightarrow$  iii) Soient  $x \in H$ ,  $y=Px \in F$  et  $z=x-y \in F^{\perp}$ . Alors Ax=Ay+Az,  $Ay \in F$  et  $Az \in F^{\perp}$ . Donc, par unicité de la décomposition, Ay=P(Ax). Donc P(Ax)=APx.
- -iii)  $\Rightarrow$  i)- Soit  $x \in F^{\perp}$ , alors PAx=APx=A(0)=0. Donc  $Ax \in \text{Ker P}=F^{\perp}$ . Et puisque A(I-P)=(I-P)A, on a de même A(F)  $\subset$  F.

Théorème 33. (Décomposition polaire). Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$ . Il existe un opérateur hermitien positif T et une isométrie partielle V, de noyau Ker A et d'image  $\overline{A(H)}$  tels que A=V.T.

L'opérateur A\*A est hermitien positif. Si T est sa racine carrée hermitienne, on a, par le *lemme 28*,

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T = \operatorname{Ker} T^2 = \operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A$$

et

$$T(H) = (\text{Ker } T^*)^{\perp} = \text{Ker } T^{\perp} = \text{Ker } A^{\perp}.$$

Si  $y \in T(H)$ , il existe  $x \in H$  tel que y=Tx. Alors

$$||Ax||^2 = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle T^2x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = ||Tx||^2 = ||y||^2.$$

Et si y=Tx=Tx', 
$$||Ax-Ax'||^2 = ||T(x-x')||^2 = 0$$
.

Il existe donc une application  $V_0$  de T(H) dans A(H) telle que  $V_0(Tx)=Ax$ . Cette application est clairement linéaire, et on a vu que  $||V_0y||=||y||$ .

L'application V se prolonge par continuité en une isométrie linéaire de  $\overline{T(H)}$  sur  $\overline{V_{c}(T(H)}=\overline{A(H)}$ .

Si · P est le projecteur orthogonal sur  $\overline{T(H)}$  = Ker A<sup>L</sup>, V<sub>O</sub>.P=V est une isométrie partielle de noyau Ker P = Ker A et d'image  $\overline{A(H)}$ . Et puisque PT=T, on a

$$VT = V_O PT = V_O T = A.$$

## Chapitre VI - Parties orthonormales

Dans tout ce chapitre, H désignera un espace de Hilbert.

Définition 1. Une partie A de H est dite orthonormale si tout point de A est de norme 1 et si deux points de A sont orthogonaux des qu'ils sont distincts.

Une partie orthonormale de H est appelée basé orthonormale si elle engendre un sous-espace vectoriel dense.

Lemme 2. Une partie orthonormale est libre.

Supposons 
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = 0$$
 avec  $a_j \in A$ .

Alors, pour  $k \in 1,2,...,n$ 

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j} < a_{j}, a_{k} > = \lambda_{k}$$

Donc  $\lambda_k = 0$  pour tout k.

Théorème 3. Si A est une partie orthonormale, on a pour tout x de H

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle x, \alpha \rangle|^2 \leq ||x||^2 < +\infty$$

De plus,  $\Sigma \mid \langle x,a \rangle \mid^2$  est égal à  $||x||^2$  si et seulement si x est adhérent au sous-espace vectoriel engendré par A.

Soient J une partie finie de A et  $P_J$  la projection orthogonale sur le sous-espace V engendré par J. Si x est dans H, on a pour  $y=P_Tx$ 

$$\forall a \in J$$
  $\langle y, a \rangle = \langle P_J x, a \rangle = \langle x, P_J a \rangle = \langle x, a \rangle$ 

et si  $(C_a)_{a\in J}$  sont les coordonnées de y sur la base J de V, on a

$$y = \sum_{a \in J} C_a.a$$

donc

 $\langle y,a \rangle = C_a$  pour  $a \in A$ .

Et puisque

$$||y||^{2} = ||\sum_{a \in J} C_{a} \cdot a||^{2} = \sum_{a,b \in J} C_{a} \cdot \overline{C}_{b} < a,b > = \sum_{a \in J} |C_{a}|^{2}$$

$$= \sum_{a \in J} |\langle y,a \rangle|^{2} = \sum_{a \in J} |\langle x,a \rangle|^{2}$$

Donc

$$\sum_{a \in J} |\langle x, a \rangle|^2 = ||y||^2 \le ||x||^2$$

Et puisque

$$\sup_{J \subseteq A} \sum_{a \in J} |\langle x, a \rangle|^2 \le ||x||^2 < +\infty$$

1a famille  $(|\langle x,a \rangle|^2)_{a \in J}$  est sommable, de somme au plus  $||x||^2$ .

Si  $||x||^2 = \sum_{a \in A} |\langle x, a \rangle|^2$ , il existe pour tout  $\epsilon > 0$  un J fini dans A

tel que 
$$\sum_{a \in J} |\langle x, a \rangle|^2 > ||x||^2 - \epsilon^2$$
. Alors, si  $y=P_J x$ , on a  $||y||^2 = \sum_{a \in J} \{\langle x, a \rangle|^2$ ,

et  $||x||^2 = ||y||^2 + ||x-y||^2$ . Donc  $||x-y||^2 < \varepsilon^2$ . Ceci prouve que x est à distance  $< \varepsilon$  de l'espace engendré par J, donc à distance nulle de l'espace engendré par A.

Inversement, si x est adhérent à l'espace engendré par A, il existe, pour  $\varepsilon > 0$ , une combinaison linéaire finie  $z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j} a_{j}$  telle que  $||x-z|| < \varepsilon$ . Si J est  $\{a_{1}, \ldots, a_{n}\}$  et  $y=P_{J}x$ , on a

$$||x-y||^2 \le ||x-z||^2 < \varepsilon^2$$

Donc  $||x||^2 < ||y||^2 + \varepsilon^2 = \sum_{a \in J} |\langle x, a \rangle|^2 + \varepsilon^2$ .

Ceci achève la démonstration.

Théorème 4. Tout espace hilbertien possède une base orthonormale.

Soit  $\mathcal O$  1'ensemble des parties orthonormales de H ordonné par inclusion. Alors  $\mathcal O$  est inductif : en effet, si  $(A_t)_{t\in T}$  est une famille totalement ordonnée de parties orthonormales,  $A=\bigcup_{t\in T}A_t$  est clairement orthonormale.

Il résulte donc du théorème de Zorn que toute partie orthonormale, en particulier  $\emptyset$ , ou {a} si ||a||=1, est contenue dans une partie orthonormale maximale.

On va montrer qu'une partie orthonormale maximale est une base orthonormale. Si A est maximale dans O, et si V est l'espace engendré par A, ou bien V=H auquel cas A est une base, ou bien  $V \neq H$  et  $V^{\perp} \neq \{0\}$ . Si  $a_0 \in V^{\perp}$  avec  $||a_0||=1$ , il est clair que  $A \cup \{a_0\}$  est orthonormale, contient A et ne lui est pas égale, car  $a_0 \notin A$ . Donc A ne peut être maximale.

Théorème 5. Soit A une base orthonormale de H. Alors, pour tout x de H, la famille  $(< x, a > .a)_{\alpha \in A}$  est sommable dans H, de somme x.

On a  $||x||^2 = \Sigma |\langle x,a \rangle|^2 < +\infty$  d'après le théorème 3. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe J fini dans A tel que  $\Sigma |\langle x,a \rangle|^2 > ||x||^2 - \varepsilon$ .

Alors, pour toute partie finie J' de A contenant J, on a, si  $y = x - \Sigma < x,a > .a$  a&J'

$$\langle y,b \rangle = 0$$
 si  $b \in J'$   
 $\langle y,b \rangle = \langle x,b \rangle$  si  $b \in A \setminus J'$ 

Donc 
$$||y||^2 = \sum_{b \in A} |\langle y, b \rangle|^2 = \sum_{b \in A} |\langle x, b \rangle|^2 \le \varepsilon^2$$

c'est-à-dire que 
$$||x - \Sigma < x,a > .a|| \le \varepsilon$$
  
  $a \in J'$ 

ou encore que la famille < x,a >.a est sommable, de somme x.

Théorème 6. Soient A une base orthonormale de H et  $(\lambda_a)_{a\in A}$  une famille de nombres complexes de carrés sommables. Alors la famille  $(\lambda_a.a)_{a\in A}$  est sommable dans H et sa somme x vérifie pour tout a

$$\langle x, \alpha \rangle = \lambda_{\alpha}$$

Puisque H est complet, il suffit pour prouver la sommabilité, de montrer qu'il existe pour  $\varepsilon > 0$  une partie J de A telle que  $|\sum_{a \in J} \lambda_a \cdot a|| \le \varepsilon$  pour toute partie J' finie et disjointe de J.

Or 
$$\left| \left| \sum_{a \in J} \lambda_a \cdot a \right| \right|^2 = \sum_{a \in J} \left| \lambda_a \right|^2 \le \sum_{a \in A} \left| \lambda_a \right|^2 - \sum_{a \in J} \left| \lambda_a \right|^2$$

Il suffit de choisir J tel que

$$\sum_{a \in J} |\lambda_a|^2 \ge \sum_{a \in A} |\lambda_a|^2 - \varepsilon^2$$

Soit x la somme de cette famille. On a, puisque  $y \rightarrow < u,a >$  est linéaire et continue.

$$\langle x,a \rangle = \sum_{b \in A} \langle \lambda_b.b,a \rangle = \lambda_a.$$

Corollaire 7. Tout espace hilbertien est isométrique à un espace  $l_S^2$ .

Soit S une base orthonormale de H. Soit  $\Phi$  l'application de H dans  $C^S$  définie par

$$\Phi(x)=(\langle x,a \rangle)_{a \in S}$$

Alors  $\Phi$  est à valeurs dans  $\ell_S^2$ , d'après le *théorème 3*, ainsi qu'isométrique. Elle est clairement linéaire, et surjective d'après le théorème précédent.

On va maintenant généraliser ces résultats à des familles de sous-espaces deux à deux orthogonaux, mais pas nécessairement de dimension 1.

Soit  ${\mathcal V}$  une famille de sous-espaces fermés de H deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall v \in V', \ \forall w \in V'$$
  $v \neq w \Rightarrow v \subset w^{\perp}$ 

Théorème 8. Pour tout x de H, on a

$$\sum_{V \in \mathcal{V}} ||P_V x||^2 \le ||x||^2 < +\infty$$

L'égalité a lieu si et seulement si x est adhérent à la somme des éléments de ().

Soit  $\mathcal J$  une partie finie de  $\mathcal V$ . Si  $\mathbb W$  est la somme des éléments de  $\mathcal J$  , on a  $\mathbb P_{\mathbb W}=\sum_{\mathbb V\in\mathcal J}\mathbb P_{\mathbb V}$ . Donc si  $\mathbb y=\mathbb P_{\mathbb W}^{\mathbb X}$ 

$$||x||^{2} \ge ||y||^{2} = ||\sum_{V \in J} P_{V}x||^{2} = \sum_{V \in J} ||P_{V}x||^{2}$$
 puisque

 $\langle P_V x, P_V, x \rangle = 0$  pour  $V' \neq V$  dans  $\int D' d$ 

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| |P_{V}(x)| \right|^{2} \leq \left| |x| \right|^{2} < +\infty$$

Et si on a l'égalité, il existe pour  $\varepsilon > 0$  un  $\int tel que \sum_{V \in \mathcal{J}} |P_V x||^2 > ||x||^2 - \varepsilon^2$ . Donc

$$||x-y||^2 = ||x||^2 - ||y||^2 = ||x||^2 - \sum_{v \in \mathcal{J}} ||P_v x||^2 \le \varepsilon^2$$

La distance de x à l'espace engendré par la réunion de V est donc inférieure à tout  $\epsilon > 0$ .

Inversement si x est adhérent à la somme de  $\mathbb{Q}^{\ell}$ , il existe pour  $\varepsilon > 0$  un z  $\in V_1 + V_2 + \ldots + V_n = W$  tel que  $||x-z|| \le \varepsilon$ .

Alors, pour 
$$\Im = \{V_1, \dots, V_n\}$$
 et  $y=P_Wx$ , on a 
$$||x-y||^2 \le ||x-z||^2 \le \varepsilon^2$$
 
$$||x||^2 - \sum_{V \in \Im} ||P_Vx||^2 \le \varepsilon^2$$

Ceci termine la démonstration.

Théorème 9. Soit  $(x_v)_{v \in V}$  une famille de points de H telle que  $x_v \in v$  pour tout v de V et que  $\sum_{v \in V} |x_v||^2 < +\infty$ . Alors  $(x_v)$  est sommable dans H et sa somme x vérifie  $x_v = P_v x$ .

Comme plus haut, puisque H est complet, il suffit de montrer pour  $\varepsilon > 0$  l'existence d'un  $\mathcal J$  dans  $\mathcal V$  tel que  $||\sum_{v \in \mathcal J} x_v|| \le \varepsilon$  si  $\mathcal J' \cap \mathcal J = \emptyset$ .

Et puisque  $\left| \left| \sum_{V \in \mathcal{J}} x_v \right| \right|^2 = \sum_{V \in \mathcal{J}} \left| \left| x_v \right| \right|^2$  car  $(x_v)$  est une famille d'éléments deux à deux orthogonaux, il suffit de choisir  $\mathcal{J}$  tel que  $\sum_{V \in \mathcal{J}} \left| \left| x_v \right| \right|^2 > \sum_{V \in \mathcal{J}} \left| \left| x_v \right| \right|^2 - \varepsilon^2$ .

Enfin puisque  $P_V$  est linéaire continue,  $P_V = \sum_{W \in V} P_W(x_W) = x_V$  puisque  $P_V(x_W) = 0$  si  $W \neq V$ .

## Chapitre VII - Théorie spectrale des opérateurs normaux compacts

<u>Définition 1.</u> Soient E un espace de Banach, B sa boule unité, et T un opérateur linéaire de E dans E. On dit que T est <u>compact</u> si T(B) est relativement compact dans E.

Théorème 2. Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie si et seulement si la boule unité de F est relativement compacte dans E.

Si F est de dimension finie, il existe  $(u_1,\dots,u_n)$  une base de F et un isomorphisme  $\phi$  de  $C^n$  sur F :

$$\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$$

Alors 
$$\phi$$
 est continue :  $||\phi(\lambda_1,...,\lambda_n)|| \leq \sum |\lambda_j|.||u_j||$   
  $\leq \sum |\lambda_j|.\sup||u_j||$ 

Et puisque la sphère unité de  $C^n$  est compacte  $\{\{\lambda \mid \sum_j |\lambda_j| = 1\}$  est fermé et borné), la fonction  $\lambda \to ||\phi(\lambda)||$  qui est continue et strictement positive a un minimum  $\delta > 0$ . D'où  $||\phi(\lambda)|| \ge \delta \cdot \sum_j |\lambda_j|$ , ce qui entraîne que  $\phi$  est bicontinue. Si B est la boule unité de F,  $\phi^{-1}(B)$  est fermé et borné dans  $C^n$ , donc compact, et  $B = \phi(\phi^{-1}(B))$  est compact, donc relativement compact dans E.

Inversement, si F est de dimension infinie, on construit par récurrence une suite  $(x_n)$  telle que, si  $V_n$  est l'espace engendré par  $(x_1, \ldots, x_n)$ , on ait  $||x_n||=1$  et  $||x_n-y|| \ge 1$  pour y dans  $V_{n-1}$ .

En effet, si  $V_n$  est déterminé  $(V_o = \{0\})$ , on a  $V_n \neq F$  puisque  $V_n$  est de dimension finie et pas F. Si  $y_n \in F \setminus V_n$ , l'ensemble  $X_n = \{z \in V_n | ||z|| \le 2 ||y_n||\}$  est compact, puisque  $V_n$  est isomorphe à  $C^n$ . Donc la fonction  $z \neq ||z-y_n||$  y atteint son minimum en un point  $z_0$ . Et puisque

$$||y_n - z_0|| \le ||y_n - 0||$$

et que pour  $z \in V_n \setminus X_n$ 

$$||y_n-z|| \ge ||z||-||y_n|| > 2||y_n||-||y_n||=||y_n||$$

on a, pour tout z de V<sub>n</sub>

$$||y_n^{-z}|| \ge ||y_n^{-z}|| > 0$$

donc, avec 
$$x_{n+1} = \frac{y_n^{-z_0}}{||y_n^{-z_0}||}$$
,  $||x_{n+1}|| = 1$   
et  $\forall z \in V_n$   $x_{n+1} - z = \frac{1}{||y_n^{-z_0}||} [y_n^{-(z_0^+ ||y_n^{-z_0}||z)}]$   
 $||x_{n+1}^{-z_0}|| \ge 1$ 

On a donc, pour  $n \neq p$ ,  $||x_n - x_p|| \ge 1$ . Donc la suite  $(x_n)$  ne possède aucune sous-suite qui soit de Cauchy, donc n'est pas relativement compacte dans E. Et, a fortiori, la boule unité de F n'est pas relativement compacte dans E.

Corollaire 3. Soit F un espace de Banach. Alors F est de dimension finie si et seulement si l'identité est un opérateur compact sur F.

Ceci résulte immédiatement du théorème précédent.

Théorème 4. Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur A sur H est compact si et seulement si A est adhérent dans  $\mathcal{L}$  (H) aux opérateurs de rang fini.

Soit A un opérateur compact. Si B est la boule de H et  $\varepsilon > 0$ , il existe, par compacité de  $\overline{A(B)}$ , un nombre fini  $(x_1,\ldots,x_n)$  de points de A(B) tels que tout point de  $\overline{A(B)}$  soit à distance au plus  $\varepsilon$  de l'un des  $x_i$ .

Soient alors V 1'espace engendré par  $(x_1, \ldots, x_n)$ , qui est de dimension finie donc isomorphe à  $C^p$  (pour un  $p \le n$ ), donc complet, donc fermé dans H, et P la projection orthogonale sur V. Puisque P est de rang fini, il en est de même de PA. Soit y un point quelconque de B. Si x=Ay, il existe j tel que  $||x-x_j|| \le \varepsilon$ . Donc, puisque  $x_j \in V$ ,  $||x-Px|| \le ||x-x_j|| \le \varepsilon$ , et  $||Ay-PAy|| \le \varepsilon$ . Il en résulte que  $||A-PA|| \le \varepsilon$ .

Inversement, si A est un opérateur continu de rang fini, la boule unité  $B_1$  de l'espace image de A est compacte, et A(B) est contenu dans un homothétique de  $B_1$ ; donc A est compact.

Il suffit donc de montrer qu'un opérateur adhérent aux opérateurs compacts est lui-même compact.

Soient K (H) 1'ensemble des opérateurs compacts,  $A \in K(H)$  et  $\epsilon > 0$ . Il existe  $A_1 \in K$  (H) tel que  $||A-A_1|| \le \frac{\epsilon}{3}$ , et, puisque  $\overline{A_1(B)}$  est compact, un nombre fini  $(x_1, \dots, x_n)$  de points de B tels que tout point de  $A_1(B)$  soit à distance au plus  $\frac{\epsilon}{3}$  de l'un des  $A_1x_1$ .

Alors, pour tout x de B, il existe j tel que  $||A_1x-A_1x_j||<\frac{\epsilon}{3}$ . Donc

$$||Ax-Ax_{j}|| \le ||Ax-A_{1}x|| + ||A_{1}x-A_{1}x_{j}|| + ||A_{1}x_{j}-Ax_{j}||$$

$$\le 2||A-A_{1}|| + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon$$

Il en résulte que A(B) est précompact, donc relativement compact puisque H est complet.

Théorème 5. Si H est un espace de Hilbert, K (H) est un idéal fermé bilatère de  $\mathcal{L}$  (H).

Il résulte du théorème précédent que  $\Re$  (H) est fermé dans & (H). Pour montrer que  $\Re$  (H) est un idéal bilatère, il faut montrer que si  $A_1$  et  $A_2$  sont dans  $\Re$  (H) et T dans & (H),  $A_1+A_2$ ,  $A_1T$  et  $TA_1$  sont dans  $\Re$  (H).

Si  $A_1$  et  $A_2$  sont compacts,  $\overline{A_1(B)}$  et  $\overline{A_2(B)}$  sont compacts, et  $\overline{A_1(B)} \times \overline{A_2(B)}$  aussi. Donc l'image de  $\overline{A_1(B)} \times \overline{A_2(B)}$  par l'application  $(x,y) \rightarrow x+y$  est compacte dans H, et contient  $(A_1+A_2)(B)$ . Donc  $A_1+A_2$  est dans  $\mathcal{K}(H)$ .

Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , et si  $\lambda = ||T||$ ,  $\overline{A_1T(B)} \subset \lambda \ \overline{A_1(B)}$ . Et si  $\overline{A_1(B)}$  est compact, il en est de même de  $\lambda . \overline{A_1(B)}$ . Donc  $A_1T \in \mathcal{K}(H)$ .

Si T est continue, l'image par T du compact  $\overline{A_1(B)}$  est compact et contient  $TA_1(B)$ . Donc  $TA_1$  est compact.

Théorème 6. Si H est un espace de Hilbert et  $A \in \mathcal{L}(H)$ , l'opérateur A est compact si et seulement si  $A^*A$  est compact, et si et seulement si  $A^*$  est compact.

Si A est compact,  $A^*A$  est compact d'après le théorème précédent. Inversement, si  $A^*A$  est compact et si  $(x_n)$  est une suite dans la boule unité de H, il existe une sous-suite  $(x_n)$  telle que  $A^*Ax_{n_k}$  converge.

Alors 
$$\lim_{j,k\to\infty} ||A^*Ax_{n_j} - A^*Ax_{n_k}|| = 0$$

et puisque  $||x_{n_i} - x_{n_k}|| \le 2$ ,

$$||Ax_{n_{j}} - Ax_{n_{k}}||^{2} = |\langle A^{*}Ax_{n_{j}} - A^{*}Ax_{n_{k}}, x_{n_{j}} - x_{n_{k}} \rangle| \leq 2 ||A^{*}Ax_{n_{j}} - A^{*}Ax_{n_{k}}|| \rightarrow 0$$

Il en résulte que la suite  $(Ax_n)$  est une suite de Cauchy, donc converge. Et puisque toute suite  $(Ax_n)$  dans A(B) a une sous-suite convergente, A(B) est relativement compact. Donc  $A \in \mathcal{K}(H)$ .

Si A\* est compact, il en est de même de A\*A d'après le théorème 5, donc de A d'après ce qui précède. Le même raisonnement appliqué à A\* prouve que A\* est compact si A l'est.

Lemme 7. Soient H un espace de Hilbert non réduit à  $\{0\}$ , et A un opérateur normal compact sur H. Alors il existe  $\lambda \in C$  et  $w \in H$  tels que ||w||=1,  $|\lambda|=||A||$  et  $Aw=\lambda w$ .

De plus, si  $\lambda \neq 0$ , le sous-espace propre  $V_{\lambda} = \{x \mid Ax = \lambda x\}$  est de dimension finie.

Le lemme est clair si ||A||=0. Sinon, il existe  $x_n$  dans H avec  $||x_n|| \le 1$  et  $||Ax_n|| \to ||A||$ .

Si P est la projection orthogonale sur Ker  $A^{\perp}$ , on a  $||Px_n|| \le 1 \text{ et } x_n - Px_n \in \text{Ker A donc } Ax_n = APx_n.$ 

Quitte à remplacer  $x_n$  par  $Px_n$ , on peut donc supposer  $x_n \in \text{Ker } A^{\perp}$ .

De plus, puisque A est compact, la suite  $(Ax_n)$  a une sous-suite convergente, et quitte à remplacer  $(x_n)$  par la sous-suite correspondante, on peut supposer que  $(Ax_n)$  converge vers un point u.

Alors, necessairement,  $||u|| = \lim ||Ax_n|| = ||A||$ 

Soit V l'ensemble des y de H tels que la suite  $(< x_n, y >)$  soit une suite de Cauchy dans C. Alors il est clair que V est un sous-espace vectoriel de H.

Deplus, V est fermé : en effet, si  $y_0 \in \overline{V}$  et  $\varepsilon > 0$  il existe  $y \in V$  tel que  $||y_0 - y|| < \frac{\varepsilon}{3}$  et N tel que pour n et  $p \ge N$   $|< x_n, y> -< x_p, y> |< \frac{\varepsilon}{3}$ . Alors, si n et  $p \ge N$ ,

$$|\langle x_{n}, y_{0} \rangle - \langle x_{p}, y_{0} \rangle| \leq |\langle x_{n}, y_{0} - y \rangle| + |\langle x_{n}, y \rangle - \langle x_{p}, y \rangle| + |\langle x_{p}, y - y_{0} \rangle|$$

$$\leq ||y_{0} - y|| (||x_{n}|| + ||x_{p}||) + |\langle x_{n}, y \rangle - \langle x_{p}, y \rangle|$$

$$\leq 2. \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Ceci prouve que ( $< x_n, y_o >$ ) est une suite de Cauchy, donc que  $y_o \in V$ .

Si  $y \in A^*(H)$ , il existe  $z \in H$  tel que  $y = A^*z$ .

Alors 
$$\langle x_n, y \rangle = \langle x_n, A^*z \rangle = \langle Ax_n, z \rangle + \langle u, z \rangle$$

Donc la suite ( $\langle x_n, y \rangle$ ) converge, et  $y \in V$ . Donc  $V \supset \overline{A^*(H)} = \text{Ker } A^{\perp}$ .

Si  $y \in \text{Ker A}$ , on a  $\langle x_n, y \rangle = 0$  puisque  $x_n \in \text{Ker A}^{\perp}$ . Donc  $y \in V$ . Et puisque l'espace V contient Ker A et Ker A $^{\perp}$ , on a V=H.

On peut donc définir, pour tout y de H,

$$\phi(y) = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle$$

On a clairement  $\phi(y+y')=\phi(y)+\phi(y')$ , et  $\phi(\lambda y)=\overline{\lambda}\phi(y)$ . De plus, puisque pour tout n;

$$|\langle x_n, y \rangle| \leq ||x_n|| \cdot ||y|| \leq ||y||$$

on a 
$$|\phi(y)| \leq ||y||$$
.

Il en résulte que  $\overline{\phi}$  est une forme linéaire continue sur H, donc, par le théorème de Riesz, qu'il existe un v tel que  $||v||=||\overline{\phi}|| \le 1$  et  $\forall y \ \overline{\phi}(y) = \langle y, v \rangle$ , c'est-à-dire  $\phi(y) = \langle v, y \rangle$ .

Si  $z \in H$  et  $y = A^*z$ , on a

$$\langle u, z \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle Ax_n, z \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, A^*z \rangle = \phi(y)$$
  
=  $\langle v, y \rangle = \langle v, A^*z \rangle = \langle Av, z \rangle$ 

Donc u = Av. Et puisque  $||v|| \le 1$ , on a

$$||A|| = ||u|| \le ||A||.||v|| \le ||A||$$

d'où ||v|| = 1 et ||Av|| = ||A||, c'est-à-dire

$$< A^*Av, v > = < Av, Av > = ||A||^2 < v, v >$$

et, si on pose  $T = ||A||^2 .I - A^*A$ ,

$$< Tv, v > = 0.$$

Par ailleurs, puisque pour tout x de H, on a

$$< \text{Tx,x} > = ||A||^2 ||x||^2 - ||A||^2 - ||A||^2 - ||Ax||^2 \ge 0$$

on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz relative à  $(x,y) \rightarrow < Tx,y > :$ 

$$|< T_{V,X} > |^2 \le < T_{V,V} > . < T_{X,X} >$$

d'où < Tv, x > = 0 pour tout x de H. Donc Tv = 0.

Soit W = Ker T. Alors W est un sous-espace fermé de H. De plus, puisque A est normal, A commute avec T, ainsi que A. Donc, pour tout X de W,

$$TAx = ATx = 0$$
 et  $TA^*x = A^*Tx = 0$ 

c'est-à-dire  $Ax \in W$  et  $A^*x \in W$ . On a donc pour tout x et tout y de W,  $< Ax,y > = < x,A^*y >$ . Ceci montre que, dans l'espace hilbertien W, la restriction de  $A^*$  à W est l'adjoint de la restriction de A à W, donc que  $A_{|W|}$  est normal.

Si  $A_0$  est compact et  $\lambda \neq 0$ , le sous-espace  $F = \operatorname{Ker}(A_0 - \lambda I)$  est de dimension finiè : en effet, la restriction de  $A_0$  à F est compacte, ainsi que  $\frac{1}{\lambda} A_0|_F$ , qui est l'identité de F; d'où le résultat par le *corollaire* 3.

En particulier pour  $A_0 = A^*A$  et  $\lambda = ||A||^2$ , on obtient que W est de dimension finie, et pour  $A_0 = A$  et  $\lambda \neq 0$ , que  $V_{\lambda}$  est de dimension finie.

Puisque W est de dimension finie, et que  $A(W) \subseteq W$ , la restriction de A à W a au moins un vecteur propre w de norme 1 pour une valeur propre  $\lambda$ , puisque  $v \in W$  et ||v|| = 1 entraîne que  $W \neq \{0\}$ .

Puisque (A - $\lambda$ I) est normal, on a par le lemme 31 du chapitre V,

$$w \in Ker(A - \lambda I) = Ker(A^* - \overline{\lambda}I)$$

donc

$$Aw = \lambda w$$
 et  $A^*w = \overline{\lambda}w$ , ou encore

$$A^*Aw = \lambda \overline{\lambda}w = |\lambda|^2 w$$

et puisque  $w \in \text{Ker T}$ ,  $A^*Aw = ||A||^2 \cdot w$ , donc  $||A|| = |\lambda|$ .

Théorème 8. Soient H un espace de Hilbert et  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal compact. Si on note, pour  $\lambda \in \mathcal{C}$ ,  $V_{\lambda} = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$  le sous-espace propre de A relatif à  $\lambda$ , les  $V_{\lambda}$  sont deux à deux orthogonaux et leur somme est dense dans H.

Soient 
$$x \in V_{\lambda}$$
 et  $y \in V_{\mu}$ ; on a  $y \in \text{Ker}(A - \mu I) = \text{Ker}(A^* - \overline{\mu}I)$ 

$$\lambda < x,y > = < Ax,y > = < x,A^*y > = < x,\overline{\mu}y > = \mu < x,y >.$$

Donc

$$(\lambda - \mu) < x,y > = 0$$

ce qui entraîne  $\langle x,y \rangle = 0$  si  $\lambda \neq \mu$ .

Si V est la somme des  $(V_{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ , on a  $A(V) \subset V$  et  $A^*(V) \subset V$ . En effet, si  $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$  avec  $x_j \in V_{\lambda_j}$ ,

on a 
$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j} x_{j} \text{ et } A^{*}x = \sum_{j=1}^{n} x_{j}.$$

Donc, d'après le *théorème 32* du chapitre V, puisque  $A(\overline{V}) \subset \overline{V}$  et  $A^*(\overline{V}) \subset \overline{V}$ , on a  $A(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$  et  $A^*(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$ .

Il en résulte que, dans l'espace de Hilbert  $V^{\perp}$ , la restriction de A à  $V^{\perp}$  est l'adjoint de la restriction de A à  $V^{\perp}$ . Donc  $A_{\mid V^{\perp}}$  est normal, et compact.

Si  $V^{\perp}$  n'était pas  $\{0\}$ , il existerait, par le *lemme* 7, un  $\lambda \in C$  et un  $w \neq 0$  dans  $\operatorname{Ker}(A_{|V^{\perp}} - \lambda I_{|V^{\perp}})$ . Donc  $w \in V_{\lambda} \cap V^{\perp} \subset V \cap V^{\perp}$ , ce qui est contradictoire avec  $V \cap V^{\perp} = \{0\}$ .

Donc  $V^{\perp} = \{0\}$ , et V est dense dans H.

Théorème 9. Soient H un espace de Hilbert, et  $A \in \mathcal{A}(H)$  un opérateur normal compact. Alors l'ensemble des valeurs propres de A est fini ou est l'ensemble des termes d'une suite tendant vers O.

Supposons infini l'ensemble des valeurs propres de A. Si  $\varepsilon > 0$ , posons  $L = \frac{\sum V_{\lambda}}{|\lambda| \ge \varepsilon} V_{\lambda}$ . Puisque  $A(V_{\lambda}) \subseteq V_{\lambda}$ , on a, comme plus haut,  $A(\sum V_{\lambda}) \subseteq \sum V_{\lambda}$ ,  $|\lambda| \ge \varepsilon$ 

donc  $A(L) \subseteq L$ . Il en résulte que la restriction de A à L est un opérateur compact de L dans L. De plus, pour tout x de  $\sum_{|\lambda| \geqslant_{\epsilon}} V_{\epsilon}$ , on a

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_{j}$$
 avec  $x_{j} \in V_{\lambda_{j}}$  et  $|\lambda_{j}| \ge \varepsilon$ 

donc  $Ax = \sum \lambda_j x_j$ , et puisque les  $V_{\lambda}$  sont deux à deux orthogonaux :  $||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2$ 

et 
$$||Ax||^2 = \sum_{j=1}^{n} ||\lambda_j x_j||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 ||x_j||^2$$
  
 $\geq \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 = \varepsilon^2 ||x||^2$ 

La relation  $||Ax|| \ge \varepsilon$ . ||x|| est donc valable pour tout x de L.

L'opérateur T défini sur  $\sum_{|\lambda| \ge \epsilon} V_{\epsilon}$  par

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{j}} x_{j} \quad \text{si} \quad x = \sum_{j=1}^{n} x_{j} \quad \text{avec} \quad x_{j} \in V_{\lambda_{j}}$$

vérifie ATx = x, d'où  $||x|| = ||ATx|| \ge \varepsilon ||Tx||$ , donc  $||T|| \le \frac{1}{\varepsilon}$ . Donc T se

prolonge en un opérateur continu sur L, de norme au plus  $\frac{1}{\epsilon}$ , vérifiant AT =  $I_L$ . L'opérateur AT est donc compact, ce qui prouve que L est de dimension finie ; et puisque la dimension de L est au moins le nombre de valeurs propres de A de module  $\geq \epsilon$ , il n'existe qu'un nombre fini de valeurs propres de A dont le module excède  $\epsilon$ . L'ensemble des valeurs propres est donc dénombrable, et si on l'ordonne en une suite  $(\lambda_n)$ , on a  $\lambda_n \to 0$ .

Théorème 10. Soit H un espace hilbertien. Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(H)$  est normal et compact si et seulement s'il existe une suite  $(\lambda_n)$  tendant vers 0 dans C et une suite  $(P_n)$  de projecteurs orthogonaux de rangs finis sur des sous-espaces deux à deux orthogonaux telles que

$$\lim_{m\to\infty} ||A - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n|| = 0$$

Si  $(\lambda_n)$  et  $(P_n)$  vérifient les propriétés ci-dessus, et si on pose  $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n$ , on a

$$S_{m}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_{n} P_{n}^{*} = \sum_{n=1}^{m} \overline{\lambda}_{n} P_{n}$$

et puisque  $P_k P_n = 0$  pour  $k \neq n$  par orthogonalité des espaces images, on a

$$S_{m} S_{m}^{*} = \sum_{n,k \leq m} \lambda_{n} X_{k} P_{n} P_{k} = \sum_{1}^{m} |\lambda_{n}|^{2} P_{n}^{2} = \sum_{1}^{m} |\lambda_{n}|^{2} P_{n}$$

$$= S_{m}^{*} S_{m}$$

Donc  $S_m$  est normal, et puisque  $P_n$  est de rang fini, donc compact,  $S_m$  est compact. Donc  $A = \lim_m S_m$  est compact, et puisque

$$AA^* = \lim_{m \to \infty} S_m \cdot \lim_{m \to \infty} S_m^* = \lim_{m \to \infty} S_m^* = \lim_{m \to \infty} S_m^* = A^*A,$$

l'opérateur A est normal compact.

Inversement, si A est normal compact, et si  $(\lambda_n)$  est la suite des valeurs propres non nulles de A, prolongée arbitrairement en une suite infinie convergeant vers 0 s'il n'existe qu'un nombre fini de valeurs propres, si  $P_n$  est le projecteur orthogonal sur  $V_{\lambda_n}$   $(P_n=0$  si  $\lambda_n$  n'est pas une valeur propre), les  $P_n$  sont de rangs finis et leurs espaces images sont deux à deux orthogonaux.

Si  $x = x_0 + \sum_{n=1}^{m} x_n$  avec  $x_0 \in V_0$  et  $x_n \in V_{\lambda_n}$ ,

on a, pour tout k,

$$P_{k}x = P_{k}x_{o} + \sum_{1}^{m} P_{k}x_{n} = x_{k} \quad \text{si} \quad k \leq m$$

$$P_{k}x = 0 \qquad \qquad \text{si} \quad k > m$$

$$Ax = Ax_{o} + \sum_{1}^{m} Ax_{n} = \sum_{1}^{m} \lambda_{n}x_{n}$$

$$= \sum_{1}^{m} \lambda_{n} P_{n}w = S_{m}x$$

On a de même, si m≥k

$$Ax - S_k x = \sum_{n=k+1}^{m} \lambda_n P_n x$$

$$||Ax - S_k x||^2 = \sum_{k+1}^{m} ||\lambda_n||^2 ||P_n x||^2$$

$$\leq (\sup_{n \ge k+1} ||\lambda_n||)^2 \cdot \sum_{k+1}^{m} ||P_n x||^2$$

$$\leq (\sup_{n \ge k+1} ||\lambda_n||)^2 ||x||^2$$

d'après le *théorème 8* du chapitre VI.

D'après le théorème 8, les points x de H de la forme  $x + \sum_{n=1}^{m} x_n$ , avec  $m \in N$  et  $x_n \in V_{\lambda_n}$ , forment une partie dense de H. Par continuité, on a donc

$$||Ax - S_k x||^2 \le (\sup_{n \ge k} |\lambda_n|)^2 ||x||^2$$

pour tout x de H, c'est-à-dire

$$||A - S_k|| \le \sup_{n > k} |\lambda_n|$$

d'où le résultat puisque  $\lambda_n \to 0$ .

Théorème 11. (Alternative de Fredholm). Soient  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal compact, et  $\lambda \neq 0$ . Alors, ou bien l'équation en  $x: Ax - \lambda x = y$  a une solution pour tout y de H, ou bien l'équation :  $Ax - \lambda x = 0$  a une solution non nuîle.

Cet énoncé découle du résultat plus précis suivant.

Théorème 12. Soient  $A \in \mathcal{A}(H)$  un opérateur normal compact, et  $\lambda_0 \neq 0$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) 
$$(A - \lambda_o I)$$
 est surjectif  
ii)  $(A - \lambda_o I)$  est injectif  
iii)  $(A - \lambda_o I)$  est inversible  
 $i^*$ )  $(A^* - \overline{\lambda}_o I)$  est surjectif  
 $ii^*$ )  $(A^* - \overline{\lambda}_o I)$  est injectif  
 $iii^*$ )  $(A^* - \overline{\lambda}_o I)$  est inversible

Montrons d'abord que ii) ⇒ iii) ⇒ i). Il est clair que iii) ⇒ i).

Supposons donc Ker(A -  $\lambda_0$ I) = {0}. Alors, puisque  $\lambda_0$  n'est pas valeur propre, il résulte du théorème 9 que

$$\delta = \inf\{|\lambda_0 - \lambda| | \lambda \text{ valeur propre de A}\} > 0$$

Soit  $(\lambda_n)_{n \ge 1}$  une émumération des valeurs propres de A. Si  $P_n$  est le projecteur orthogonal sur  $V_{\lambda_n} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_n I)$ , et si on a

$$Ax - \lambda_{\alpha}x = y$$

on a, pour tout 
$$n \ge 1$$
,  $P_n Ax - \lambda_o P_n x = P_n y$ 

Mais, puisque  $A(V_{\lambda_n}) \subseteq V_{\lambda_n}$  et  $A^*(V_{\lambda_n}) \subseteq V_{\lambda_n}$ , on a  $P_n A = AP_n$ 

donc 
$$AP_n x - \lambda_o P_n x = P_n y$$

et puisque 
$$P_n x \in V_{\lambda_n}, AP_n x = \lambda_n P_n x$$

$$d'où \qquad (\lambda_n - \lambda_o) P_n x = P_n y$$

et 
$$P_n x = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_o} P_n y$$

Si elle existe, la solution x de  $Ax - \lambda y = y$ , qui est unique puisque  $\lambda$  n'est pas valeur propre, doit donc vérifier

$$\begin{split} P_n x &= \frac{1}{\lambda_n - \lambda_0} P_n y \\ \text{La famille } (x_n) & \text{ definie par } x_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_0} P_n y \text{ verifie } x_n \in V_{\lambda_n} \text{ et} \\ \sum_{1}^{\infty} ||x_n||^2 &= \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{||\lambda_n - \lambda_0||^2} ||P_n y||^2 \\ &\leq \delta^{-2} \sum_{1}^{\infty} ||P_n y||^2 \leq \delta^{-2} ||y||^2 < +\infty \end{split}$$

donc est sommable dans H d'après les *théorèmes 8* et 9 du chapitre VI. De plus, sa somme x vérifie

$$P_{n}x = x_{n} = \frac{1}{\lambda_{n} - \lambda_{o}} P_{n}y$$

$$P_{n}(A - \lambda_{o}I)x = (AP_{n} - \lambda_{o}P_{n})x$$

$$= (\lambda_{n} - \lambda_{o})x_{n} = P_{n}y$$

Donc

et le vecteur z=y -  $(A-\lambda_0 I)x$  vérifie  $P_n z=0$  pour tout n. Puisque la somme des  $V_{\lambda_n}$  est dense dans H, on a  $||z||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||P_n z||^2 = 0$ . Donc  $(A-\lambda_0 I)x=y$ .

L'opérateur (A -  $\lambda_0$ I) est donc bijectif, puisque l'équation (A -  $\lambda_0$ I)x=y a une solution unique pour tout y de H. De plus, la solution x vérifie

$$||x||^{2} = ||\sum_{1}^{\infty} P_{n}x||^{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n} - \lambda_{o}|^{2}} ||P_{n}y||^{2}$$

$$\leq \delta^{-2} \sum_{1}^{\infty} ||P_{n}y||^{2} = \delta^{-2} ||y||^{2}.$$

Ceci prouve que  $(A - \lambda_0 I)^{-1}$  est continu, de norme  $\leq \delta^{-1}$ .

Donc ii)  $\Rightarrow$  iii)  $\Rightarrow$  i) et de même ii  $\Rightarrow$  iii)  $\Rightarrow$  i  $\Rightarrow$  i. Et puisque i)  $\Rightarrow$  ii  $\Rightarrow$  ii) par le théorème 24 du chapitre V, la démonstration est complète.

Corollaire 13. Si  $A \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur normal compact, le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A, réuni avec  $\{0\}$  si H est de dimension infinie.

Si H est de dimension finie, A -  $\lambda I$  est, pour tout opérateur A, inversible si et seulement si  $\lambda$  n'est pas valeur propre.

Si H est de dimension infinie, un opérateur compact n'est jamais inversible, donc possède O dans son spectre.

Le reste de l'énoncé découle de l'équivalence entre ii) et iii) dans le théorème précédent.

Théorème 14. Soient  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal compact,  $\lambda \neq 0$  et  $V_{\lambda} = \operatorname{Ker} A - \lambda I$ . L'équation  $Ax - \lambda x = y$  a une solution si et seulement si y est orthogonal à  $V_{\lambda}$ . De plus, si  $x_o$  est une solution, l'équation a pour solution générale  $x_o + z$ , où z parcourt  $V_{\lambda}$ .

Si l'équation a une solution, y appartient à  $(A - \lambda I)(E)$  donc à  $Ker(A^* - \overline{\lambda}I)^{\perp}$ . Et puisque  $A - \lambda I$  est normal,  $y \in V_{\overline{\lambda}}^{\perp} = Ker(A - \lambda I)^{\perp}$ .

Puisque  $A(V_{\lambda}) \subseteq V_{\lambda}$  et  $A^*(V_{\lambda}) \subseteq V_{\lambda}$ , on a  $A^*(V_{\lambda}^{\perp}) \subseteq V^{\perp}$  et  $A(V_{\lambda}^{\perp}) \subseteq V_{\lambda}^{\perp}$ . Donc la restriction de A à  $V_{\lambda}^{\perp}$  a pour adjoint  $A_{|V_{\lambda}^{\perp}|}^{*}$  et est normal dans  $A(V_{\lambda}^{\perp})$ . Et puisque  $A_{|V_{\lambda}^{\perp}|}$  est compact et n'admet pas A pour valeur propre (puisque si  $X \in V_{\lambda}^{\perp}$  vérifie  $AX = \lambda X$ , on a  $X \in V_{\lambda}^{\perp} \cap V_{\lambda} = \{0\}$ ),  $(A - \lambda I)_{|V_{\lambda}^{\perp}|}$  est inversible. Il existe donc, pour tout Y de  $V_{\lambda}^{\perp}$  une solution unique dans  $V_{\lambda}^{\perp}$  de l'équation  $AX - \lambda X = Y$ ).

Si  $x_0$  est une solution de l'équation,  $x_0$  + z est solution si et seulement si  $(A - \lambda I)$   $(x_0 + z) = y + (A - \lambda I)$  z = y donc si et seulement si  $z \in V_{\lambda}$ .

Définition 15. Soient H un espace de Hilbert et  $A \in \mathcal{L}(H)$ . On dit que A est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base orthonormale S de H telle que

$$\sum_{x \in S} ||Ax||^2 < +\infty$$

De plus, si  $A\in d_2(H)$  et  $T\in d(H)$ ,  $A^*$ , AT et TA sont dans  $d_2(H)$  et on a

$$||A|| \le |||A||| = |||A^*|||$$
;  $|||AT||| \le |||A|||.||T||$   
 $|||TA||| \le |||A||.||T||$ 

Soient S et S' deux bases orthonormales de H, et  $A \in \mathcal{L}_2(H)$ . Alors  $\sum_{x \in S} |\langle Ax, y \rangle|^2 = \sum_{x \in S} (\sum_{y \in S'} |\langle Ax, y \rangle|^2) = \sum_{x \in S} ||Ax||^2 < \infty$ 

puisque S' est une base orthonormale. Et puisque

$$\sum_{\substack{x \in S \\ y \in S'}} |\langle Ax, y \rangle|^2 = \sum_{\substack{x \in S \\ y \in S'}} |\langle A^*y, x \rangle|^2 = \sum_{\substack{y \in S' \\ y \in S'}} (\sum_{\substack{x \in S \\ y \in S'}} |\langle A^*y, x \rangle|^2)$$

$$= \sum_{\substack{y \in S' \\ y \in S'}} ||A^*y||^2$$

on a  $\sum_{y \in S'} ||A^*y||^2 = \sum_{x \in S} ||Ax||^2 < +\infty$ 

Donc A\* est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Et en prenant S = S', on a

$$\sum_{y \in S'} ||A^*y||^2 = \sum_{x \in S'} ||Ax||^2 < +\infty$$

Donc 
$$\sum_{x \in S} ||Ax||^2 = \sum_{x \in S'} ||Ax||^2 < +\infty$$

La quantité ||A|| est donc indépendante de la base S choisie, et on a  $||A|| = ||A^*||$ .

Si  $z \in H$ , on a, pour S base orthonormale, que  $(< z, x >. x)_{x \in S}$  est sommable, de somme z. Donc  $(< z, x >. Ax)_{x \in S}$  est sommable de somme Az. Et

$$||Az|| \le \sum_{x \in S} |\langle z, x \rangle| \cdot ||Ax|| \le (\sum_{x \in S} |\langle z, x \rangle|^2)^{1/2} (\sum_{x \in S} ||Ax||^2)^{1/2}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $\ell_S^2$ , d'où

$$||Az|| \le ||z|| \cdot ||A|||$$

ce qui montre que  $||A|| \le |||A|||$ .

Si S est une base orthonormale, on a

$$|||TA|||^2 = \sum_{x \in S} ||T(Ax)||^2 \le \sum_{x \in S} ||T||^2 \cdot ||Ax||^2 = ||T||^2 \cdot ||A|||^2 < +\infty$$

d'où 
$$TA \in \mathcal{L}_2(H)$$
 et  $|||TA||| \le ||T||.|||A|||$ 

Et 
$$AT = (T^*A^*)^*$$
, d'où  $AT \in \mathcal{A}_2(H)$  et  $|||AT||| = |||T^*A^*||| \le ||T^*||.|||A^*||| = ||T||.|||A|||$ 

Si S est une base orthonormale, A et A' deux opérateurs de Hilbert-Schmidt, on a  $|\langle Ax,A'x \rangle| \le ||Ax||.||A'x||$ 

donc 
$$\sum_{x \in S} |\langle Ax, A'x \rangle| \leq \sum_{x \in S} ||Ax|| \cdot ||A'x|| \leq (\sum_{x \in S} ||Ax||^2)^{1/2} (\sum_{x \in S} ||A'x||^2)^{1/2} \langle \infty$$

Il en résulte que la famille  $(\langle Ax,A'x \rangle)_{x \in S}$  est sommable, et si on pose  $\langle A,A' \rangle = \sum_{x \in S} \langle Ax,A'x \rangle$ 

on voit sans peine que ceci définit un produit scalaire tel que < A,A  $>= |||A|||^2$ . (En particulier A+A'  $\in \mathcal{A}_2(H)$  et |||A+A'||| < |||A||| + |||A'|||).

Pour voir enfin que  $\mathcal{L}_2(H)$  est complet, considérons une suite de Cauchy  $(A_n)$  dans  $\mathcal{L}_2(H)$ . Alors, puisque  $||A_n - A_p|| \leqslant |||A_n - A_p|||$ ,  $(A_n)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}_2(H)$ , donc converge vers un A de  $\mathcal{L}_2(H)$ . Et pour toute partie J finie de S, on a

$$\sum_{\mathbf{x} \in J} ||(\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\mathbf{n}})\mathbf{x}||^{2} = \lim_{\mathbf{p} \to \infty} \sum_{\mathbf{x} \in J} ||(\mathbf{A}_{\mathbf{p}} - \mathbf{A}_{\mathbf{n}})\mathbf{x}||^{2}$$

$$\leq \sup_{\mathbf{p} \ni \mathbf{n}} \sum_{\mathbf{x} \in J} ||(\mathbf{A}_{\mathbf{p}} - \mathbf{A}_{\mathbf{n}})\mathbf{x}||^{2}$$

$$\leq \sup_{\mathbf{p} \ni \mathbf{n}} ||(\mathbf{A}_{\mathbf{p}} - \mathbf{A}_{\mathbf{n}})\mathbf{x}||^{2}$$

D'où 
$$||A - A_n|||^2 \le \sup_{p \ge n} ||A_p - A_n|||^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

ce qui entraîne que  $A \in \mathcal{L}_2(H)$  et  $A_n \to A$  dans  $\mathcal{L}_2(H)$ .

Théorème 17. Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

Soient  $A\in\mathscr{L}_2(H)$  et S une base orthonormée. Si  $\epsilon>0$ , il existe une partie finie J de S telle que

$$\sum_{x \in J} ||Ax||^2 \ge |||A|||^2 - \varepsilon^2$$

donc

et

$$\sum_{x \in S \setminus J} ||Ax||^2 \le \varepsilon^2$$

Soit P le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par J. Alors P est de rang fini et on a

Px = x si x \in J  
Px = 0 si x \in S\J  

$$\sum_{x \in S} ||(A - AP)x||^2 = \sum_{x \in S\setminus J} ||Ax||^2 \le \varepsilon^2$$

$$||A - AP|| \le |||A - AP||| \le \varepsilon.$$

d'où la compacité de A.

Théorème 18. Si A est un opérateur normal de Hilbert-Schmidt, on a  $\frac{\infty}{||A|||^2} = \frac{\Sigma}{L} |\lambda_n|^2, \text{ si } (\lambda_n) \text{ est la suite des valeurs propres non nulles répétées chacune selon sa multiplicité, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre associé. }$ 

Soit  $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$  une énumération des valeurs propres non nulles de A. Si, pour tout  $n\geqslant 1$ ,  $S_n$  est une base orthonormale du sous-espace propre associé à  $\mu_n$ , et  $S_n$  une base orthonormale de Ker A,  $S=\bigcup_n S_n$  est une partie orthonormale de n=0 l'espace, qui engendre un sous-espace dense, d'après le théorème 8, donc une base orthonormale. Donc

$$|||A|||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in S_n} ||Ax||^2$$

et puisque, pour 
$$x \in S_n$$
,  $Ax = \mu_n x$ , on a  $||Ax||^2 = |\mu_n|^2$   
Donc 
$$|||A|||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 \cdot \dim S_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

Théorème 19. Soient  $(X, \mathcal{J}, \mu)$  un espace mesuré et H l'espace de Hilbert  $L^2(X, \mathcal{J}, \mu)$ . Si K est une fonction sur  $X \times X$ , mesurable pour  $\mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$  et de carré sommable pour  $\mu \otimes \mu$ , et f est dans H, l'intégrale  $\mathcal{J}K(x,y)f(y)d\mu(y)$  existe pour  $\mu$ -presque tout x et définit une fonction  $Tf: x \to \mathcal{J}K(x,y)f(y)d\mu(y)$  qui est dans H.

De plus, l'opérateur T ainsi défini de H dans H est de Hilbert-Schmidt et on a :

$$||T||^2 = f|K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

Enfin T est hermitien si  $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$   $\mu \otimes \mu$ -presque partout.

On a 
$$(f|K(x,y)f(y)|d\mu(y))^2 \le (f|K(x,y)|^2 d\mu(y))(f|f(y)|^2 d\mu(y)).$$

Donc, dans R.,

$$f(f|K(x,y)f(y)|d\mu(y))^2d\mu(x) \leq f|f(y)|^2d\mu(y).f|K(x,y)|^2d\mu(x)d\mu(y)$$

D'où la convergence presque partout de l'intégrale  $\int |K(x,y)f(y)| d\mu(y)$  et le fait que Tf est dans H, puisque

$$|Tf(x)| \leq f|K(x,y)|.|f(y)|d\mu(y)$$

Soit maintenant S une base orthonormale de H. Pour  $(f,g) \in S \times S$ , la fonction

$$u_{f,g} : (x,y) \rightarrow f(x)\overline{g}(y)$$

est dans  $L^2(X\times X, \mathcal{P}\otimes\mathcal{P}, \mu\otimes\mu)=\mathcal{H}$ . Et puisque

$$\langle u_{f,g}, u_{f',g'} \rangle = \int f(x) \overline{g(y)} \overline{f'(x)} g'(y) d\mu(x) d\mu(y)$$
  
=  $\langle f, f' \rangle \cdot \langle \overline{g,g'} \rangle$ 

l'ensemble  $S_2$  des  $u_{f,g}$  pour (f,g) dans  $S\times S$  est orthonormal dans  $b_0$ . Et puisque l'ensemble des fonctions de la forme  $(x,y) \to \phi(x)\psi(y)$  où  $\phi$  et  $\psi$  sont

dans H est total dans  $\mathcal{H}$  ,  $S_2$  est total dans  $\mathcal{H}$  , donc est une base orthonormale de  $\mathcal{H}$  . Par conséquent,

$$||K||^{2} = f|K(x,y)|^{2}d\mu(x)d\mu(y) = \sum_{(f,g)\in S\times S} |\langle K,u_{f,g}\rangle|^{2}$$

$$= \sum_{(f,g)\in S\times S} |fK(x,y)f(x)g(y)d\mu(x)d\mu(y)|^{2}$$

$$= \sum_{f\in S} |\langle Tg,f\rangle|^{2} = |||T|||^{2}$$

$$g\in S$$

 $D^{\dagger}od$   $||T||| = ||K|| < +\infty$ 

Enfin, puisque  $< Tf,g > = \int K(x,y)f(y)\overline{g}(x)d\mu(x)d\mu(y)$ 

et 
$$\langle f,Tg \rangle = \int \overline{K(y,x)} f(y) \overline{g}(x) d\mu(x) d\mu(y)$$

On a  $T = T^*$  si  $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$  pour  $\mu \otimes \mu$ -presque tout (x,y).

#### Chapitre VIII

### Calcul fonctionnel des opérateurs normaux

Dans tout ce chapitre, H désignera un espace de Hilbert et T un opérateur normal continu sur H.

Si A désigne la plus petite sous-algèbre fermée de  $\mathcal{L}$  (H) contenant I,T et  $T^*$ , on voit aisément que A est une algèbre commutative et involutive, donc une  $C^*$ -algèbre avec unité, puisque  $\mathcal{L}$  (H) est une  $C^*$ -algèbre. Si X est le spectre de T dans  $\mathcal{L}$  (H), il résulte du fait que  $\mathcal{L}$  (H) est une algèbre hermitienne que X est aussi le spectre de T dans A.

# Théorème 1. Le spectre de A est homéomorphe à X.

Soit  $\phi$  1'application du spectre X(A) dans C définie par  $\phi(\chi) = \chi(T)$ . Alors  $\phi$  est continue, et prend ses valeurs dans X; et on a X =  $\phi(X(A))$  d'après le théorème 13 du chapitre III. Il suffit donc, pour prouver que  $\phi$  est un homéomorphisme, de montrer que  $\phi$  est injective, puisque X(A) est compact.

Supposons donc que  $\phi(\chi_1) = \phi(\chi_2)$ . Soit B l'ensemble des éléments S de A tels que  $\chi_1(S) = \chi_2(S)$ . Alors B est fermé puisque  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont continus, est une sous-algèbre puisque  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont des caractères, contient T puisque  $\chi_1(T) = \phi(\chi_1) = \phi(\chi_2) = \chi_2(T)$  et contient T puisque,  $\chi_1$  et  $\chi_2$  étant hermitiens, on a

$$\chi_1(T^*) = \overline{\phi(\chi_1)} = \overline{\phi(\chi_2)} = \chi_2(T^*).$$

Donc B = A, ce qui signifie que  $\chi_1 = \chi_2$ . Donc  $\phi$  est injective, et le théorème est prouvé.

On identifiera désormais par  $\phi$  le compact X de C et le spectre X(A).

Corollaire 2. L'algèbre A est isométriquement isomorphe à l'algèbre C(X).

Ceci résulte immédiatement du théorème de Gelfand-Naimark, compte tenu du théorème précédent.

On peut donc définir un calcul fonctionnel, c'est-à-dire associer à toute fonction continue f sur X un opérateur f(T) en sorte que

Il suffit de choisir pour f(T) l'unique opérateur S de A dont f est la transformée de Gelfand, c'est-à-dire tel que pour tout caractère  $\chi$  de A, on ait

$$\chi(S) = f(z)$$
 où  $z = \chi(T)$ 

En particulier, si f est un polynôme en z et  $\overline{z}$ ,  $f = \sum c_{p,q} z^p \overline{z}^q$ , on a  $f(T) = \sum c_{p,q} T^p T^{*q}$ .

On va maintenant étendre ce calcul fonctionnel continu en un calcul fonctionnel borélien, c'est-à-dire définir f(T) pour toute fonction f borélienne bornée sur X.

Théorème 3. Il existe pour tout x de H une unique mesure de Radon  $\mu_x \geqslant 0$  sur X

telle que, pour toute  $f \in C(X)$ ,

$$\int_X f(t) d\mu_x(t) = \langle f(T).x, x \rangle$$

On a, de plus, pour tout x et tout y de R

$$\mu_{ix} = \mu_{x}$$
;  $||\mu_{x}|| = ||x||^{2}$ ;  $\mu_{x+y} + \mu_{x-y} = 2\mu_{x} + 2\mu_{y}$ 

Soit  $x \in H$ . L'application  $f \to \langle f(T).x, x \rangle$  est linéaire, et continue puisque

$$|\langle f(T), x, x \rangle| \leq ||f(T)||.||x||^2 = ||f||.||x||^2$$

De plus, si f est une fonction réelle positive, il existe une fonction g telle que  $g.\overline{g} = f$ . Donc

$$< f(T).x,x > = < \overline{g}(T).g(T).x,x >$$
  
=  $< g(T)^* g(T)x,x > = ||g(T).x||^2 > 0$ 

L'application f + < f(T).x,x > est donc une mesure de Radon positive  $\mu_X$  sur X, c'est-à-dire

$$\langle f(T).x,x \rangle = \int_X f(t)d\mu_X(t)$$

Puisque  $|ff(t)d\mu_{x}(t)| \le ||f||.||x||^{2}$  et  $|f\mu_{x}(t)| = ||f||^{2}$  on a  $||\mu_{x}|| = ||x||^{2}$ .

Puisque < f(T).ix,ix > = < f(T).x,x >, on a  $\mu_{ix} = \mu_{x}$ . Enfin,

On peut définir aussi, pour tout  $\,x\,$  et tout  $\,y\,$  de  $\,H\,$ , une mesure de Radon complexe  $\,\mu_{{\bf x},y}\,$  par

$$ff(t)d\mu_{x,y}(t) = \langle f(T),x,y \rangle$$

On a alors  $||\mu_{x,y}|| \le ||x||.||y||$  et par la formule de polarisation des formes sesquilinéaires

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{4} (\mu_{x+y} + i\mu_{x+iy} + i^2\mu_{x+i^2y} + i^3\mu_{x+i^3y})$$

Théorème 4. On peut définir pour toute fonction borélienne bornée f sur X un opérateur f(T) en sorte que

i) 
$$(f+g)(T) = f(T) + g(T)$$
  
ii)  $(\lambda f()(T) = \lambda \cdot f(T)$ 

$$iii) \qquad (fg)(T) = f(T) \cdot g(T)$$

$$iv)$$
  $f(T) = f(T)^*$ 

v) 
$$1(T) = I$$
 si  $1(z) = 1$  pour tout z de X

$$vi) j(T) = T si j(z) = z pour tout z de X$$

$$vii) ||f(T)|| \le ||f||$$

De plus, si  $(f_n)$  est uniformément bornée et converge simplement vers f, on a, pour tout x de H,  $\lim_{n\to\infty} ||f(T).x-f_n(T).x||=0$ .

Soit f un élément de l'algèbre  $\mathcal{B}(X)$  des fonctions boréliennes bornées sur X. Alors, si  $\mu_X$  désigne la mesure définie plus haut et si on définit pour tout x  $q(x) = f(t) d\mu_Y(t)$ 

on a 
$$q(ix) = q(x)$$
;  $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$   
et  $|q(x)| \le ||f||.||\mu_x|| = ||x||^2.||f||.$ 

Il existe donc, d'après le théorème 19 du chapitre V, un unique opérateur S tel que

$$q(x) = \langle Sx, x \rangle$$

On posera f(T) = S, de sorte que  $\langle f(T)x, x \rangle = \int f(t) d\mu_X(t)$ . Puisque, par définition de  $\mu_X$ , ce calcul fonctionnel étend le calcul fonctionnel continu défini plus haut, on a v) et vi). Les propriétés i) et ii) sont claîres. Puisque

$$\langle f(T)^*x,x \rangle = \langle \overline{f(T)x,x} \rangle = \sqrt{f(t)d\mu_X(t)} = \sqrt{f(t)d\mu_X(t)}$$

on a  $f(T) = f(T)^*$ .

Soient  $g \in C(X)$ ,  $x \in H$  et z = g(T).x. Alors, pour toute  $f \in C(X)$  et tout  $y \in H$ 

$$< f(T)z,y > = < f(T)g(T)x,y > = \int fg(t)d\mu_{x,y}(t)$$

Donc  $\int f(t)d\mu_{z,y}(t) = \int f(t)g(t)d\mu_{x,y}(t)$ 

Ceci montre que les mesures  $\mu_{z,y}$  et  $g.\mu_{x,y}$  sont égales. Par conséquent, pour toute  $f\in \mathfrak{P}(X)$  on a encore

$$\int f(t)d\mu_{z,y} = \int f(t)g(t)d\mu_{x,y}$$

c'est-à-dire  $\langle f(T),z,y \rangle = \langle (fg)(T)x,y \rangle$ 

ou encore  $\langle f(T)g(T)x,y \rangle = \langle (fg)(T),x,y \rangle$ 

et, puisque ceci est valable pour tout x et tout y,

$$(fg)(T) = f(T)g(T)$$
 si  $f \in \mathcal{P}(X)$  et  $g \in C(X)$ 

Ceci s'écrit aussi  $< (fg)T.x,y > = < g(T).x,f(T)^*.y >$ 

donc  $ff(t)g(t)d\mu_{x,y} = fg(t)d\mu_{x,w}$  si  $w = f(T)^*.y$ 

Et puisque cette égalité est valable pour toute  $g \in C(X)$ , on a pour f fixée dans  $\mathcal{B}(X)$ 

$$\mu_{x,w} = f.\mu_{x,y}$$

Ces deux mesures étant égales, on a pour g quelconque dans  $\mathcal{B}(\mathtt{X})$  :

$$\int g(t)d\mu_{X,W}(t) = \int f(t)g(t)d\mu_{X,Y}(t)$$

c'est-à-dire

$$< g(T).x,w > = < g(T).x,f(T)*y > = < (fg)(T).x,y >$$

ou encore

$$< f(T).g(T).x,y > = < (fg)(T).x,y >$$

ce qui prouve iii).

Alors, pour tout x, on a

$$\begin{aligned} ||f(T).x||^2 &= \langle f(T)^*, f(T).x, x \rangle = \langle (ff)(T).x, x \rangle \\ &= \int |f(t)|^2 d\mu_X(t) \leq \int ||f||^2 d\mu_X(t) = ||f||^2.||x||^2 \end{aligned}$$

Donc

$$||f(T)|| \le ||f||,$$

Enfin, si M =  $\sup_{n,t} |f_n(t)| < +\infty$ , et si  $f_n \to f$  simplement, on a, pour x fixé dans H :

$$\begin{aligned} ||f_{n}(T).x-f(T).x||^{2} &= ||(f_{n}-f)(T).x||^{2} \\ &= < (f_{n}-f)(T)^{*}.(f_{n}-f)(T)x,x > \\ &= \int_{X} |(f_{n}-f)(t)|^{2} d\mu_{X}(t) \end{aligned}$$

Et puisque  $|(f_n-f)(t)|^2 \le 4M^2$  et  $|(f_n-f)(t)|^2 \to 0$ , le théorème de Lebesgue entraîne que  $\int |(f_n-f)(t)|^2 d\mu_\chi(t)$  converge vers 0. Et le théorème est prouvé.

Théorème 5. Si Z est une partie borélienne de X et  $1_Z$  la fonction caractéristique de Z,  $1_Z(T)$  est un projecteur orthogonal dont l'espace image F est stable par T et par  $T^*$ .

De plus, la restriction de T à F a son spectre (relatif à  $\mathcal{L}(F)$ ) dans  $\overline{Z}$ .

Puisque  $1_Z = T_Z = 1_Z^2$ , l'opérateur  $P = 1_Z(T)$  vérifie  $P = P^* = P^2$ , donc est un projecteur orthogonal.

De plus,  $j.1_Z = 1_Z$ .j. Donc

$$TP = j(T).P = P.j(T) = PT$$

Ceci signifie que T et T\* laissent F stable.

Soit enfin  $\lambda \notin \mathbb{Z}$ . La fonction f définie par

$$f(z) = \frac{1}{z-\lambda} \quad \text{si} \quad z \in Z$$

$$f(z) = 0 \quad \text{si} \quad z \notin Z$$

vérifie  $f.(j-\lambda) = (j-\lambda)f = 1_Z$ . Donc  $f(T).(T-\lambda I) = (T-\lambda I)f(T) = P$ . Et puisque  $f.1_Z = 1_Z$ . f, on a f(T).P = P.f(T).

Donc F est stable par f(T). Il en résulte que pour tout x de F,  $Tx \in F$  et  $f(T).x \in F$ , et que

$$f(T).(T-\lambda I).x = Px = x$$
  
 $(T-\lambda I).f(T).x = Px = x$ 

Donc  $f(T)_{\mid F}$  est l'inverse de  $(T-\lambda I)_{\mid F}$ , ce qui montre que  $\lambda$  n'est pas dans le spectre de  $T_{\mid F}$ .

Théorème 6. Soit T un opérateur normal sur H. Il existe un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{J}, \mu)$  et une isométrie linéaire bijective U de  $L^2(\Omega, \mathcal{J}, \mu)$  sur H, ainsi qu'une fonction  $\phi$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathcal{J}, \mu)$  prenant ses valeurs dans le spectre X de T

tels que, si  $M_{\phi}$  est l'opérateur de multiplication par  $\phi$  dans  $L^2(\Omega, \mathcal{J}\mu)$ , on ait

$$TU = UM_{\phi}$$

Cet énoncé signifie qu'on peut identifier H à un espace  $L^2$ , en identifiant T à la multiplication par une fonction.

Supposons d'abord qu'il existe un vecteur totalisateur a, c'est-à-dire tel que les vecteurs  $(T^m T^{*n}a)_{m\in\mathbb{N}}$  engendrent un sous-espace dense de H. On peut supposer ||a|| = 1.

Alors, pour tout  $f \in C(X)$ , on définit  $Uf = f(T) \cdot a \in H$ .

On a 
$$||Uf||^2 = \langle f(T).a, f(T).a \rangle = \langle f(T)^*.f(T).a,a \rangle$$
  
=  $\int |f(t)|^2 d\mu_a(t)$ 

Alors, si on prend  $\Omega = X$ ,  $\int$  la tribu borélienne de X et  $\mu$  la probabilité  $\mu_a$ , U est isométrique de C(X) muni de la norme induite par  $L^2(\Omega, \int, \mu)$  sur son image dans H. Et puisque C(X) est dense dans  $L^2(\mu)$ , U se prolonge en une isométrie linéaire de  $L^2(\mu)$  sur un sous-espace V complet, donc fermé, de H.

En particulier, si 
$$f = j^m \bar{j}^n$$
, on a

Uf = 
$$T^m T^{*n}a \in V$$
.

Donc V est dense puisque a est un vecteur totalisateur, d'où V = H. Ceci montre que U est isométrique, linéaire et bijectif de  $L^2(\mu)$  sur H.

Si on définit, pour  $z\in X$ ,  $\phi(z)=z$ , la fonction  $\phi$  est dans  $L^\infty(\mu)$  (et même continue) et prend ses valeurs dans X. De plus, pour f dans C(X), on a

$$TUf = T.f(T).a = (\phi f)(T).a$$
$$= U(\phi f) = UM_{\phi}f$$

Et puisque les opérateurs linéaires continus TU et UM coîncident sur C(X), ils coîncident sur  $L^2(\mu)$ . D'où le résultat.

Dans le cas général, si  $\mathcal O$  est l'ensemble des parties S de H vérifiant  $(Va \in S, ||a|| = 1)$  et  $(Va \in S, Vb \in S, Vf \in C(X), \langle f(T), a, b \rangle = 0$  si  $a \neq b)$ , ordonné par inclusion,  $\mathcal O$  contient  $\mathcal O$  et est clairement inductif : en effet, si  $(S_j)_{j \in J}$  est une famille totalement ordonnée d'éléments de  $\mathcal O$ ,  $S = \cup S_j$  contient chaque  $S_j$  et appartient à  $\mathcal O$ .

$$< f(T).a_0, a > = < a_0, f(T).a > = 0$$

 $S \cup \{a_0\}$  appartiendrait à 9 et majorerait strictement S.

Si on munit S de la topologie discrète (qui est induite par H), le produit  $\Omega = X \times S$  est localement compact et il existe sur  $\Omega$  une unique mesure de Radon positive  $\mu$  dont la restriction à chaque ouvert fermé  $X \times \{a\}$  soit égale à  $\mu_a$  (en identifiant  $X \times \{a\}$  à X).

Si  $\mathscr P$  est la tribu borélienne de  $\Omega$ , la fonction continue bornée  $\phi$  définie par

$$\phi(z,a) = z$$
 pour  $z \in X$  et  $a \in S$ 

est dans  $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ .

Soit  $\Re(\Omega)$  l'espace des fonctions continues à support compact sur  $\Omega$ . Si g est dans  $\Re(\Omega)$ , notons pour tout a de S  $g_a(z) = g(z,a)$ ; alors  $g_a \in C(X)$  pour tout a et  $g_a = 0$  pour tout a sauf un nombre fini. On définit alors un

opérateur U de  $\Re$  ( $\Omega$ ) dans H par :

$$Ug = \sum_{a \in S} g_a(T).a$$

qui est bien défini puisque la somme est finie. Alors

$$||Ug||^2 = ||\sum_{a \in S} g_a(T).a||^2 = \sum_{a,b \in S} \langle g_a(T).a, g_b(T).b \rangle$$
  
=  $\sum_{a,b \in S} \langle (\overline{g}_b g_a)(T).a,b \rangle$ 

d'où, puisque, pour  $a \neq b$ ,  $(\overline{g}_b g_a)(T)$ .a est orthogonal à b,

$$||Ug||^{2} = \sum_{a \in S} \langle (\overline{g}_{a}g_{a})(T).a,a \rangle = \sum_{a \in S} \int_{X} |g_{a}(t)|^{2} d\mu_{a}(t)$$
$$= \int_{\Omega} |g(t,a)|^{2} d\mu(t,a)$$

Donc U est isométrique de  $\iint (\Omega)$ , muni de la norme induite par  $L^2(\Omega, \mathcal{P}, \mu)$ , dans H, et se prolonge par continuité en une application linéaire isométrique de  $\frac{1}{\iint (\Omega)} = L^2(\Omega, \mathcal{P}, \mu)$  sur un sous-espace complet, donc fermé, V de H.

Pour tout  $f \in C(X)$  et tout  $a \in S$ , la fonction  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  définie par g(z,a) = f(z) et g(z,b)=0 si  $b \neq a$  vérifie

Ug = 
$$\sum_{f \in S} g_b(T)$$
, b = f(T), a  $\in V$ 

et puisque l'ensemble des f(T).a est total, V est égal à H.

Pour tout f dans C(X) et tout a dans S, on a, avec le même g, que précédemment.

TUg = 
$$\Sigma$$
 T.g<sub>b</sub>(T).b = T.f.(T).a  
 $b \in S$   
= (jf)(T).a avec  $j(z) = z$  pour  $z \in X$ 

Et puisque  $(\phi g)_a = jf$  et  $(\phi g)_b = 0$  pour  $b \neq a$ 

$$UM_{\phi}g = \sum_{b \in S} (\phi g)_b(T).b = (jf)(T).a = TUg$$

Les opérateurs continus UM  $_\varphi$  et TU coı̈ncident donc sur une partie totale de  $L^2(\mu),$  donc sont égaux.

<u>Définition 7.</u> Une <u>résolution de l'identité</u> de l'espace hilbertien H est une famille  $(P_{\lambda})_{\lambda \in R}$  de projecteurs orthogonaux vérifiant les conditions

i) Si 
$$\lambda \leq \mu$$
  $P_{\lambda}.P_{\mu} = P_{\lambda}$  (croissance)

ii) Si 
$$\lambda_n \ge \lambda$$
 et  $\lambda_n \to \lambda$ ,  $P_{\lambda_n} x \to P_{\lambda_n} x$  pour tout  $x$  de  $H$  (continuité forte à droite)

$$iii) \quad \forall x \in H \quad \lim_{\lambda \to +\infty} P_{\lambda} x = x$$

$$iv) \quad \forall x \in H \quad \lim_{\lambda \to \infty} P_{\lambda} x = 0$$

Si on traduit ces conditions en termes des espaces images  ${\bf E}_{\lambda}$  des projecteurs  ${\bf P}_{\lambda},$  on a

i') 
$$E_{\lambda} \subseteq E_{\mu}$$
 si  $\lambda \leq \mu$ 

ii') 
$$E_{\lambda} = \bigcap_{\mu > \lambda} E_{\mu}$$

iii') 
$$\overline{\bigcup E_{\lambda}} = H$$

iv') 
$$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} E_{\lambda} = \{0\}$$

Lemme 8. Si  $(P_{\lambda})$  est une résolution de l'identité de H, pour tout x de H la fonction  $\lambda \mapsto \langle P_{\lambda} x, x \rangle$  est croissante, continue à droite et tend respectivement en  $-\infty$  et  $+\infty$  vers 0 et  $||x||^2$ . Inversement, si une famille  $(P_{\lambda})$  de projecteurs

orthogonaux vérifie ces conditions, c'est une résolution de l'identité.

Soient  $(P_{\lambda})$  une résolution de l'identité et  $x \in H$ . Alors, si  $\lambda \leq \mu$ , on a  $P_{\mu} \cdot P_{\lambda} = P_{\mu}^* \cdot P_{\lambda}^* = (P_{\lambda} \cdot P_{\mu})^* = P_{\lambda}^* = P_{\lambda}$  donc  $P_{\mu} \cdot P_{\lambda} \cdot P_{\mu} = P_{\lambda} \cdot P_{\mu}^2 = P_{\lambda} \cdot P_{\mu} = P_{\lambda}$ , et

$$< P_{\lambda}x, x > = < P_{\mu} P_{\lambda} P_{\mu} x, x > = < P_{\lambda}(P_{\mu}x), P_{\mu}x >$$
  
 $\le ||P_{\mu}x||^2 = < P_{\mu} x, P_{\mu}x > = < P_{\mu}^* P_{\mu} x, x > = < P_{\mu} x, x >$ 

puisque  $\langle P_{\lambda} y, y \rangle \leq ||y||^2$  pour tout  $y \in H$ .

Donc  $\lambda \rightarrow \langle P_{\lambda} x, x \rangle$  est croissante.

De plus 
$$\lim_{\substack{\mu \to \lambda \\ \mu \geqslant \lambda}} < P_{\mu} x, x > = < \lim_{\substack{\mu \to \lambda \\ \mu \geqslant \lambda}} P_{\mu} x, x > = < P_{\lambda} x, x >$$

et, de même

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \langle P_{\lambda} | \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \lim_{\lambda \to +\infty} P_{\lambda} | \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = ||\mathbf{x}||^{2}$$
et
$$\lim_{\lambda \to -\infty} \langle P_{\lambda} | \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \lim_{\lambda \to -\infty} P_{\lambda} | \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle 0, \mathbf{x} \rangle = 0$$

Inversement, si pour tout  $x \in H$ ,  $< P_{\lambda} x, x > \le < P_{\mu} x, x >$  on a pour tout  $x \in \text{Ker } P_{\mu}$ 

$$0 \le ||P_{\lambda}x||^2 = \langle P_{\lambda} | x, x \rangle \le \langle P_{u} | x, x \rangle = 0$$

donc  $P_{\lambda}$  x = 0. Si  $E_{\lambda}$  et  $E_{\mu}$  sont les espaces images de  $P_{\lambda}$  et  $P_{\mu}$ , on a donc  $E_{\mu}^{L} \subset E_{\lambda}^{L}$ , donc  $E_{\lambda} \subset E_{\mu}$ . Donc sur  $E_{\mu}^{L}$ ,  $P_{\lambda}$  et  $P_{\mu}$  sont nuls ; d'où  $P_{\lambda}$   $P_{\mu}$  =  $P_{\lambda}$  sur  $E_{\mu}^{L}$ . Et sur  $E_{\mu}$ , puisque  $P_{\mu}$  est l'identité  $P_{\lambda}$   $P_{\mu}$  =  $P_{\lambda}$ . Donc  $P_{\lambda}$   $P_{\mu}$  est égal à  $P_{\lambda}$  sur  $E_{\mu}^{L} \oplus E_{\mu}$  = H.

Si 
$$f_x(\lambda) = \langle P_{\lambda} | x, x \rangle$$
, on a, pour  $\lambda \leq \mu$ :  

$$\begin{aligned} ||P_{\mu}x - P_{\lambda}x||^2 &= \langle (P_{\mu} - P_{\lambda})x, (P_{\mu} - P_{\lambda})x \rangle \\ &= \langle (P_{\mu} - P_{\lambda}) (P_{\mu} - P_{\lambda})x, x \rangle \\ &= \langle (P_{\mu}^2 + P_{\lambda}^2 - P_{\lambda} P_{\mu} - P_{\mu} P_{\lambda})x, x \rangle \end{aligned}$$

et puisque  $P_{\mu}^2 = P_{\mu}$  et  $P_{\lambda}^2 = P_{\lambda} P_{\mu} = P_{\mu} P_{\lambda}$ , on a

$$||P_{\mu}x-P_{\lambda}x||^2 = \langle (P_{\mu}-P_{\lambda})x, x \rangle = f_{\chi}(\mu) - f_{\chi}(\lambda) \rightarrow 0 \ \mu \rightarrow \lambda$$

 $\operatorname{si}$   $\operatorname{f}_{\operatorname{X}}$  est continue à droite.

De même, puisque

 $||P_{\lambda}x||^2 = \langle P_{\lambda} x, x \rangle = f_{\chi}(\lambda), \quad \text{si } f_{\chi} \text{ tend vers 0 en } -\infty,$   $P_{\lambda}x \text{ tend vers 0.}$ 

Et, puisque

$$||x-P_{\lambda}x||^{2} = \langle (I-P_{\lambda})(I-P_{\lambda})x,x \rangle$$
  
=  $\langle (I-P_{\lambda})x,x \rangle = ||x||^{2} - f_{x}(\lambda),$ 

si  $f_x(\lambda) + ||x||^2$  en  $+\infty$ ,  $P_{\lambda}x$  tend vers x.

Définition 9. Soit  $(P_{\lambda})$  une résolution de l'identité. On appelle support de cette résolution de l'identité l'ensemble des points  $\lambda$  de R tels que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$P_{\lambda-\epsilon} \neq P_{\lambda+\epsilon}$$
.

Le support de  $(P_{\lambda})$  est clairement fermé dans R.

Lemme 10. Soit  $(P_{\lambda})$  une résolution de l'identité. Le support de  $(P_{\lambda})$  est compact si et seulement s'il existe un  $a \in R$  tel que  $P_{\alpha} = I$  et  $P_{-\alpha} = 0$ .

Si  $P_a = I$ , on a, pour  $\lambda \ge a$ ,  $P_{\lambda} \cdot P_a = P_a$  c'est-à-dire  $P_{\lambda} = I$ . Donc  $Ia,+\infty$  [ est disjoint du support X de  $(P_{\lambda})$ . De même, si  $P_{-a} = 0$ , on a, pour

 $\lambda \le a$ ,  $P_{\lambda}.P_{a} = P_{\lambda}$ , donc  $P_{\lambda} = 0$ , et  $]-\infty$ , a [ est disjoint de X. Le fermé X est donc contenu dans [-a,+a], donc est compact.

Inversement, si X, support de  $(P_{\lambda})$ , est compact, il existe  $a \ge 0$  tel que  $X \subseteq [-a,+a]$ . Si on note  $f_X(\lambda) = \langle P_{\lambda} | x, x \rangle$ , la fonction  $f_X$  est localement constante sur  $[a,+\infty[$ , donc constante par connexité. Et puisque  $\lim_{\lambda \to +\infty} f_X(\lambda) = ||x||^2$ , cette constante est  $||x||^2$ . Donc, si b > a,  $f_X(b) = ||x||^2$ , ce qui entraîne que  $P_b = I$ . Le même raisonnement montre que  $P_{-b} = 0$ .

Théorème 11. Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur hermitien. Il existe alors une résolution de l'identité  $(P_{\lambda})$  à support compact, dite attachée à T telle que

$$i) \qquad \forall \lambda \in R \qquad TP_{\lambda} = P_{\lambda}T$$

ii) si  $\lambda < \mu$ , la restriction de T à l'espace image  $E_{\lambda,\mu}$  de  $P_{\mu}$ - $P_{\lambda}$  a son spectre (relatif à ol  $(E_{\lambda,\mu})$ ) contenu dans  $[\lambda,\mu]$ .

Soient X le spectre de T, qui est compact et contenu dans R puisque T est hermitien, et, pour  $\lambda \in R$ ,  $e_{\lambda}$  la restriction à X de la fonction caractéristique de  $1^{-\infty}$ ,  $\lambda$  ]. Il résulte alors du théorème 5 que  $P_{\lambda} = e_{\lambda}(T)$  est un projecteur qui commute avec T, et, puisque  $e_{\mu}^{-}e_{\lambda}$  est la restriction à X de la fonction caractéristique de  $\{\lambda,\mu\}$ , que le spectre de la restriction de T à  $E_{\lambda,\mu}$ , espace image du projecteur  $P_{\mu}^{-}P_{\lambda}$  est contenu dans  $X \cap \{\lambda,\mu\}$ .

Enfin, si  $\lambda_0 \notin X$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $|\lambda_0 - \varepsilon|$ ,  $\lambda_0 + \varepsilon | \cap X = \emptyset$ . Alors  $e_{\lambda_0 - \varepsilon} = e_{\lambda_0 + \varepsilon}$  et  $P_{\lambda_0 - \varepsilon} = P_{\lambda_0 + \varepsilon}$ . Donc  $\lambda_0$  n'est pas dans le support de  $(P_{\lambda})$ , ce qui prouve que le support de  $(P_{\lambda})$ , contenu dans X, est compact. Il ne reste maintenant qu'à montrer la continuité forte à droite de  $(P_{\lambda})$  et la croissance. Soient donc  $x \in H$ , et  $\mu_X$  la mesure de Radon sur X définie au théorème 3.

On a 
$$\langle P_{\lambda} | x, x \rangle = \langle e_{\lambda}(T), x, x \rangle = \int_{X} e_{\lambda}(t) d\mu_{x}(t)$$
  
=  $\mu_{x}(X \cap \} -\infty, \lambda \}$ 

d'où la croissance. Si  $\lambda_n \geqslant \lambda$  et  $\lambda_n + \lambda$ , on a  $|\mathbf{e}_{\lambda_n}| \leqslant 1$  et  $\mathbf{e}_{\lambda_n} \rightarrow \mathbf{e}_{\lambda}$  simplement sur X. Donc  $\langle P_{\lambda_n} x, x \rangle \rightarrow \langle P_{\lambda_n} x, x \rangle$ , ce qui prouve la continuité à droite.

On va maintenant donner une méthode pour reconstruire T à partir de  $(P_{\lambda})$ , et, plus généralement, définir un calcul fonctionnel à partir d'une résolution de l'identité. On va, pour cela, commencer par quelques rappels sur l'intégrale de Stieltjes.

Soit  $\phi$  une fonction de R dans R, croissante et continue à droite. Si  $\mathcal E$  est l'espace vectoriel des fonctions complexes en escalier continues à gauche, on définit une forme linéaire  $I_{\dot\phi}$  sur  $\mathcal E$  en posant

$$I_{\phi}(f) = \sum_{m=1}^{n} \theta_{m}(\phi(\lambda_{m}) - \phi(\lambda_{m-1}))$$

si 
$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$$
 et  $f(\lambda) = \theta_m$  pour  $\lambda_{m-1} < \lambda \le \lambda_m$  
$$f(\lambda) = 0 \quad \text{pour } \lambda \le \lambda_0 \quad \text{et } \lambda > \lambda_n$$

On vérifie que  $I_{\varphi}$  ne dépend que de f dans  $\mathcal E$ , et non de la subdivision  $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ , que  $I_{\varphi}(f)$  est réelle si f est réelle, et positive si f est positive, et que

$$\left| I_{\phi}(f) \right| \leq I_{\phi}(|f|)$$

Il en résulte que si  $f \in \mathcal{E}$  est nulle hors de la,b [, on a  $|I_{\varphi}(f)| \le ||f|| \cdot (\varphi(b) - \varphi(a))$ , donc que  $I_{\varphi}$  se prolonge en une forme linéaire positive sur l'espace  $\hat{\mathcal{E}}$  des fonctions à support compact qui sont limites uniformes de fonctions de  $\mathcal{E}$ , espace qui contient en particulier les fonctions continues à support compact. Il existe donc une mesure de Radon positive  $\mu$  sur R telle que, si f est continue à support compact  $f(\lambda)d\mu(\lambda) = I_{\varphi}(f).$ 

Soient u et v dans R tels que u < v. Il existe pour tout n une fonction continue f à valeurs dans [0,1] telle que

$$\begin{split} &f_n(\lambda) = 1 \quad \text{si} \quad u + \frac{1}{n} \leqslant \lambda \leqslant \nu \qquad \text{et} \\ &f_n(\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \leqslant u \quad \text{ou si} \quad \lambda \geqslant \nu + \frac{1}{n} \end{split}$$

Alors, puisque  $I_{\phi}$  est positive sur  $\hat{\mathbf{\xi}}$ , on a

$$\phi(v) - \phi(u + \frac{1}{n}) \leq I_{\phi}(f_n) = ff_n d\mu \leq \phi(v + \frac{1}{n}) - \phi(u)$$

La continuité à droite de  $\phi$ , et la convergence simple de  $(f_n)$  vers la fonction caractéristique de [u,v] donnent alors

$$\mu(]u,v]) = \phi(v) - \phi(u).$$

On note  $ff(\lambda)d\phi(\lambda)$  l'intégrale de f par rapport à cette mesure  $\mu$ . Inversement, si  $\mu$  est une mesure de Radon positive, il existe une fonction  $\phi$  (unique à une constante additive près) telle que  $\phi(v) - \phi(u) = \mu(|u,v|)$ , et la construction de  $I_{\phi}$  montre clairement que, sur  $\mathcal{E}$ ,  $I_{\phi}$  coîncide avec  $\mu$ , donc que la mesure de Radon  $d\phi(\lambda)$  est égale à  $\mu$ .

Remarquons encore que si  $\phi(\lambda)=\lambda$ , l'intégrale de Stieltjes  $ff(\lambda)d\lambda$  redonne la mesure de Lebesgue.

Théorème 12. Soit T un opérateur hermitien sur H. Si  $(P_{\lambda})$  est la résolution de l'identité attachée à T, on a pour tout x de H et tout  $n \geq 0$ 

$$< \pi^n x, x > = f \lambda^n d < P_{\lambda} x, x >$$

La fonction  $\lambda \to \langle P_{\lambda} | x, x \rangle$  est croissante et continue à droite et définit, par l'intégrale de Stieltjes une mesure de Radon  $\nu_{\chi}$  telle que, pour u < v,

$$v_{x}(lu,vl) = \langle P_{v}|x,x \rangle - \langle P_{u}|x,x \rangle$$

Par ailleurs, la mesure spectrale  $\mu_X$  définie sur le spectre X de T par

$$ff(t)d\mu_{X}(t) = \langle f(T)x, x \rangle \text{ pour } f \in C(X)$$

vérifie, par définition de  $P_{\lambda}$ ,

$$\mu_{X}(1-\infty,\lambda 1) = \langle P_{\lambda} x,x \rangle$$

donc

$$\mu_{x}(|u,v|) = \langle P_{v}|x,x \rangle - \langle P_{u}|x,x \rangle = v_{x}(|u,v|)$$

ce qui entraîne  $\mu_x = v_x$ . Donc, pour  $f(t) = t^n$ 

$$< f(T).x,x > = < T^{n}x,x > = ff(t)d\mu_{x}(t) = ff(\lambda)d < P_{\lambda} x,x >$$

$$= f\lambda^{n}d < P_{\lambda} x,x > .$$

On définit maintenant, d'une façon analogue à l'intégrale de Siteltjes, l'intégrale d'une fonction par rapport à une résolution de l'identité, en remplaçant la fonction  $\phi(\lambda)$  par la résolution  $(P_{\lambda})$ .

Pour 
$$f \in \mathcal{C}$$
, îl existe  $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$  et  $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$  tels que 
$$f(\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \leq \lambda_0 \quad \text{ou} \quad \lambda > \lambda_n$$
 
$$f(\lambda_m) = \theta_m \quad \text{si} \quad \lambda_{m-1} < \lambda \leq \lambda_m$$

et on définit  $I(f) \in \mathcal{A}(H)$  par

$$I(f) = \sum_{m=1}^{n} \theta_{m} (P_{\lambda_{m}} - P_{\lambda_{m-1}}).$$

On vérifie que I(f) ne dépend que de f et non de la subdivision  $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ , que f  $\rightarrow$  I(f) est linéaire, que I(f) est hermitien si f est réelle.

De plus, si m < p, on a  $m \le p-1$  donc

$$(P_{\lambda_{m}} - P_{\lambda_{m-1}}) \cdot (P_{\lambda_{p}} - P_{\lambda_{p-1}}) = P_{\lambda_{m}} \cdot P_{\lambda_{p}} + P_{\lambda_{m-1}} \cdot P_{\lambda_{p-1}} - P_{\lambda_{m-1}} \cdot P_{\lambda_{p}} - P_{\lambda_{m}} \cdot P_{\lambda_{p-1}}$$

$$= P_{\lambda_{m}} + P_{\lambda_{m-1}} - P_{\lambda_{m-1}} - P_{\lambda_{m}} = 0 .$$

Donc, pour tout x de H, les vecteurs  $x_m = (P_{\lambda_m} - P_{\lambda_{m-1}}).x$  sont deux à deux orthogonaux, et

$$I(f).x = \sum_{m} \theta_{m} x_{m}$$
d'où 
$$||I(f).x||^{2} = \sum_{1}^{n} |\theta_{m}|^{2} ||x_{m}||^{2} \le ||f||^{2}.\sum_{1}^{n} ||x_{m}||^{2}$$
et puisque 
$$\sum_{1}^{n} x_{m} = (P_{\lambda_{n}} - P_{\lambda_{0}})x$$

$$\sum_{1}^{n} ||x_{m}||^{2} = ||\sum_{1}^{n} x_{m}||^{2} \le ||x||^{2}$$
on obtient 
$$||I(f).x||^{2} \le ||f||^{2}.||x||^{2}$$

$$||I(f)|| \le ||f||$$

Si f<sub>1</sub> et f<sub>2</sub> appartiemment à &, on peut, quitte à raffiner la subdivision, supposer  $f_1$  et  $f_2$  nulles hors de  $l\lambda_0, \lambda_n$  l et prenant des valeurs constantes  $\theta_m^1$  et  $\theta_m^{**}$  sur  $1\lambda_{m-1}, \lambda_m^{}$  1. Alors

$$I(f_1) \cdot I(f_2) = \left[ \sum_{m} \theta_m'(P_{\lambda_m} - P_{\lambda_{m-1}}) \right] \left[ \sum_{p} \theta_p''(P_{\lambda_p} - P_{\lambda_{p-1}}) \right]$$

$$= \sum_{m,p} \theta_m' \theta_p''(P_{\lambda_m} - P_{\lambda_{m-1}}) \left( P_{\lambda_p} - P_{\lambda_{p-1}} \right)$$

$$I(f_1) \cdot I(f_2) = \sum_{m=1}^{n} \theta_m' \theta_m''(P_{\lambda_m} - P_{\lambda_{m-1}}) = I(f_1 \cdot f_2)$$
donc
$$I(f_1) \cdot I(f_2) = \sum_{m=1}^{n} \theta_m' \theta_m''(P_{\lambda_m} - P_{\lambda_{m-1}}) = I(f_1 \cdot f_2)$$

Si  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des limites uniformes sur R de fonctions de  $\mathcal{C}$ , 1'espace  $\mathcal{C}$  contient  $C_0(\mathbb{R})$  et l'application  $f \to I(f)$  se prolonge par continuité à c en une application qui vérifie

$$I(f_{1} + f_{2}) = I(f_{1}) + I(f_{2})$$

$$I(\lambda f) = \lambda I(f)$$

$$I(f) = I(f)^{*}$$

$$I(f_{1}.f_{2}) = I(f_{1}).I(f_{2})$$

$$||I(f)|| \leq ||f||$$

Si 
$$x \in H$$
, on a, pour toute  $f \in \mathcal{E}$   
 $< I(f).x,x > = \int f(\lambda)d < P_{\lambda} x,x >$ 

par les définitions des deux membres. Cette égalité reste donc valable pour toute f de  $\overline{\mathcal{E}}$ , en particulier pour  $f\in C_0(R)$ .

On note  $/f(\lambda)dP_{\lambda}$  l'opérateur I(f) et on a donc

$$<(ff(\lambda)dP_{\lambda}).x,x>=ff(\lambda)d< P_{\lambda}x,x>.$$

Si X est le support de  $(P_{\lambda})$  et si  $f \in C_{O}(R)$  est nulle sur X, l'ensemble  $K_{\varepsilon} = \{\lambda \mid |f(\lambda)| \geq \varepsilon\}$  est un compact disjoint de X. Il existe donc un nombre fini d'intervalles  $[u_{j},v_{j}]$  dont les intérieurs recouvrent  $K_{\varepsilon}$  et qui sont disjoints de X. Si g est la fonction caractéristique de la réunion des  $[u_{j},v_{j}]$ , on a  $fg^{2}(\lambda)dP_{\lambda}=0$ , et il existe  $h\in C_{O}(R)$  telle que  $||h||\leqslant \varepsilon$  et  $|f-h|\leqslant ||f||_{S}$ . Donc, pour tout x,

$$< f|f-h|^2 dP_{\lambda} |x,x> = ||(ffdP_{\lambda}-fhdP_{\lambda})x||^2 \le ||f||^2 < fg^2 dP_{\lambda} |x,x> = 0$$
 et 
$$||fhdP_{\lambda}|| \le ||h|| \le \varepsilon.$$

Donc  $||fdP_{\lambda}|| \le \epsilon$  pour tout  $\epsilon$ , c'est-à-dire  $|fdP_{\lambda}| = 0$ . Il en résulte que l'intégrale  $|f(\lambda)dP_{\lambda}|$  ne dépend que de la restriction de f à X.

Théorème 13. Si  $(P_{\lambda})$  est une résolution de l'identité à support compact, l'intégrale  $\int \lambda dP_{\lambda}$  est un opérateur hermitien T, et la résolution de l'identité attachée à T est  $(P_{\lambda})$ .

Inversement, si T est un opérateur hermitien et  $(P_{\lambda})$  la résolution de l identité attachée à T, on a  $T=f\lambda dP_{\lambda}$ .

Si X, support de la résolution de l'identité  $(P_{\lambda})$ , est compact, il existe

$$\begin{split} f \in C_o(R) \quad \text{telle que } f(\lambda) = \lambda \quad \text{sur } X, \text{ et } f = \overline{f}. \text{ Alors si } T = ff(\lambda) dP_\lambda, \text{ on a} \\ T^* = f\overline{f}(\lambda) dP_\lambda = ff(\lambda) dP_\lambda = T. \end{split}$$

Et si  $(Q_{\lambda})$  est la résolution de l'identité attachée à T, on a, pour tout  $n \ge 0$ , d'après le théorème 12 :

$$< T^n x, x > = \int \lambda^n d < Q_{\lambda} x, x >$$

et puisque  $T^n = ff(\lambda)^n dP_{\lambda}$ 

$$< T^n x,x > = ff(\lambda)^n d < P_{\lambda} x,x > = f\lambda^n d < P_{\lambda} x,x >.$$

Les mesures à support compact  $\nu_{\rm x}={\rm d}<{\rm Q}_{\lambda}$  x,x > et  ${\rm d}<{\rm P}_{\lambda}$  x,x > =  $\mu_{\rm x}$  coîncident donc sur les polynômes, donc sont égales en vertu du théorème de Stone-Weierstrass. Donc  $<{\rm Q}_{\lambda}$  x,x > =  $\nu_{\rm x}({\rm J}-\infty,\lambda$  1) est égal à  $<{\rm P}_{\lambda}$  x,x > =  $\mu_{\rm x}({\rm J}-\infty,\lambda$  1). Ceci entraîne que  ${\rm P}_{\lambda}={\rm Q}_{\lambda}$ .

Inversement, si  $\mu_X$  est la mesure spectrale définie par  $f(\lambda)d\mu_X(\lambda) = \langle f(T) | x, x \rangle$  pour  $f \in C(X)$ , avec X le spectre de T, on a déjà montré que

$$\mu_{x} = d < P_{\lambda} x, x >$$
.

Donc 
$$\langle \int \lambda dP_{\lambda}.x, x \rangle = \int \lambda d \langle P_{\lambda}.x, x \rangle = \int \lambda d\mu_{X}(\lambda)$$
  
=  $\langle Tx, x \rangle$ 

Ceci montre que  $T = \int \lambda dP_{\lambda}$ .

Théorème 14. Si  $(P_{\lambda})$  est une résolution de l'identité, on peut associer à toute fonction borélienne bornée f sur le support X de  $(P_{\lambda})$  un opérateur  $ff(\lambda)dP_{\lambda}$  en sorte que

$$\begin{split} & \int (f+g)(\lambda) dP_{\lambda} = \int f(\lambda) dP_{\lambda} + \int g(\lambda) dP_{\lambda} \\ & \int (\alpha f)(\lambda) dP_{\lambda} = \alpha \int f(\lambda) dP_{\lambda} \\ & \int (fg)(\lambda) dP_{\lambda} = (\int f(\lambda) dP_{\lambda}) \cdot (\int g(\lambda) dP_{\lambda}) \\ & \int \overline{f}(\lambda) dP_{\lambda} = (\int f(\lambda) dP_{\lambda})^* \\ & ||f(\lambda) dP_{\lambda}|| \leq ||f|| \\ & \int f(\lambda) dP_{\lambda} = P_{u} \end{split}$$

si f est la fonction caractéristique de l-∞,u l.

De plus, si une suite uniformément bornée  $f_n$  converge simplement vers f, on a pour tout x:  $(ff(\lambda)dP_{\lambda})x = \lim_{n} (f_n(\lambda)dP_{\lambda}).x$ .

La démonstration de ce théorème est essentiellement la même que celle du théorème 4.

Si  $\mu_x$  est la mesure  $d < P_{\lambda} x, x >$ , et si on définit, pour  $f \in \mathcal{B}(X)$ ,  $q_f(x) = f(\lambda) d\mu_x(\lambda)$ 

il existe un unique opérateur  $S_{f}$  tel que

$$\leq S_{\mathbf{f}} x_* x \geq = q_{\mathbf{f}}(x) = f \mathbf{f}(\lambda) d \mu_{\mathbf{r}}(\lambda)$$

Il résulte de ce qui précède que, si  $f \in C_0(X)$ ,  $S_f$  est égal à  $ff(\lambda)dP_{\lambda}$ , et on notera, pour toute  $f \in \mathcal{B}(X)$ ,  $ff(\lambda)dP_{\lambda}$  l'opérateur ainsi défini.

Si f est la fonction caractéristique de ]-∞,u], on a

$$ff(\lambda)d < P_{\lambda} x,x > = < P_{u} x,x >, donc$$
 
$$ff(\lambda)dP_{\lambda} = P_{u}$$

Les autres propriétés se démontrent comme dans le théorème 4, la propriété de multiplicativité se montrant d'abord pour  $f \in \mathcal{B}(X)$  et  $g \in C_o(X)$  puis pour  $f \in \mathcal{B}(X)$  et  $g \in \mathcal{B}(X)$  en utilisant les mesures  $\mu_{X,Y}$  telles que

$$< ff(\lambda)dP_{\lambda} x,y > = ff(\lambda)d\mu_{x,y}(\lambda) \text{ pour } f \in C_{o}(X).$$

Théorème 15. Si  $U \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur unitaire, il existe une résolution de l'identité  $(P_{\lambda})$  telle que

$$U = \int e^{i\lambda} dP_{\lambda}$$

Inversement, si  $(P_{\lambda})$  est une résolution de l'identité,  $\int e^{i\lambda} dP_{\lambda}$  est un opérateur unitaire.

Soit  $(P_{\lambda})$  une résolution de l'identité. Puisque

$$fd < P_{\lambda} x, x > = \lim_{\lambda \to +\infty} < P_{\lambda} x, x > - \lim_{\lambda \to -\infty} < P_{\lambda} x, x > = ||x||^2 = < x, x >$$

on a  $\int dP_{\lambda} = I$ .

Donc, si 
$$U = \int e^{i\lambda} dP_{\lambda}$$
, on a  $U^* = \int e^{-i\lambda} dP_{\lambda}$ , et 
$$UU^* = U^*U = \int e^{i\lambda} e^{-i\lambda} dP_{\lambda} = \int dP_{\lambda} = I.$$

Donc U est unitaire.

Si U est un opérateur unitaire et si z est dans le spectre de U, on a  $|z| \le ||U|| = 1$ . Mais alors  $\frac{1}{z}$  est dans le spectre de |U| = 1. Donc |U| = 1. Mais alors |U| = 1. Il en résulte que le spectre de U est contenu dans l'ensemble W des nombres complexes de module 1. Soit h la fonction définie sur W, à valeurs dans |U| = 1, telle que |U| = 1 pour tout w de W. Alors h est borélienne et bornée. Si |U| = 1 bornée le set à valeurs réelles. Il existe donc une résolution de l'identité |U| = 1 telle que |U| = 1 bornée. Alors, pour |U| = 1 bornée.

$$i^n \frac{h^n(U)}{n!} = \frac{i^n T^n}{n!} = \int i^n \frac{\lambda^n}{n!} dP_{\lambda}$$

et, par passage à la limite :

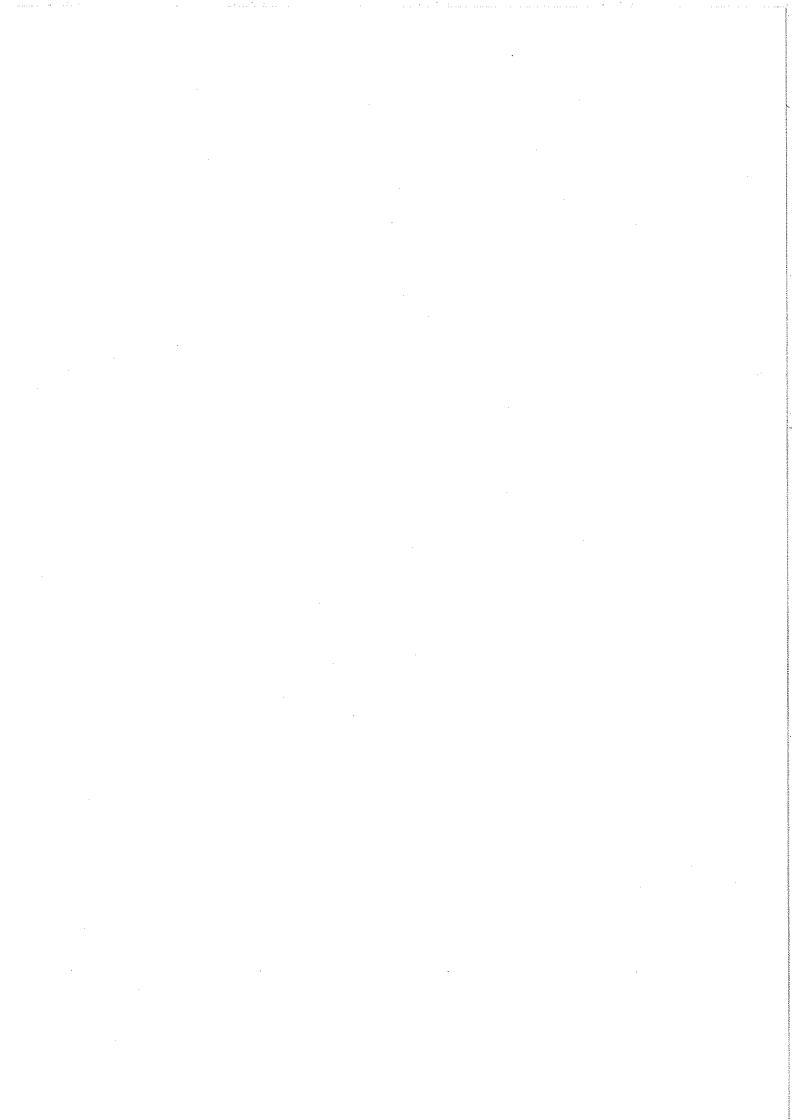
$$e^{ih(U)} = e^{iT} = \sum_{0}^{\infty} \frac{i^n T^n}{n!} = \int_{0}^{\infty} i^n \frac{\lambda^n}{n!} dP_{\lambda} = \int_{0}^{i\lambda} dP_{\lambda}$$

Mais puisque  $\sum_{0}^{n} \frac{i^{m} h^{m}}{m!}$  (w)  $\rightarrow$  w uniformément sur W,

$$e^{ih(U)} = U$$

Donc

$$U = e^{iT} = \int e^{i\lambda} dP_{\lambda}.$$



### Chapitre IX

# Fonctions de type positif

# Groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires

<u>Définition 1.</u> Soit G un groupe localement compact commutatif (qu'on notera additivement). Une fonction continue  $\phi$  de G dans C sera dite de <u>type positif</u> si, quels que soient l'entier k,  $x_1, \ldots, x_k$  dans G et  $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$  dans C, on a

$$\sum_{m,n < k} \alpha_m \overline{\alpha}_n \phi(x_m - x_n) \in \mathbb{R}^+$$

Lemme 2. Si  $\phi$  est de type positif sur G et si  $\theta$  est l'élément neutre de G, on a  $\phi(\theta) \in R^+$ . De plus, pour tout x de G, on a  $\overline{\phi(x)} = \phi(-x)$  et  $|\phi(x)| \leq \phi(\theta)$ .

Avec k = 1,  $\alpha_1 = 1$  et  $x_1 = \theta$ , on doit avoir  $\phi(\theta) \in \mathbb{R}^+$ . Avec k = 2,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \lambda$ ,  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = x$ :

$$\phi(\theta) + \lambda \overline{\lambda} \phi(\theta) + \lambda \phi(-x) + \overline{\lambda} \phi(x) \in R^{+}$$

On en déduit

$$\lambda \phi(-x) + \overline{\lambda} \phi(x) \in \mathbb{R}$$

d'où avec  $\lambda = 1$  puis  $\lambda = i$ 

$$2\alpha = \phi(x) + \phi(-x) \in \mathbb{R}$$

$$2\beta = i\phi(-x) - i\phi(x) \in R$$

$$\phi(x) = \alpha + i\beta$$
 et  $\phi(-x) = \alpha - i\beta$ 

d'où

$$\phi(-x) = \overline{\phi(x)}$$

$$\lambda = -\frac{\phi(x)}{|\phi(x)|} \quad \text{si } \phi(x) \neq 0,$$

$$2\phi(\theta) - 2 |\phi(x)| \ge 0$$

d'où  $|\phi(x)| \le \phi(\theta)$ , inégalité encore vérifiée si

$$\phi(x) = 0.$$

Il en résulte que  $\phi$  appartient à  $L^{\infty}(G)$ .

Lemme 3. Si  $\phi$  est de type positif sur G et si f est dans  $L^1(G)$ , on a, en notant  $\mu$  la mesure de Haar de G:

$$\int \int \int f(x) \overline{f}(y) \phi(x-y) d\mu(x) d\mu(y) \in R^{+}$$

La fonction  $f \to f/f(x) \overline{f}(y) \phi(x-y) d\mu(x) d\mu(y)$  est continue de L<sup>1</sup>(G) dans C. Il suffit donc de démontrer le lemme quand f est une fonction étagée nulle hors d'un compact K.

Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $(x,y) \to \phi(x-y)$  étant continue, donc uniformément continue sur K×K, il existe un voisinage V de  $\theta$  tel que sî x-x' et y-y' appartiennent à V, on ait

$$|\phi(x-y) - \phi(x'-y')| < \frac{\varepsilon}{||f||^2}$$
 si  $x,x',y,y' \in K$ 

Il existe donc un nombre fini  $E_1,\dots,E_k$  de parties mesurables deux à deux disjointes et contenues dans K et des nombres  $\alpha_1,\dots,\alpha_k$  tels que  $f=\sum\limits_{1}^{K}\alpha_m \ ^1_{E_m}$ . Quitte à fractionner les  $E_m$ , on peut en outre supposer que, si x et x' sont dans un même  $E_m$ , x-x' est dans V. Choisissons alors x dans  $E_m$  et posons  $\beta_m = \alpha_m \ \mu(E_m)$ .

On a 
$$||f|| = \sum_{1}^{k} |\alpha_{m}| \cdot \mu(E_{m}) = \sum_{1}^{k} |\beta_{m}|$$
et 
$$|\int_{E_{m}} (\phi(x-y) - \phi(x_{m}-x_{n})) d\mu(x) d\mu(y)|$$

$$= |\int_{E_{m}} (x-y) d\mu(x) d\mu(y) - \mu(E_{m}) \mu(E_{n}) \phi(x_{m}-x_{n})|$$

$$< \frac{\varepsilon}{||f||^{2}} \mu(E_{m}) \mu(E_{n})$$

Donc  $J = ff(x)\overline{f}(y)\phi(x-y)d\mu(x)d\mu(y) = \sum_{m,n} \alpha_m \overline{\alpha}_n \int_{E_m \times E_n} \phi(x-y)d\mu(x)d\mu(y)$ 

et 
$$|J-\Sigma \beta_m \overline{\beta}_n \phi(x_m-x_n)| \leq \sum_{m,n} |\alpha_m| \cdot |\alpha_n| \cdot \frac{\varepsilon}{||f||^2} \mu(E_m) \mu(E_n)$$
  
$$\leq \frac{\varepsilon}{||f||^2} (\Sigma |\beta_m|)^2 = \varepsilon$$

Et puisque  $\Sigma \beta_m \overline{\beta}_n \phi(x_m - x_n) \in R^+$ , J est adhérent à  $R^+$ , donc y appartient.

Théorème 4. Si  $\phi$  est de type positif sur G, la forme linéaire  $\Phi: f \to f(x)\phi(x)d\mu(x)$  est positive sur l'algèbre hermitienne  $L^1(G)$ .

On a 
$$\Phi(f*f^*) = ff(x)f^*(y)\phi(x+y)d\mu(x)d\mu(y)$$
  

$$= ff(x)\overline{f}(-y)\phi(x+y)d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= ff(x)\overline{f}(y)\phi(x-y)d\mu(x)d\mu(y)$$

D'où Φ(f\*f\*) ∈ R d'après le lemme précédent.

Théorème 5. (Bochner-Weil). Si  $\nu$  est une mesure positive bornée sur  $\hat{G}$ , la fonction  $x \to \int_{\hat{G}} \chi(x) d\nu(\chi)$  est de type positif sur G. Inversement, si  $\phi$  est de type positif sur G, il existe une unique mesure de Radon positive bornée sur  $\hat{G}$  telle que

$$\phi(x) = \int_{\widehat{G}} \chi(x) dv(\chi).$$

Si  $\nu$  est une mesure positive bornée sur  $\hat{G}$ , la fonction  $\phi: x + \int_{\hat{G}} \chi(x) d\nu(\chi) \text{ est continue. En effet, si } \epsilon > 0, \text{ il existe un compact } K$  de  $\hat{G}$  tel que  $\nu(\hat{G} \setminus K) < \frac{\epsilon}{3}$  et un voisinage V de  $\theta$  tel que

$$Vy \in V \quad V\chi \in K \qquad |\chi(y)-1| < \frac{\varepsilon}{3||v||^{-\frac{\varepsilon}{3}}}$$
Alors, si  $y \in V$ ,  $|\phi(x+y) - \phi(x)| \le \int_{K} |\chi(x+y) - \chi(x)| dv(\chi) + \int_{\widehat{G}\setminus K} |\chi(x+y) - \chi(x)| dv(\chi)$ 

$$\le \int_{K} |\chi(y) - 1| dv(\chi) + 2v(\widehat{G}\setminus K)$$

Donc  $\varphi$  est uniformément continue. De plus, si  $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in C$  et  $x_1,\dots,x_k\in G$ 

$$\Sigma \alpha_{m} \overline{\alpha}_{n} \phi(x_{m} - x_{n}) = f[\Sigma \alpha_{m} \overline{\alpha}_{n} \chi(x_{m} - x_{n})] dv(\chi)$$

$$= f(\Sigma \alpha_{m} \overline{\alpha}_{n} \chi(x_{m}) \overline{\chi(x_{n})}) dv(\chi)$$

$$= f|_{1}^{k} \alpha_{m} \chi(x_{m})|^{2} dv(\chi) \in \mathbb{R}^{+}$$

Donc  $\phi$  est de type positif.

Inversement, si  $\phi$  est de type positif, la fonction  $\overline{\phi}$  est aussi de type positif et la forme linéaire  $\phi$ :  $f + \int f(x)\overline{\phi}(x)d\mu(x)$  est positive sur l'algèbre  $L^1(G)$  qui est hermitienne et possède une unité approchée. Il existe donc, d'après le théorème 11 du chapitre IV, une unique mesure  $\nu$  sur le spectre  $\hat{G}$  de  $L^1(G)$  telle que

$$\Phi(\mathbf{f}) = \int_{\hat{\mathbf{G}}} \hat{\mathbf{f}}(\chi) d\nu \chi$$

$$= \int_{\hat{\mathbf{G}}} (\int_{\hat{\mathbf{G}}} \mathbf{f}(x) \overline{\chi(x)} d\mu(x)) d\nu \chi$$

$$= \int_{\mathbf{G}} (\int_{\hat{\mathbf{G}}} \chi(x) d\nu(\chi)) \mathbf{f}(x) d\mu(x)$$

Les fonctions  $\phi$  :et  $\psi$  :  $x \to \int_{\widehat{G}} \chi(x) d\nu(\chi)$  sont donc continues et égales presque partout, donc égales.

Donc  $\phi(x) = \int_{\widehat{G}} \chi(x) d\nu(\chi)$  pour tout x de G

Si, pour une autre mesure  $\,\nu^{\prime}\,$  on avait

$$\phi(x) = \int_{\widehat{G}} \chi(x) dy'(x)$$

on aurait aussi  $\Phi(f) = \int f(x)\overline{\phi}(x)d\mu(x) = \int \int f(x)\overline{\chi}(x)d\mu(x)d\nu'(\chi)$  $= \int \int \int f(x)d\nu'(\chi)$   $= \int f(\chi)d\nu'(\chi)$ 

et, par unicité de v, v = v'.

<u>Définition 6.</u> On appelle groupe à un paramètre fortement continu d'opérateurs unitaires sur un espace de Hilbert H une famille  $(U_t)_{t\in R}$  d'opérateurs unitaires sur H telle que

$$i) \qquad U_{s+t} = U_s \cdot U_t$$

ii) pour tout x de H,  $t \to U_t \cdot x$  est continu de R dans H.

<u>Lemme 7.</u> Un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires vérifie  $U_o = I$  et  $U_{-s} = U_s^*$ .

On a 
$$U_0 \cdot U_0 = U_0$$
, donc  $U_0^* \cdot U_0 \cdot U_0 = U_0^* U_0$  et  $U_0 = I$ .

De plus  $U_s.U_{-s} = U_o = I$ 

Donc 
$$U_{s}^{*} = U_{s}^{*} U_{s} U_{-s} = U_{-s}$$

Théorème 8. (Stone). Si  $(U_t)$  est un groupe à un paramètre fortement continu d'opérateurs unitaires, il existe une résolution de l'identité  $(P_{\lambda})$  telle que, pour tout  $t: U_t = \int e^{it\lambda} dP_{\lambda}$ 

Il résulte immédiatement du théorème 14 du chapitre VIII que, inversement, cette formule définit, quelle que soit la résolution de l'identité  $(P_{\lambda})$  un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires.

Soit  $x \in H$ . La fonction  $\phi_X : t \to < U_t \ x, x > \ \text{est de type positif sur } R :$  en effet, elle est continue puisque le groupe à un paramètre est fortement continu, et si  $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$  sont dans C et  $t_1, \ldots, t_k$  dans R:

$$\Sigma \alpha_{m} \overline{\alpha}_{n} \phi_{x}(t_{m}-t_{n}) = \Sigma \alpha_{m} \overline{\alpha}_{n} < U_{t_{n}}^{*} U_{t_{m}} x, x >$$

$$= \Sigma \alpha_{m} \overline{\alpha}_{n} < U_{t_{m}} x, U_{t_{n}} x >$$

$$= <\Sigma \alpha_{m} U_{t_{m}} x, \Sigma \alpha_{n} U_{t_{n}} x >$$

$$= (|\Sigma \alpha_{m} U_{t_{m}} x||^{2} \in \mathbb{R}^{+}.$$

Il résulte alors du théorème de Bochner-Weil qu'il existe une unique mesure  $\mu_{\chi}$  sur R telle que

$$\phi_{X}(t) = \int e^{it\lambda} d\mu_{X}(\lambda)$$

De plus, puisque  $\phi_{ix} = \phi_{x}$ , on a  $\mu_{ix} = \mu_{x}$ .

Et  $||\mu_{x}|| = \int d\mu_{x} = \phi_{x}(0) = \langle U_{0} | x, x \rangle = ||x||^{2}$ . Enfin, puisque

$$\langle U_{t}(x+y), x+y \rangle + \langle U_{t}(x-y), x-y \rangle = 2 \langle U_{t}, x,x \rangle + 2 \langle U_{t}, y,y \rangle$$

On a 
$$\phi_{x+y} + \phi_{x-y} = 2\phi_x + 2\phi_y$$
, donc  $\mu_{x+y} + \mu_{x-y} = 2\mu_x + 2\mu_y$ 

Si, pour tout  $\lambda$ , il existe un projecteur orthogonal  $P_{\lambda}$  tel que  $< P_{\lambda} x, x > = \mu_{X}(1-\infty,\lambda)$ , la famille  $(P_{\lambda})$  est une résolution de l'identité telle que

$$\mu_{X} = d < P_{\lambda} x, x > ,$$

donc telle que

$$< (\int e^{it\lambda} dP_{\lambda})x,x > = \int e^{it\lambda} d\mu_{x}(\lambda) = \phi_{x}(t)$$
  
=  $< U_{t} x,x >$ 

ce qui entraîne  $U_t = \int e^{i\lambda t} dP_{\lambda}$ .

Puisque la fonction  $q_{\lambda}(x) = \mu_{x}(1-\infty,\lambda)$  vérifie

$$|q_{\lambda}(x)| \le ||x||^2$$

$$q_{\lambda}(ix) = q_{\lambda}(x)$$

$$q_{\lambda}(x+y) + q_{\lambda}(x-y) = 2q_{\lambda}(x) + 2q_{\lambda}(y)$$

il existe un unique opérateur  $P_{\lambda}$  tel que

$$q_{\lambda}(x) = \langle P_{\lambda} x, x \rangle$$

Puisque  $q_{\lambda}$  est à valeurs réelles,  $P_{\lambda}$  est hermitien. Il reste donc uniquement à prouver que  $P_{\lambda}^2 = P_{\lambda}$ .

II existe, pour n entier assez grand, une fonction continue  $g_n$ , périodique de période  $2n\pi$ , égale à 1 sur  $[-n\pi+1,\lambda]$ , à 0 sur  $[\lambda+\frac{1}{n}]$ ,  $n\pi$  et à valeurs dans [0,1]. D'après le théorème de Stone-Weierstrass on peut approcher  $g_n$  à  $\frac{1}{n}$  près uniformément par une fonction  $\psi_n$ , combinaison linéaire des fonctions e pour  $k \in Z$ . Si  $\psi_n(t) = \sum \alpha_k^{(n)} e^{ik\frac{t}{n}}$  et si  $S_n = \sum \alpha_k^{(n)} U_{k/n} \in \mathcal{L}(H)$ , on a pour  $x \in H$ :

$$< (S_n^* - S_p^*)(S_n - S_p) x, x > = \sum c_j < U_{\lambda_j} x, x >$$

$$si \quad (\overline{\psi}_n - \overline{\psi}_p)(\psi_n - \psi_p) = \sum c_j e^{i\lambda_j t}$$

donc 
$$||(S_n - S_p)x||^2 = f|\psi_n - \psi_p|^2 d\mu_x$$
.

Et puisque 
$$|\psi_n - \psi_p| \le 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \le 4$$
 et que

 $\lim_{n,p\to\infty} |\psi_n - \psi_p| = 0 \quad \text{en tout point, car} \quad \psi_n(t) \to 1_{]-\infty,\lambda} \quad \text{(t), le théorème de convergence dominée donne}$ 

$$\lim_{n,p\to\infty} ||(S_n - S_p)x||^2 = 0$$

Il existe donc un A tel que  $Ax = \lim_{n} S_{n}x$ .

Puisque 
$$\leq S_n \times X_n \times Y_n \times$$

$$= \int (\Sigma \alpha_{k}^{(n)} e^{i \frac{kt}{n}}) d\mu_{x}(t) = \int \psi_{n}(t) d\mu(t)$$

converge vers  $\mu_X(]-\infty,\lambda])=\langle P_{\lambda}|x,x\rangle$ , on a  $A=P_{\lambda}$ ; et puisque les  $S_n$  commutent deux à deux, il commutent avec  $A=P_{\lambda}$ .

De même  $\psi_n^2$  tend simplement vers  $1_{J-\infty,\lambda,J}$  et le même raisonnement montre que  $< s_n^2 x, x>$  converge vers  $< P_{\lambda} x, x>$ . On a donc

$$|\langle (S_n^2 - P_{\lambda}^2)x, x \rangle| = |\langle (S_n - P_{\lambda})x, (S_n^* + P_{\lambda})x \rangle|$$
  
 $|\langle (S_n^2 - P_{\lambda}^2)x, x \rangle| = |\langle (S_n - P_{\lambda})x, (S_n^* + P_{\lambda})x \rangle|$   
 $|\langle (S_n^2 - P_{\lambda}^2)x, x \rangle| = |\langle (S_n - P_{\lambda})x, (S_n^* + P_{\lambda})x \rangle|$ 

Puisque  $Ax = P_{\lambda}x = \lim S_n x$ , on a  $||S_n x - P_{\lambda} x|| \to 0$ . Et  $||S_n^* x||^2 = \langle S_n S_n^* x, x \rangle$  qui est égal à  $\int \psi_n(t) \overline{\psi_n(t)} d\mu_x d'$  après le même raisonnement que précédemment. Et puisque  $|\psi_n| \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ , on a  $||S_n^* x|| \leqslant (1 + \frac{1}{n})^2 \int d\mu_x \leqslant 4 ||x||^2$ .

Il en résulte que  $<(P_{\lambda}-P_{\lambda}^2)x, x>=0$ , donc que  $P_{\lambda}^2=P_{\lambda}$ , ce qui prouve que  $P_{\lambda}$  est un projecteur et achève la démonstration.

### Chapitre X

# Opérateurs non bornés

# Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints.

Dans tout ce chapitre, H désignera un espace de Hilbert.

<u>Définition 1.</u> On appelle <u>opérateur</u> sur H un couple A = (V,T) où V est un sousespace vectoriel de H appelé <u>domaine</u> de A et T une application linéaire de Vdans H. On notera  $\widehat{\mathcal{D}}(A)$  le domaine de A, et on notera toujours (abusivement) Ax C image de x par T pour x dans  $\widehat{\mathcal{D}}(A)$ .

<u>Définition 2.</u> Si A et B sont deux opérateurs sur H, on dit que B est une extension de A, et on note  $A \subseteq B$ , si  $\mathcal{Q}(A)$  est contenu dans  $\mathcal{Q}(B)$  et si Bx est égal à Ax pour tout x de  $\mathcal{Q}(A)$ .

Si on identifie un opérateur à son graphe, qui est un sous-espace vectoriel de HxH, B est une extension de A si A est inclus dans B.

Définition 3. Si A et B sont deux opérateurs sur H, et  $\lambda$  un nombre complexe, on appelle  $\underline{\lambda A}$  l'opérateur de domaine  $\widehat{D}(A)$  qui à  $x \in \widehat{D}(A)$  fait correspondre  $\lambda.Ax$ , et  $\underline{A+B}$  l'opérateur de domaine  $\widehat{D}(A) \cap \widehat{D}(B)$  qui à x dans  $\widehat{U}(A+B)$  fait correspondre Ax + Bx.

Il faut faire attention au fait que A + (-A) n'est pas l'opérateur nul, mais une restriction de celui-ci, car son domaine est seulement  $\mathcal{D}(A)$ . Pour cette raison, on peut avoir A+B = A+C sans avoir B = C. Néanmoins, si  $\mathcal{D}(A) = H$ ,

l'égalité A+B = A+C entraîne B = C.

<u>Définition 4.</u> Un opérateur A est dit borné s'il existe une constante m telle que  $||Ax|| \le m. ||x||$  pour tout x de  $\widehat{\mathcal{D}}(A)$ , c'est-à-dire si A est continu sur  $\widehat{\mathcal{D}}(A)$ .

<u>Définition 5.</u> Un opérateur A est dit <u>fermé</u> si son graphe est fermé dans  $H\times H$ , c'est-à-dire si chaque fois qu'une suite  $(x_n)$  dans  $\mathcal{J}(A)$  vérifie  $x_n \to x$  et  $Ax_n \to y$ , on a  $x \in \mathcal{J}(A)$  et y = Ax.

Théorème 6. Un opérateur fermé dont le domaine est H est borné, donc appartient à  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  (H).

C'est une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé (chapitre II, corollaire 3).

On va maintenant définir la notion d'adjoint d'un opérateur à domaine dense de sorte que la formule  $\langle Ax,y \rangle = \langle x,A^*y \rangle$  soit valable chaque fois que  $x \in \mathcal{D}(A)$  et  $y \in \mathcal{D}(A^*)$ , et que si A est dans  $\mathcal{D}(A)$ ,  $A^*$  soit l'adjoint de A au sens usuel. Pour cela, il est nécessaire, quand  $y \in \mathcal{D}(A^*)$ , que  $|\langle Ax,y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||A^*y||$  pour tout x de  $\mathcal{D}(A)$ , donc que la forme linéaire  $x \to \langle Ax,y \rangle$  soit continue sur  $\mathcal{D}(A)$ . Inversement, si  $\mathcal{D}(A)$  est dense et s'il existe une constante m telle que  $|\langle Ax,y \rangle| \leq m \cdot ||x||$  pour tout x de  $\mathcal{D}(A)$ , la forme linéaire  $x \to \langle Ax,y \rangle$  se prolonge en une forme linéaire continue unique sur  $\mathcal{D}(A) = H$ , de norme  $\langle m$ , qui se représente, d'après le théorème de Riesz, par le produit scalaire de x par un vecteur z de H, de norme  $\langle m$ . Et ce vecteur z est unique. On peut donc donner la définition suivante.

<u>Définition 7.</u> Soit A un opérateur sur H à domaine dense. L'<u>adjoint</u> A\* de A est l'opérateur dont le domaine  $\mathcal{D}(A^*)$  est l'ensemble des y de H tels qu'existe un m tel que pour tout x de  $\mathcal{D}(A)$  on ait  $|\langle Ax,y \rangle| \leq m. ||x||$  et tel que

pour y dans  $\mathcal{D}(A^*)$  on ait  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ .

Théorème 8. Soient A et B deux opérateurs à domaine dense et  $\lambda \neq 0$ . Alors  $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$  et si  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$  est dense  $(A+B)^*$  est une extension de  $A^*+B^*$ . En particulier, si  $B \in \mathcal{L}(B)$ ,  $(A+B)^* = A^* + B^*$ .

II est clair que  $x \to \langle \lambda A.x, y \rangle$  est continu sur  $\mathcal{D}(A)$  si et seulement si  $x \to \langle Ax, y \rangle$  est continu sur  $\mathcal{D}(A)$ . Donc  $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(\overline{\lambda}A^*) = \mathcal{D}((\lambda A)^*)$ . Et si  $y \in \mathcal{D}(A^*) < \lambda A.x, y \rangle = \langle x, (\lambda A)^*y \rangle = \langle x, \overline{\lambda}.A^*y \rangle$ . Donc  $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$ .

Si  $y \in \mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{D}(B^*) = \mathcal{D}(A^* + B^*)$ , les fonctions  $x \to Ax, y > et$   $x \to Ax, y > et$ 

$$\mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(A+B)^*), \text{ et on a}$$

$$< (A+B)x,y > = < x,A^*y + B^*y >$$

Donc

$$A^* + B^* \subset (A+B)^*.$$

Si B est dans  $\mathcal{L}(H)$ , la fonction  $x \to \langle Ax,y \rangle + \langle Bx,y \rangle$  est continue sur  $\mathcal{D}(A)$  si et seulement si la fonction  $x \to \langle Ax,y \rangle$  l'est. Donc  $\mathcal{D}((A+B)^*) = \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A^*+B^*)$ . Et puisque  $(A+B)^*$ , extension de  $A^*+B^*$ , a même domaine, ces deux opérateurs coîncident.

Théorème 9. Soit A un opérateur à domaine dense. Alors A est un opérateur fermé.

Soit  $(y_n)$  une suite dans  $\mathcal{D}(A^*)$  telle que  $y_n \to y$  et  $A^*y_n \to z$ . Alors, pour tout x dans  $\mathcal{D}(A)$ , on a

et 
$$< Ax,y_n > + < Ax,y >$$
  
 $< x,A*y_n > + < x,z >$ 

Donc  $\langle Ax,y \rangle = \langle x,z \rangle$ , et  $|\langle Ax,y \rangle| \leq ||x||.||z||$ . D'où  $y \in \mathcal{D}(A^*)$  et  $z = A^*y$ . Ceci montre que  $A^*$  est fermé. Théorème 10. Soit A un opérateur fermé à domaine dense. Alors  $A^*$  est à domaine dense et  $(A^*)^* = A$ .

Si on munit H×H du produit scalaire

$$< (x,y) ; (u,v) > = < x,u > + < y,v >$$

H×H est un espace de Hilbert, et l'opérateur U défini par U(x,y) = (y,-x) est unitaire et vérifie

$$u^2 = -I : u^* = -U$$

Si  $G_A$  et  $G_*$  désignent les graphes de A et  $A^*$ , qui sont des sous-espaces fermés de H×H, on a  $G_* = U(G_A^{\perp})$ . En effet, si  $(u,v) \in G_*$  et  $(x,y) \in G_A$  on a  $v = A^*u$  et y = Ax, donc  $U^{-1}(u,v) = (-v,u)$  et

Inversement, si (-v,u) est orthogonal à  $G_A$ , on a pour tout x de  $\mathcal{D}(A)$ 

$$-< v,x > + < u,Ax > = < (-v,u) ; (x,Ax) > = 0$$

donc  $|\langle Ax, u \rangle| = |\langle x, v \rangle| \leq ||x||.||v||, \text{ d'où } u \in \mathcal{D}(A^*)$ 

et  $v = A^*u$ , c'est-à-dire  $(u,v) \in G_*$ .

Puisque  $G_* = U(G_A^{\perp})$ , on retrouve le théorème précédent qui affirme que  $G_*$  est fermé.

Si  $G_A$  est fermé, on a donc  $G_A = U^*(G_A^*)^{\perp} = U(G_A^{\perp})$ .

Si  $\mathcal{D}(A^*)$  n'était pas dense, il existerait un  $y \neq 0$  orthogonal à  $\mathcal{D}(A^*)$ . Donc (y,0) serait orthogonal à  $G_*$ , et (0,-y) serait dans  $G_A$ , ce qui est impossible puisque  $A.0 = 0 \neq -y$ .

Alors le graphe de l'adjoint de  $A^*$  est  $U(G_A^1) = G_A$ , c'est-à-dire  $A = (A^*)^*$ .

Théorème 11. Soient A un opérateur à domaine dense et B une extension de A. Alors  $\overset{*}{B} \subset \overset{*}{A}$ .

Soit  $y \in \mathcal{D}(B^*)$ . Alors l'application  $x \to \langle Ax, y \rangle$  est continue sur  $\mathcal{D}(B)$ , de même que sa restriction à  $\mathcal{D}(A)$ . Donc  $y \in \mathcal{D}(A^*)$ . De plus, pour  $x \in \mathcal{D}(A)$  et  $y \in \mathcal{D}(B^*)$ 

$$< x,B$$
  $^*y > = < Bx,y > = < Ax,y > = < x,A  $^*y >$$ 

d'où  $A^*y = B^*y$  puisque  $\mathcal{Q}(A)$  est dense.

<u>Définition 12.</u> Soit A un opérateur à domaine dense. On dit que A est <u>symétrique</u> si, pour tout x et tout y de  $\mathcal{Q}(A)$ , on a < Ax, y > = < x, Ay >, c'est-à-dire si  $A \subset A^*$ . On dit que A est <u>auto-adjoint</u> si  $A = A^*$ .

Un opérateur auto-adjoint est symétrique et fermé. Mais il existe des opérateurs symétriques fermés qui ne sont pas auto-adjoints.

Lemme 13. Soit A un opérateur auto-adjoint. Si B est une extension symétrique de A, on a A=B.

Par le théorème 11, on a  $B^* \subset A^*$ . Donc  $A \subset B \subset B^* \subset A^* = A$ , c'est-à-dire A=B.

Théorème 14. Si l'opérateur A est bijectif de  $\mathcal{D}(A)$  sur H, et si  $A^{-1}$  ést dans  $\hat{\mathcal{L}}(H)$ ,  $A - \lambda I$  est fermé pour tout  $\lambda \in C$ .

Si  $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ , le graphe de  $A^{-1}$  est fermé dans H×H. Et puisque le graphe de A est l'ensemble des (x,y) tels que (y,x) appartienne au graphe de  $A^{-1}$ ,

donc est fermé, A est un opérateur fermé.

Si  $(x_n)$  est une suite dans  $\mathcal{D}(A)$  telle que  $x_n \to x$  et  $(A-\lambda I)x_n \to y$ , on a  $Ax_n \to y+\lambda x$ . Donc  $x \in \mathcal{D}(A)$  et  $y+\lambda x = Ax$ , c'est-à-dire  $(A-\lambda I)x=y$ .

<u>Définition 15.</u> Soit A un opérateur fermé sur H. On appelle <u>spectre</u> de A l'ensemble des  $\lambda \in C$  pour lesquels  $A-\lambda I$  n'est pas bijectif de  $\mathfrak{D}(A)$  sur H.

On remarque que si  $\lambda$  n'est pas dans le spectre de A, l'opérateur A- $\lambda$ I est fermé et bijectif de  $\mathcal{Q}$  (A) sur H. Donc  $(A-\lambda I)^{-1}$  est fermé et défini sur H, d'où  $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}$  (H) par le théorème 6.

Théorème 16. Soit A un opérateur fermé. Le spectre de A est fermé dans C.

Soit X le spectre de A. Si X = C, X est fermé. Si X  $\neq$  C, quitte à remplacer A par  $(A - \lambda_0 I)$  et X par  $\{z \in C \mid z + \lambda_0 \in X\}$ , on peut supposer que  $0 \notin X$ . Donc  $B = A^{-1}$  est dans  $\mathcal{L}(H)$ . Alors, pour tout  $\lambda \in C$ ,

$$A - \lambda I = A(I - \lambda B)$$

qui est bijectif de  $\mathcal{Q}(A)$  sur H si et seulement si I -  $\lambda B$  est bijectif de H sur H, c'est-à-dire inversible dans  $\mathcal{L}(H)$  (cf. Chapitre II, corollaire 2).

Donc  $\lambda$  est dans X si et seulement si  $\frac{1}{\lambda}$  est dans le spectre de B. Donc X est fermé dans  $C \setminus \{0\}$ , et puisque le spectre de B est borné,  $0 \notin \overline{X}$ . Donc X est fermé dans C.

Pour un opérateur non borné, le spectre peut ne pas être borné. Il peut aussi être vide.

Théorème 17. Si A est un opérateur auto-adjoint, son spectre est contenu dans R. Soit  $\lambda = \alpha + i\beta \in C \setminus R$ . Alors  $\beta \neq 0$  et

$$A - \lambda I = \beta \left[ \frac{A - \alpha I}{\beta} - i I \right]$$

Puisque A' =  $\frac{A-\alpha I}{\beta}$  vérifie A'\* =  $\frac{A^*-\overline{\alpha I}}{\overline{\beta}}$  = A', il suffit de montrer que (A-iI)<sup>-1</sup> est dans  $\mathcal{L}(H)$  si A est auto-adjoint.

Soit  $x \in \mathcal{\hat{Y}}(A)$ . Alors, puisque A est symétrique

$$||(A-iI)x||^2 = \langle Ax-ix,Ax-ix \rangle = ||Ax||^2 + ||x||^2 - i\langle x,Ax \rangle + i\langle Ax,x \rangle$$
  
=  $||Ax||^2 + ||x||^2 \ge ||x||^2$ 

Donc A - iI est injectif. Si z est adhérent à l'image de A - iI, il existe une suite  $(x_n)$  dans  $\mathcal{D}(A)$  telle que  $z_n = (A - iI)x_n + z$ . Alors on a

$$||z_n - z_p||^2 = ||(A - iI)x_n - (A - iI)x_p||^2 = ||(A - iI)(x_n - x_p)||^2$$

$$= ||A(x_n - x_p)||^2 + ||x_n - x_p||^2$$

Puisque  $z_n \to z$ ,  $\lim_{n \to \infty} ||z_n - z_p|| = 0$ . Donc  $(x_n)$  et  $(Ax_n)$  sont des suites de Cauchy dans G, et convergent vers x et y respectivement.

Puisque A est fermé,  $x \in \mathcal{D}(A)$  et y = Ax. Donc

$$z_n = Ax_n - ix_n \rightarrow y - ix = (A-iI)x = z.$$

Ceci prouve que l'espace image F de A - iI est fermé dans H. Si u appartient à  $F^{\perp}$ , on a pour tout x de  $\mathcal{D}(A)$ 

$$< Ax - ix, u > = 0$$

donc 
$$|\langle Ax, u \rangle| = |i\langle x, u \rangle| \leq ||x||.||u||$$

ce qui montre que  $u \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ , et on a

$$0 = < Ax - ix, u > = < x, Au + iu >$$

Puisque  $\mathcal{D}(A)$  est dense, ceci entraîne que (A + iI) u = 0, et, comme plus haut, puisque  $||(A+iI)u||^2 = ||Au||^2 + ||u||^2$ , que u = 0. Donc  $F^L = \{0\}$ , et F = H.

Il en résulte que A - iI est bijectif de  $\widehat{\mathcal{D}}(A)$  sur H, donc que i n'est pas dans le spectre de A.

Exemple 18. Si H est l'espace de Hilbert  $L^2(R,dx)$  et si A est l'opérateur défini sur  $\mathcal{L}(A) = \{f \in H | ft^2 | f(t)|^2 dt < +\infty\}$  par Af(t) = tf(t), A est autoadjoint.

Si  $g \in \mathcal{D}(A^*)$  et  $h = A^*g$ , on doit avoir pour tout f de  $\mathcal{D}(A)$   $\int tf(t)\overline{g(t)}dt = \int f(t)\overline{h(t)}dt$ 

donc  $tg(t) = h(t) \text{ et } \int t^2 |g(t)|^2 dt = \int |h(t)|^2 dt < +\infty,$   $d'où \qquad g \in \mathcal{D}(A) \text{ et } h = A^*g = Ag.$ 

Exemple 19. Il existe sur  $H = L^2(R^+, dx)$  un opérateur fermé symétrique non auto-adjoint.

Soit G le sous-espace de H×H formé des couples (f,g) tels que pour presque tout  $t \ge 0$  on ait  $f(t) = i \int_0^t g(s) ds$ . On voit aisément que G est fermé, que  $(0,g) \in H$  entraîne g=0, donc que G est le graphe d'un opérateur A fermé sur H.

Si f est nulle en 0, de classe  $C^1$  à support compact,  $g=-i\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$  est dans  $L^2$  et  $(f,g)\in G$ . Donc f est dans  $\mathcal{D}(A)$  et  $Af=-i\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ . Ceci entraîne que  $\mathcal{D}(A)$  est dense dans H.

Par ailleurs, si  $f \in \mathcal{D}(A)$ , on a presque partout

$$|f(t)|^{2} = \left| \int_{0}^{t} g(s) ds \right|^{2} \le \int_{0}^{\infty} |g(s)|^{2} ds \cdot \int_{0}^{t} ds = t \cdot ||g||^{2}$$
et
$$|f(t) - f(u)|^{2} = \left| \int_{u}^{t} g(s) ds \right|^{2} \le \int_{0}^{\infty} |g(s)|^{2} ds \cdot \int_{u}^{t} ds = (t - u) \cdot ||g||^{2}$$

donc f est égale presque partout à une fonction uniformément continue et nulle en 0. Puisque  $f \in L^2$ , on peut en déduire que cette fonction continue tend vers 0 à l'infini.

On a, si 
$$g = Af$$
, pour presque tout  $u$ :
$$\int_{0}^{u} f(t)\overline{g}(t)dt = i \int_{0}^{u} \overline{g}(t) \left( \int_{0}^{t} g(s)ds \right)dt = i \int_{0}^{u} g(s) \left( \int_{s}^{u} \overline{g}(t)dt \right)ds$$

$$= i \int_{0}^{u} g(s) \left( i\overline{f}(u) - i\overline{f}(s) \right)ds$$

$$= i |f(u)|^{2} + \int_{0}^{u} g(s)\overline{f}(s)ds$$

et en faisant tendre u vers +0,

< f,g > - < g,f > = 0, donc < f,g >  $\in$  R, ou encore < f,Af >  $\in$  R. Par polarisation, on en déduit que

< Af<sub>1</sub>,f<sub>2</sub> > = < f<sub>1</sub>,Af<sub>2</sub> > si f<sub>1</sub> et f<sub>2</sub> sont dans  $\mathcal{D}(A)$ , donc que A est symétrique.

Si la partie imaginaire de  $\lambda$  est strictement positive, la fonction  $\psi_\lambda$  :  $t \to e^{i\lambda t}$  est dans H, et on a, pour  $(f,g) \in G$ 

$$<\psi_{\lambda},g> = \int \psi_{\lambda}(t)\overline{g}(t)dt = \int_{0}^{\infty} \overline{g}(t)\int_{t}^{\infty} -i\lambda e^{i\lambda s}ds dt$$

$$= -i\lambda \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda s}ds \int_{0}^{s} \overline{g}(t)dt = \lambda \int_{0}^{\infty} \overline{f}(s)e^{i\lambda s}ds$$

$$= \lambda <\psi_{\lambda},f>$$

Donc, pour  $f \in \mathcal{Q}(A)$ ,  $\langle \psi_{\lambda}, (A-\lambda I)f \rangle = 0$ .

Donc A -  $\lambda I$  n'est pas surjectif, et  $\lambda$  est dans le spectre de A.

Il en résulte que le spectre de A contient le demi-plan  $\{\lambda\mid J \mid \lambda \geq 0\}$ , et que A n'est pas auto-adjoint.

On va maintenant généraliser à des fonctions boréliennes non bornées la notion d'intégrale par rapport à une résolution de l'identité. Soient  $(P_{\lambda})$  une résolution de de l'identité de H, et, pour tout x de H,  $\mu_{\chi}$  la mesure d<  $P_{\lambda}$  x,x >. Soit X le support de  $(P_{\lambda})$ , qui porte toutes les mesures  $\mu_{\chi}$ .

Théorème 20. Soient  $\phi$  une fonction borélienne réelle sur X, et  $(\phi_n)$  une suite de fonctions boréliennes bornées sur X, vérifiant  $|\phi_n| \leq |\phi|$  pour tout n et convergeant simplement vers  $\phi$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes, pour un x de H.

a) 
$$\int |\phi(t)|^2 d\mu_x(t) < +\infty$$

b) 
$$(\int \phi_n(\lambda) dP_{\lambda}).x$$
 converge dans H

c) 
$$(f\phi_n(\lambda)dP_{\lambda}).x$$
 est une suite bornée dans H.

Notons  $T_n = \int \phi_n(\lambda) dP_{\lambda}$ . Alors

$$||T_n x - T_p x||^2 = \langle (T_n - T_p)^* (T_n - T_p) x, x \rangle = \int |\phi_n - \phi_p|^2 d\mu_x$$

Et puisque  $|\phi_n - \phi_p|^2 \le 4|\phi|^2$ , le théorème de convergence dominée et la convergence simple de la suite  $(\phi_n)$  entraînent que a)  $\Rightarrow$  b)

On va évidemment b)  $\Rightarrow$  c). Si la suite  $(T_n x)$  est bornée en norme par M, on a

$$f |\phi_n(t)|^2 d\mu_x = \langle T_n^* T_n | x, x \rangle = ||T_n x||^2 \leq M^2$$

et, par le théorème de Fatou,

Définition 21. Soient  $(P_{\lambda})$  une résolution de l'identité, et  $\phi$  une fonction borélienne réelle sur le support X de  $(P_{\lambda})$ . On définit l'opérateur  $T = \int \phi(\lambda) dP_{\lambda}$  par  $\mathcal{D}(T) = \{x \in H | \int |\phi|^2 d\mu_x < +\infty\}$  et, pour x dans  $\mathcal{D}(T)$ ,  $Tx = \lim(\int \phi_n(\lambda) dP_{\lambda})$ . x pour  $(\phi_n)$  suite de fonctions boréliennes bornées convergeant simplement vers  $\phi$  et majorées en module par  $|\phi|$ .

Il résulte du théorème précédent que Tx existe et est indépendant du choix de la suite  $(\phi_n)$ . On va montrer que l'opérateur T ainsi défini est auto-adjoint et a son spectre dans  $\overline{\phi(X)}$ . Si  $\phi$  est bornée, on obtient  $\mathcal{Q}(T) = H$ , et  $T \in \mathcal{L}(H)$  est défini comme au chapitre VIII.

Lemme 22. Soit  $V_{\varepsilon}$  l'opérateur  $\int (1+\varepsilon i\phi(\lambda))^{-1} dP_{\lambda}$ . Alors, pour  $\varepsilon \neq 0$ ,  $V_{\varepsilon}(H)$  est contenu dans  $\mathcal{D}(T)$ , et  $\lim_{\varepsilon \to 0} V_{\varepsilon} = x$  pour tout x de H

On a  $|1+\epsilon i\phi(\lambda)| \ge 1$  puisque  $\phi(\lambda)$  est réel.

Donc  $|(1+\epsilon i\phi(\lambda))^{-1}| \le 1$ . Et puisque

$$\lim_{\epsilon \to 0} (1 + \epsilon i \phi(\lambda))^{-1} = 1 \text{ pour tout } \lambda$$

il résulte du théorème 14 du chapitre VIII que  $V_{\epsilon}x$  tend vers x quand  $\epsilon \to 0$  pour tout x de H.

Si  $y \in V_{\epsilon}(H)$ , il existe  $x \in H$  tel que  $y = V_{\epsilon}x$ . Pour toute fonction  $f \in C_{\epsilon}(X)$ , on a

$$\begin{split} \text{If}(\lambda) \mathrm{d}\mu_{y}(\lambda) &= \langle \text{If}(\lambda) \mathrm{d}P_{\lambda}.y, y \rangle = \langle \text{If}(\lambda) \mathrm{d}P_{\lambda}.f \frac{\mathrm{d}P_{\lambda}}{1 + \epsilon \mathrm{i} \varphi(\lambda)}.x, f \frac{\mathrm{d}P_{\lambda}}{1 + \epsilon \mathrm{i} \varphi(\lambda)}.x \rangle \\ &= \langle \frac{\mathrm{f}(\lambda)}{|1 + \epsilon \mathrm{i} \varphi(\lambda)|^{2}} \, \mathrm{d}P_{\lambda}.x, x \rangle \\ &= f \frac{\mathrm{f}(\lambda)}{|1 + \epsilon \mathrm{i} \varphi(\lambda)|^{2}} \, \mathrm{d}\mu_{x}(\lambda) \end{split}$$

$$\mu_{y} = \frac{1}{\left|1 + \epsilon i \phi(\lambda)\right|^{2}} \mu_{x}$$

Donc 
$$\int |\phi(\lambda)|^2 d\mu_y(\lambda) = \int \frac{|\phi(\lambda)|^2}{1+\epsilon^2 |\phi(\lambda)|^2} d\mu_x \le \epsilon^{-2} \int d\mu_x = \epsilon^{-2} ||x||^2 < +\infty$$

Donc  $y \in \mathcal{D}(T)$ .

Corollaire 23. Le domaine de T est dense.

Soit  $x \in H$ . Puisque  $V_{\varepsilon}x \in \mathcal{D}(T)$  si  $\varepsilon > 0$ , et que  $x = \lim_{\varepsilon \to 0} V_{\varepsilon}x$ , x est adhérent à  $\mathcal{D}(T)$ .

<u>Lemme 24.</u> L'opérateur TV $_{arepsilon}$  est dans  $\hat{\mathcal{L}}$  (H) et son adjoint est TV $_{-arepsilon}$ .

Puisque  $V_{\varepsilon}(H)$  est contenu dans  $\mathcal{D}(T)$ ,  $TV_{\varepsilon}$  est défini sur H. Si  $(\phi_n)$  est une suite de fonctions boréliennes bornées, majorées par  $|\phi|$  et convergeant vers  $\phi$ , on a, pour tout x de H, puisque  $V_{\varepsilon}x \in \mathcal{D}(T)$ :

$$\begin{split} T(V_{\varepsilon}x) &= \lim(f\phi_{n}(\lambda)dP_{\lambda}).V_{\varepsilon}x \\ &= \lim(f\phi_{n}(\lambda)dP_{\lambda})(f\frac{dP_{\lambda}}{1+\varepsilon i\phi(\lambda)}).x \\ &= \lim(f\frac{\phi_{n}(\lambda)}{1+\varepsilon i\phi(\lambda)}dP_{\lambda}).x \end{split}$$

et puisque  $\left|\frac{\phi_n}{1+\epsilon i\phi}\right| \le \epsilon^{-1}$  et que  $(\frac{\phi_n}{1+\epsilon i\phi})$  converge simplement vers  $\frac{\phi}{1+\epsilon i\phi}$ , on a

$$T(V_{\varepsilon}x) = \int \left(\frac{\phi}{1+\varepsilon i\phi}\right)(\lambda)dP_{\lambda}.x$$

$$TV_{\varepsilon} = \int \frac{\phi}{1+\varepsilon i\phi}(\lambda)dP_{\lambda} \in \mathcal{L}(H) \text{ et}$$

$$\left(TV_{\varepsilon}\right)^{*} = \int \frac{\phi}{1-\varepsilon i\phi}(\lambda)dP_{\lambda} = TV_{-\varepsilon}$$

Lemme 25. L'opérateur à domaine dense T est symétrique.

Soit  $\phi_n$  une suite de fonctions boréliennes bornées et réelles, majorées en valeur absolue par  $|\phi|$  et convergeant vers  $\phi$ . Si  $T_n = \int \phi_n(\lambda) dP_\lambda$ ,  $T_n$  est hermitien.

Si x et y sont dans 
$$\mathcal{D}(T)$$
, on a   
  $< Tx,y > = \lim < T_n x,y > = \lim < x,T_n y > = < x,Ty >$ .

Lemme 26. L'opérateur T est auto-adjoint.

Il suffit de montrer que  $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$ . Soit  $y \in \mathcal{D}(T^*)$ . Il existe m tel que pour tout x de  $\mathcal{D}(T)$ 

$$|< Tx,y>| \le m.||x||$$

on prend  $x = V_{\epsilon} TV_{\epsilon} y$ . Alors  $x \in \mathcal{D}(T)$  et, puisque

$$||V_{-\varepsilon}|| \le \sup_{\lambda \in X} |\frac{1}{1+\varepsilon i\phi(\lambda)}| \le 1, ||x|| \le ||TV_{\varepsilon}y||$$

Donc 
$$\langle \text{Tx,y} \rangle = \langle \text{TV}_{-\varepsilon} \text{TV}_{\varepsilon} \text{y,y} \rangle = \langle \text{TV}_{\varepsilon} \text{y,TV}_{\varepsilon} \text{y} \rangle$$
  
=  $||\text{TV}_{\varepsilon} \text{y}||^2 \leq \text{m.} ||\text{TV}_{\varepsilon} \text{y}||$ 

Il en résulte que ||TV<sub>E</sub>y|| ≤ m, donc que si

$$\phi_{n} = \frac{\phi}{1 + \frac{1}{n} i \phi}$$
,  $|| (f \phi_{n}(\lambda) dP_{\lambda}) \cdot y || = || TV_{1/n} y || \le m$ 

d'où  $y \in \mathcal{D}(T)$  d'après le c) du théorème 20.

Lemme 27. Le spectre de T est contenu dans  $\phi(X)$ .

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \notin \overline{\phi(X)}$ , quitte à remplacer  $\phi$  par  $\phi - \lambda$ , d'où T par  $T - \lambda I$ , on peut supposer  $\lambda = 0$  et  $|\phi| \ge \delta > 0$  sur X. Soit  $S = \int \frac{1}{\phi(\lambda)} dP_{\lambda}$ . L'opérateur S est dans  $a^{(j)}(H)$ , hermitien et de norme au plus  $\delta^{-1}$ .

Si  $(\phi_n)$  est une suite de fonctions boréliennes bornées, majorées en module par  $|\phi|$  et tendant simplement sur X vers  $\phi$ , et si  $T_n = \int \phi_n(\lambda) dP_\lambda$ , on a

$$ST_n = T_n S = \int \frac{\phi_n}{\phi} (\lambda) dP_{\lambda}$$

donc  $ST_nx = T_nSx \rightarrow x$  pour tout x de H. Si  $x \in \mathcal{D}(T)$ ,  $T_nx \rightarrow Tx$  et  $ST_nx \rightarrow STx$ , d'où STx = x. Et pour tout x de H, la suite  $T_n(Sx)$  converge, d'où  $Sx \in \mathcal{D}(T)$  et  $T(Sx) = \lim_n T_n(Sx) = x$ . Donc S est l'inverse de T, et O n'est pas dans le spectre de X.

Si  $\lambda \notin R$ ,  $\lambda$  n'est pas dans le spectre de T puisque T est autoadjoint.

Théorème 28. L'opérateur  $\int \phi(\lambda) dP_{\lambda}$  est auto-adjoint et son spectre est contenu dans  $\overline{\phi(X)}$ .

C'est la conjonction des deux lemmes précédents.

On va maintenant montrer que, inversement, pour tout opérateur auto-adjoint T, il existe une résolution de l'identité  $(P_{\lambda})$ , à support dans le spectre de T, telle que  $T = \int \lambda dP_{\lambda}$ .

Lemme 29. Si T est auto-adjoint, l'opérateur  $U = (T+iI)(\tilde{T}-iI)^{-1}$  est unitaire, et 1 n'est pas valeur propre de U.

On sait que i et -i ne sont pas dans le spectre de T, donc que T+iI et T-iI sont bijectifs de  $\mathcal{D}(T)$  sur H. Donc U est bîjectif de H sur luimême. De plus, pour tout x de  $\mathcal{D}(T)$ , on a montré que  $||(T+iI)x||^2 = ||(T-iI)x||^2 = ||Tx||^2 + ||x||^2$ . Donc  $||Ux||^2 = ||x||^2$ . Et U, qui est isométrique et bijectif est unitaire.

Si x est un vecteur propre de U pour la valeur propre 1, on a Ux = x, c'est-à-dire

$$(T + iI)(T - iI)^{-1}x = x$$

ou, en posant 
$$y = (T - iI)^{-1}x$$
,  
 $Ty + iy = Ty - iy$ 

donc y = 0, et x = Ty - iy = 0.

Lemme 30. Si U est unitaire et n'admet pas 1 pour valeur propre, il existe une résolution de l'identité ( $P_{\lambda}$ ) telle que

$$U = \int \frac{\lambda + i}{\lambda - i} dP_{\lambda}$$

Soit  $\zeta$  la fonction de R dans l'ensemble W des nombres complexes de module 1 définie par  $\zeta(t)=\frac{t+i}{t-i}$ . Notons  $C_{\lambda}=\{\zeta(t)\mid -\infty < t \le \lambda\}$ ,  $e_{\lambda}$  la fonction caractéristique de  $C_{\lambda}$  dans W, et  $P_{\lambda}=e_{\lambda}(U)$  puisque le spectre d'un opérateur unitaire est contenu dans W.

On vérifie aisément que  $(P_{\lambda})$  est une famille croissante de projecteurs, fortement continue à droite, tendant fortement vers 0 en  $-\infty$  et vers  $1_{W-\{1\}}(U)$  en  $+\infty$ . Il suffit de voir que  $1_{\{1\}}(U)$  est nul pour montrer que  $(P_{\lambda})$  est une résolution de l'identité. Mais puisque (z-1)  $1_{\{1\}}(z)=0$ , on a (U-I).  $1_{\{1\}}(U)=0$ . Donc si x est dans l'image du projecteur  $1_{\{1\}}(U)$ , Ux-x=(U-I)  $1_{\{1\}}(U)$ . x=0, et x est vecteur propre de U relativement à 1. Donc x=0.

Soient, pour x dans H, les mesures  $\mu_{X}$  et  $\nu_{X}$  définies par

$$\mu_{x} = d < P_{\lambda} x, x >$$

$$\int_{\mathbb{W}} f(z) d\nu_{x}(z) = \langle f(U).x, x \rangle \quad \text{pour } f \in C(\mathbb{W}).$$

Alors

$$v_{\mathbf{X}}(C_{\lambda}) = fe_{\lambda} dv_{\mathbf{X}} = \langle P_{\lambda} | \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mu_{\mathbf{X}}(J - \infty, \lambda 1)$$
$$= \mu_{\mathbf{X}}(\zeta^{-1}(C_{\lambda}))$$

Il en résulte que  $\nu_{\chi}$  est l'image de la mesure  $\mu_{\chi}$  par  $\zeta$ , et que pour toute fonction borélienne g,

$$fg(z)dv_{x}(z) = fg \circ \zeta(t)d\mu_{x}(t).$$

Donc pour g(z) = z,

$$<$$
 Ux,x  $>$  =  $\int z dv_X(z) = \int \zeta(t) d\mu_X(t) = \langle (\int \zeta(\lambda) dP_{\lambda})x,x \rangle$   

$$U = \int \frac{\lambda + i}{\lambda - i} dP_{\lambda}.$$

D'où

On peut remarquer que si  $\zeta([\lambda,\lambda'])$  est disjoint du spectre de U, on a  $e_{\lambda}(U) = e_{\lambda}(U)$ , donc  $P_{\lambda} = P_{\lambda}$ , et  $[\lambda,\lambda']$  est disjoint du support Y de  $P_{\lambda}$ . D'où  $\zeta^{-1}(Y) \subset \sigma(U)$ . Et on peut voir que, si  $U = (T + iI)(T - iI)^{-1}$ , le spectre de T est  $\zeta^{-1}(\sigma(U))$ , donc contient Y.

Définissons, pour  $\rho$  réel > 1,  $T_{\rho} = i(U+I)(U-\rho I)^{-1}$  qui est dans  $\mathscr{L}(H)$  puisque  $\rho$  n'appartient pas au spectre de U.

Lemme 31. L'opérateur 
$$T_{\rho}$$
 est égal à  $\int \frac{\lambda}{\frac{1+\rho}{2} + i\lambda} \frac{\lambda}{\frac{\rho-1}{2}} dP_{\lambda}$ 

On a 
$$U + I = \int (\frac{\lambda+i}{\lambda-i} + 1) dP_{\lambda} = \int \frac{2\lambda}{\lambda-i} dP_{\lambda}$$

$$U - \rho I = \int (\frac{\lambda+i}{\lambda-i} - \rho) dP_{\lambda} = \int \frac{\lambda+i-\rho\lambda+\rho i}{\lambda-i} dP_{\lambda}$$

Lemme 32. L'opérateur  $S = \int \lambda dP_{\lambda}$  est égal à T.

On a 
$$\left| \frac{1+\rho}{2} + i\lambda \frac{\rho-1}{2} \right| \ge \frac{1+\rho}{2} > 1$$
  
donc  $\left| \frac{\lambda}{\frac{1+\rho}{2} + i\lambda \frac{\rho-1}{2}} \right| \le |\lambda|$ 

et 
$$\lim_{\rho \to 1} \frac{\lambda}{\frac{1+\rho}{2} + i\lambda} = \lambda$$
. Donc  $Sx = \lim_{\rho \to 1} T_{\rho}x$  si  $x \in \mathcal{D}(S)$ 

De plus, on a 
$$U+I = (T+iI)(T-iI)^{-1} + (T-iI)(T-iI)^{-1}$$
  
=  $2T (T-iI)^{-1}$ 

et 
$$U-\rho I = [(T+iI) - \rho (T-iI)](T-iI)^{-1}$$
  
 $(U-\rho I)^{-1} = (T-iI)[(T+iI) - \rho (T-iI)]^{-1}$ 

Donc 
$$T_{\rho} = T \left[ \frac{1+\rho}{2} I + i \frac{\rho-1}{2} T \right]^{-1}$$

Si on pose, pour x dans H et  $\rho > 1$ ,

$$x_0 = (\frac{1+\rho}{2}I + i\frac{\rho-1}{2}T)^{-1}x$$

on a  $T_p x = T(x_p)$ . Puisque T est auto-adjoint,

$$||x||^{2} = ||\frac{1+\rho}{2}x_{p} + i\frac{\rho-1}{2}Tx_{p}||^{2} = (\frac{1+\rho}{2})^{2}||x_{p}||^{2} + (\frac{\rho-1}{2})^{2}||Tx_{p}||^{2}$$

$$||x_{p}|| \le \frac{2}{1+\rho}||x|| \le ||x||.$$

Si 
$$u \in \mathcal{D}(T)$$

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{-}u &= \left(\frac{1+\rho}{2} I + i \frac{\rho-1}{2} T\right)^{-1} \left(u - \frac{1+\rho}{2} u - i \frac{\rho-1}{2} Tu\right) \\ ||u_{\rho}^{-}u|| &\leq \frac{2}{1+\rho} ||u \frac{1-\rho}{2} - i \frac{\rho-1}{2} Tu|| \leq \frac{\rho-1}{\rho+1} \left(||u|| + ||Tu||\right) \end{aligned}$$

 $\rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 1$ 

Et puisque  $\mathcal{D}(T)$  est dense, on a  $||x_p-x|| \to 0$  pour tout x de H. Donc, si  $x \in \mathcal{D}(S)$ , on a  $x_p \to x$  et  $T_p x = T(x_p) \to Sx$ .

Puisque T est fermé, ceci entraîne  $x\in \mathfrak{D}(T)$  et Sx=Tx, donc  $S\subset T$ , d'où S=T puisque S est auto-adjoint et T symétrique.

Théorème 33. Pour tout opérateur auto-adjoint T de spectre X, il existe une résolution de l'identité  $(P_{\chi})$  à support dans X telle que  $T = f \lambda d P_{\chi}$ .

Le théorème résulte des quatre lemmes précédents.

Théorème 34. Soit T un opérateur auto-adjoint sur H. Il existe un espace mesuré  $(\Omega, \int, \mu)$  et une isométrie bijective U de  $L^2(\Omega, \mathcal{J}, \mu)$  sur H ainsi qu'une fonction  $\phi$  réelle mesurable, à valeurs dans le spectre de T tels que  $TU = UM_{\phi}$  où  $M_{\phi}$  est l'opérateur de multiplication par  $\phi$  sur  $L^2(\mu)$ .

L'opérateur  $C = (T+iI)(T-iI)^{-1}$  est unitaire et n'a pas 1 pour valeur propre. Il existe donc un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{P}, \mu)$ , une isométrie bijective U de  $L^2(\mu)$  sur H et une fonction  $\psi$  à valeurs dans le spectre de U, donc de module 1 tels que

$$CU = UM_{\psi}$$

(cf. Chapitre VIII, théorème 6). Alors  $T_{\rho} = i(C+I)(C-\rho I)^{-1}$  vérifie  $T_{\rho} U = UM_{\phi_{\rho}}$ 

si 
$$\phi_{\rho} = i \frac{1+\psi}{\psi-\rho}$$
.

S'il existait un ensemble Z dans  $\Omega$  de mesure > 0 sur lequel  $\psi = 1$ ,  $\text{U1}_Z$  vérifierait  $\text{C(U1}_Z) = \text{U1}_Z$ . Donc  $\psi \neq 1$  presque partout, et quitte à modifier  $\psi$  sur un ensemble négligeable, on peut supposer  $\psi \neq 1$  partout.

Alors, si  $\phi = i \frac{1+\psi}{\psi-1}$ , on a  $|\phi_{\rho}| \leq |\rho|$  et  $\lim_{\rho \to 1} \phi_{\rho} = \phi$ . Puisque  $M_{\phi}$  f converge dans  $L^{2}(\mu)$  si et seulement si  $\phi$ f est dans  $L^{2}(\mu)$  et que sa limite est alors  $\phi$ f, un point  $x \in H$  est dans  $\mathcal{D}(T)$  si et seulement si  $T_{\rho}$  x converge donc si et seulement si  $U^{-1}T\rho = M_{\phi}$   $U^{-1}x$  converge, c'est-à-dire si  $U^{-1}x$  est dans  $\mathcal{D}(M_{\phi})$ . Et si  $x \in \mathcal{D}(T)$ 

$$Tx = \lim_{\rho} T_{\rho} x = \lim_{\phi} U_{\phi}^{-1} x = U_{\phi}^{-1} U_{x}^{-1}$$

d'où TU = UM $_{\phi}$ . On peut voir de plus que  $\phi$  prend ses valeurs dans le spectre de T puisque  $\psi = \frac{\phi + i}{\phi - i}$  prend ses valeurs dans le spectre de C = (T+I)(T-iI) $^{-1}$ .

On considère maintenant un semi-groupe à un paramètre fortement continu de contractions auto-adjointes, c'est-à-dire une famille  $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$  d'opérateurs hermitiens sur H de normes  $\leq 1$  vérifiant

$$T_o = I$$

$$T_{t+s} = T_{t} \cdot T_{s}$$

$$t \to T_{t}x \text{ est continu de } R^{+} \text{ dans } H \text{ pour tout } x.$$

Théorème 35. Il existe une résolution de l'identité (P  $_{\lambda}$ ) à support dans  $^{+}$  telle que, pour tout  $^{+}$ 

$$T_t = \int e^{-t\lambda} dP_{\lambda}$$

De plus, l'opérateur auto-adjoint  $A = -\int \lambda dP_{\lambda}$  est le générateur infinistésimal du semi-groupe, c'est-à-dire vérifie  $\mathcal{D}(A) = \{x \mid \lim_{t \to 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existe}\}$  et  $Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T_t x - x}{t}.$ 

Si on a, pour  $x \in H$ ,  $T_t x = 0$ , on a  $||T_{t/2}x||^2 = \langle T_{t/2}^* T_{t/2}x, x \rangle = \langle T_t x, x \rangle = 0$ , donc  $T_{t/2}x = 0$ , et par récurrence  $T_{t/2}n = 0$ . Mais puisque  $T_{t/2}n = 0$   $x \to T_0$  x = x, on doit avoir x = 0.

Puisque  $T_t = (T_{t/2})^2$  est le carré d'un opérateur hermitien, le spectre de  $T_t$  est contenu dans  $R^{\dagger}$ , et puisque  $||T_t|| \le 1$ , le spectre de  $T_t$  est contenu dans [0,1]. Si  $\psi_{\lambda}$  est la fonction caractéristique de  $[e^{-\lambda},1]$ , l'opérateur  $P_{\lambda} = \psi_{\lambda}(T_1)$  est un projecteur orthogonal, nul si  $\lambda < 0$ . La famille  $(P_{\lambda})$  est continue à droite, et puisque Ker  $T_1 = \{0\}$ ,  $1_{\{0\}}(T_1)$  est nul, donc, pour tout x,  $\lim_{\lambda \to +\infty} P_{\lambda} = 1_{[0,1]}(T_1) \cdot x = x$ . Donc  $(P_{\lambda})$  est une résolution de l'identité, à support dans  $R^{\dagger}$ .

Soient  $x \in H$  et  $\mu_X$  la mesure spectrale sur [0,1] telle que  $f(T_1).x,x > = f(t)d\mu_X(t)$  pour  $f \in C([0,1])$ . Alors, l'opérateur  $T = fe^{-\lambda} dP_{\lambda}$  vérifie

$$\langle Tx, x \rangle = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda} d \langle P_{\lambda} | x, x \rangle = \int_{0 \leq \lambda \leq t < +\infty} e^{-t} d \langle P_{\lambda} | x, x \rangle dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-t} (\int_{0}^{t} d \langle P_{\lambda} | x, x \rangle) dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-t} \langle P_{t} | x, x \rangle dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t} \mu_{x}(|e^{-t}, 1|) dt$$

$$= \int_{s \geq e^{-t}} e^{-t} d\mu_{x}(s) dt = \int_{e^{-t} \leq s} e^{-t} dt d\mu_{x}(s)$$

$$= \int s d\mu_{x}(s) = \langle T_{1} | x, x \rangle$$

$$T_{1} = T = \int e^{-\lambda} dP_{\lambda}.$$

Donc

De plus, pour tout n,  $T_{2^{-n}}$  est la racine carrée hermitienne de  $T_{2^{1-n}}$ , et, puisque  $(fe^{-\lambda t} dP_{\lambda})^2 = fe^{-2\lambda t} dP_{\lambda}$ ,  $fe^{-\lambda 2^{-n}} dP_{\lambda}$  est la racine carrée hermitienne de  $fe^{-\lambda 2^{1-n}} dP_{\lambda}$ . Par récurrence sur n, l'unicité de cette racine carrée montre que  $T_{2^{-n}} = fe^{-\lambda \cdot 2^{-n}} dP_{\lambda}$ . Et pour tout entier  $m \ge 0$  on a

$$T_{m,2}^{-n} = (T_{2}^{-n})^m = (fe^{-\lambda \cdot 2^{-n}} dP_{\lambda})^m = fe^{-m\lambda \cdot 2^{-n}} dP_{\lambda}$$

d'où  $T_t = \int e^{-\lambda t} dP_{\lambda}$  pour tout t de la forme  $m.2^{-n}$ . Et puisque les fonctions  $t \to \langle T_t x, x \rangle$  et  $t \to \langle (\int e^{-\lambda t} dP_{\lambda}).x, x \rangle$  sont continues, elles coîncident. Donc, poue tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $T_t = \int e^{-\lambda t} dP_{\lambda}$ .

Puisque, si t > 0 et  $\lambda \ge 0$ , on a

$$|e^{-\lambda t} - 1| \le \lambda t$$
 et  $\lim_{t\to 0} \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} = -\lambda$ ,

le domaine de  $A = \int (-\lambda) dP_{\lambda}$  est l'ensemble des  $x \in H$  tels que  $\lim_{t \to 0} \left( \int \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} dP_{\lambda} \right) . x$  existe, donc l'ensemble des x tels que  $\frac{T_t - I}{t} x$  converge quand  $t \to 0$  (théorème 20). Enfin, par définition de  $\int (-\lambda) dP_{\lambda}$ , on a

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T_t x - x}{t} \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 36. Si A est un opérateur auto-adjoint à spectre dans R, il existe un semi-groupe fortement continu  $T_t$  de contractions auto-adjointes dont A est le générateur infinitésimal.

Puisque -A est auto-adjoint à spectre dans  $R^+$ , il existe une résolution de l'identité  $(P_{\lambda})$  à support dans  $R^+$  telle que -A =  $f\lambda dP_{\lambda}$ .

Soit  $t \ge 0$ . Si on définit  $T_t = \int e^{-\lambda t} \, dP_\lambda$ ,  $T_t$  est une contraction auto-adjointe. De plus, on a  $T_0 = I$  et  $T_t T_s = T_{t+s}$  pour s et  $t \ge 0$ . Enfin, si  $x \in H$ , la fonction  $t \to T_t x$  est continue sur  $R^t$ . L'argument du théorème précédent montre que  $R^t$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe.

Puisque pour t > 0, la fonction  $\lambda \to \lambda e^{-\lambda t}$  est bornée, on voit que  $T_t(H)$  est contenu dans  $\mathcal{J}(A)$ , donc que, pour tout x de H et s > t

$$\frac{T_s x - T_t x}{s - t} = \frac{T_{s - t} - I}{s - t} \cdot T_t x \Rightarrow AT_t x \quad \text{si} \quad s \Rightarrow t$$

et si s<sub>o</sub> < s < t

$$\frac{T_{s}x-T_{t}x}{s-t} = T_{s-s_{0}} \cdot \frac{T_{t-s}-I}{t-s} T_{s_{0}}x$$

Alors si  $s \to t$ ,  $\frac{T_{t-s}-I}{t-s} \cdot T_{s_0} x \to AT_{s_0} x$  et puisque  $||T_{s-s_0}|| \le 1$  et que  $|T_{s-s_0}| \to T_{t-s_0} y$  pour tout y,

$$\frac{T_{s}x-T_{t}x}{s-t} \rightarrow T_{t-s_{o}} \land T_{s_{o}}x = AT_{t-s_{o}}T_{s_{o}}x = AT_{t}x$$

Donc, pour t > 0, la fonction  $s \to T_S x$  est dérivable et a  $AT_t x$  pour dérivée en t. C'est donc une solution de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = A.y$  sur  $|0,+\infty|$  qui tend vers x en 0.

Exemple 37. Si  $H^2$  est le complété de l'espace  $\mathcal{C}^2_c(R)$  des fonctions de classe  $C^2$  sur R à support compact pour la norme préhilbertienne

 $||f|| = V(|f(t)|^2 + |f''(t)|^2)dt|^{1/2}$ , H<sup>2</sup> s'injecte continuement dans L<sup>2</sup>(R). Et l'application  $\frac{d^2}{dx^2}$ : f  $\rightarrow$  f'' définie sur  $C_c^2(R)$  se prolonge en un opérateur

auto-adjoint sur  $L^2(R)$  à domaine  $H^2$ . Le spectre de cet opérateur est contenu dans R. Il existe donc un semi-groupe de contractions hermitiennes sur  $L^2(R)$  de générateur infinitésimal  $\frac{d^2}{dx^2}$ . Alors, pour toute f de  $L^2$ , la fonction

$$F: (x,t) \rightarrow T_t f(x)$$

vérifie  $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ , et F(x,.) converge (dans  $L^2$ ) vers f quand t tend vers 0.

On peut d'ailleurs montrer que 
$$T_{t}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int f(x+y)e^{-\frac{y^{2}}{4t}} dy.$$

## Chapitre XI

## <u>Transformation de Fourier</u>

Dans tout ce chapitre, on notera G un groupe localement compact commutatif et  $\hat{G}$  le groupe dual, A l'algèbre de convolution  $L^1(G)$  et  $\hat{A}$  l'image de A par la transformation de Gelfand, qui est une sous-algèbre de  $C_0(\hat{G})$  puisque le spectre de A s'identifie à  $\hat{G}$  en faisant correspondre au caractère  $\chi$  de G le caractère de l'algèbre A défini par

$$f \to \hat{f}(\chi) = \int f(x) \overline{\chi(x)} d\mu(x).$$

Par définition, la transformée de Fourier de  $f \in L^1(G) = A$  est la fonction  $\hat{f}$  définie sur  $\hat{G}$  par la formule précédente, qui s'identifie donc à la transformée de Gelfand de f. On va montrer qu'il existe une isométrie bijective de  $L^2(G)$  sur  $L^2(\hat{G})$  qui coîncide sur  $L^1(G) \cap L^2(G)$  avec la transformation de Fourier, et qu'on appellera encore transformation de Fourier. Puis on utilisera la transformation de Fourier pour démontrer le théorème de Pontryagin, qui affirme que le groupe dual de  $\hat{G}$  est isomorphe à G.

Soit J le sous-espace de  $L^1(G)$  formé des fonctions qui sont dans  $L^1(G)$  et dans  $L^2(G)$ .

Lemme 1. L'ensemble J est un idéal de l'algèbre A qui est partout dense dans A. De plus, si f et g sont dans J,  $f^*$  est dans J et  $f_*g$  est dans  $C_o(G)$ .

Il est clair que J est un sous-espace vectoriel de A. Si f est dans

$$\begin{split} L^2(G) & \text{ et } g \in L^1(G) \text{, on a pour toute } h \text{ dans } L^2(G) \\ & \int |h(y)| (f|g(x)|.|f(x^{-1}y)|d\mu(x)d\mu(y) \\ & = f|g(x)|.(f|h(y)|.|f_{\chi}(y)|d\mu(y)d\mu(x) \\ & \leq f|g(x)|.|f|h(y)|^2d\mu(y).f|f_{\chi}(y)|^2d\mu(y) \ 1^{1/2}d\mu(x) \\ & \leq f|g(x)|.|h||_2.||f_{\chi}||_2d\mu(x) = f|g(x)|.||h||_2.||f||_2d\mu(x) \\ & \leq ||g||_1||h||_2.||f||_2 < +\infty \end{split}$$

Donc, pour presque tout y, l'intégrale  $\int |g(x)f(x^{-1}y)|d\mu(x)$  existe, et définit un élément de  $L^2(G)$  de norme au plus  $||g||_1 \cdot ||f||_2$ . Il en résulte que g \* f est défini presque partout, appartient à  $L^2(G)$  et que  $||g*f||_2 \le ||g||_1 \cdot ||f||_2$ . En tout point y où  $\int |g(x)f(x^{-1}y)|d\mu(x) < +\infty$ , on a f \* g(y) = g \* f(y).

Il en résulte que si  $f\in J$  et  $g\in A$ ,  $f*g\in J$ . Puisque J contient les fonctions continues à support compact, J est dense dans A.

De plus, si  $f \in J$ ,  $f^* \in L^1(G)$  et

$$\int |f^{*}(x)|^{2} d\mu(x) = \int |\overline{f}(x^{-1})|^{2} d\mu(x) = \int |f(x^{-1})|^{2} d\mu(x)$$
$$= \int |f(x)|^{2} d\mu(x) < +\infty$$

d'où  $f^* \in J$  et  $||f^*||_2 = ||f||_2$ .

Enfin, si f et g sont dans J,

$$f * g(y) = ff(x)g(x^{-1}y)d\mu(x) = ff(x)g(y^{-1}x)d\mu(x)$$
  
=  $f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x) = ff(x)g(y^{-1}x)d\mu(x)$ 

Et, puisque le même raisonnement qu'au *lemme 10* du chapitre II montre que  $y + g_y$  est continu de G dans  $L^2(G)$  pour  $g \in L^2(G)$ , on obtient que f \* g est continue sur G et que

$$||f*g||_{\infty} = \sup_{y} |f*g(y)| \le ||f||_{2} \cdot ||g||_{2}$$

Si  $(f_n)$  et  $(g_n)$  sont des suites de fonctions continues à support compact qui convergent dans  $L^2(G)$  vers f et g respectivement,  $f_n * g_n$  est à support compact, et  $(f_n * g_n)$  converge uniformément vers f \* g. Donc f \* g est dans  $C_0(G)$ .

Lemme 2. Pour toute  $\varphi$  dans J, il existe une mesure  $\mu_{\varphi}$  positive bornée sur  $\widehat{G}$  telle que, pour  $f \in A$ ,

$$\langle f*\phi, \phi \rangle = \int_{\widehat{G}} \hat{f}(\chi) d\mu_{\phi}(\chi).$$

De plus, si  $\phi$  et  $\psi$  sont dans J, on a

$$|\hat{\phi}|^2 \cdot \mu_{\psi} = |\hat{\psi}|^2 \cdot \mu_{\phi}$$

Si  $\phi \in J$ , pour toute f dans  $L^1(G)$ , f \*  $\phi$  est dans  $L^2(G)$ . Donc f \*  $\phi$  et  $\phi$  sont dans  $L^2(G)$  et on a

$$|\langle f*\phi, \phi \rangle| \leq ||f*\phi||_2 \cdot ||\phi||_2 \leq ||f||_1 \cdot ||\phi||_2^2$$

Ceci montre que la forme linéaire  $L_{\dot{\varphi}}$  : f  $\rightarrow$  < f\* $\phi$ , $\phi$  > est continue sur A. Et puisque

$$L_{\phi}(f) = (f*\phi) * \phi^{*}(0)$$
on a
$$L_{\phi}(f*f^{*}) = (f*\phi) * (f*\phi)^{*}(0) = \langle f*\phi, f*\phi \rangle$$

$$= ||f*\phi||_{2}^{2} \in R^{+}$$

Donc  $L_{\phi}$  est une forme linéaire positive sur l'algèbre hermitienne A, qui possède une unité approchée. Il existe donc une mesure positive bornée  $\mu_{\phi}$  sur le spectre de A, c'est-à-dire  $\hat{G}$ , telle que

$$L_{\phi}(f) = \int \hat{f} d\mu_{\phi}$$
 pour  $f \in A$ 

En particulier, si  $\psi \in J$ , pour  $f = \psi * \psi^* * g$ 

$$L_{\phi}(\psi * \psi^* * g) = \psi * \psi^* * g * \phi * \phi^*(0) = L_{\psi}(\phi * \phi^* * g)$$

donc

$$\int \hat{\psi} \cdot \hat{\psi} \cdot \hat{g} d\mu_{\phi} = \int \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \cdot \hat{g} d\mu_{\psi}$$

c'est-à-dire

$$f|\hat{\psi}|^2.\hat{g} d\mu_{\phi} = f|\hat{\phi}|^2.\hat{g} d\mu_{\psi}$$

et puisque  $\hat{A}$  est dense dans  $C_0(\hat{G})$ , ceci entraîne que les mesures  $|\hat{\psi}|^2.\mu_{\hat{\phi}}$  et  $|\hat{\phi}|^2.\mu_{\hat{\psi}}$  sont égales.

Lemme 3. Il existe une mesure de Haar sur  $\hat{G}$ ,  $\nu$ , telle que, pour  $\phi \in J$ , on ait  $\mu_{\dot{\varphi}} = |\hat{\phi}|^2 \cdot \nu$ .

Soit g une fonction continue à support K compact sur  $\hat{G}$ . Puisque  $\hat{A}$  est dense dans  $C_0(\hat{G})$ , il existe pour tout  $\chi$  de K une  $f \in A$  telle que  $\hat{f}(\chi) \neq 0$ , et par densité de J dans A, une  $\phi \in J$  telle que  $\hat{\phi}(\chi) \neq 0$ . Par compacité, il existe un nombre fini  $(\phi_1, \dots, \phi_m)$  d'éléments de J tels que  $\sum_{i=1}^{m} |\phi_i|^2$  soit non nul au voisinage de K. Alors  $h = \frac{g}{m}$  est continue à support compact et on

pose  $\nu(g) = \sum_{1}^{m} \mu_{\dot{\phi}_{\dot{j}}}(h)$ . Cette quantité est réelle positive si g est réelle positive. Si  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  est un autre système ayant la même propriété et si  $\ell = \frac{g}{n}$ , on a, en posant

$$g_{1} = \frac{g}{\prod_{k=1}^{m} |\hat{\phi}_{j}|^{2} (\sum_{k=1}^{m} |\hat{\psi}_{k}|^{2})}$$

$$h = \sum_{k=1}^{m} |\hat{\psi}_{k}|^{2} \cdot g_{1} \quad \text{et} \quad \ell = \sum_{k=1}^{m} |\hat{\phi}_{j}|^{2} \cdot g_{1}$$

$$\sum_{j,k}^{m} \int \mu_{\phi_{j}}(h) = \sum_{j,k} \mu_{\phi_{j}}(|\hat{\psi}_{k}|)^{2} \cdot g_{1} = \sum_{j,k} \mu_{\psi_{k}}(|\hat{\phi}_{j}|^{2} \cdot g_{1})$$

$$= \sum_{j,k}^{n} \int \mu_{\psi_{k}}(g)$$

Ceci prouve que la quantité  $\nu(g)$  ne dépend que de g et non de la famille  $(\phi_1,\dots,\phi_m)$  choisie.

Puisque  $\nu$  est clairement linéaire, c'est une mesure de Radon sur  $\hat{G}$ . Soit  $\phi \in J$ . Pour toute fonction g continue à support compact contenu dans  $\{\chi \in \hat{G} | \phi(\chi) \neq 0\}$ , on a

$$v(g.|\widehat{\phi}|^2) = \mu_{\widehat{\phi}}.(\frac{g.|\widehat{\phi}|^2}{|\widehat{\phi}|^2}) = \mu_{\widehat{\phi}}(g)$$

Et sur le fermé  $F = \{\chi | \hat{\phi}(\chi) = 0\}$ , la mesure  $\mu_{\dot{\phi}}$  est nulle puisque, pour un  $\psi \in J$  tel que  $\hat{\psi}(\chi_0) \neq 0$ , la relation  $|\hat{\phi}|^2 \mu_{\dot{\psi}} = |\hat{\psi}|^2 \mu_{\dot{\phi}}$  entraîne que  $\mu_{\dot{\phi}}$  est nulle sur F au voisinage de  $\chi_0$ . Donc  $\mu_{\dot{\phi}}$  et  $|\hat{\phi}|^2 \cdot \nu$  coîncident sur F et sur  $\hat{G} \setminus F$ , d'où  $\mu_{\dot{\phi}} = |\hat{\phi}|^2 \cdot \nu$ .

Il reste à montrer l'invariance de  $\,\nu\,$  par translation. Soit  $\,\chi_{_{\hbox{\scriptsize O}}}\in \hat{G}.$  Pour tout f de A, on a

$$(f.\chi_0)^{\wedge}(\chi) = \int f(x)\chi_0(x)\overline{\chi}(x)d\mu(x)$$
$$= \int f(x).(\overline{\chi} \overline{\chi}_0)(x)d\mu(x)$$
$$= (\hat{f})_{\chi_0}(\chi)$$

Puisque la mesure  $\nu$  est caractérisée par la propriété ( $V\phi \in J$   $|\hat{\phi}|^2 \cdot \nu = \mu_{\phi}$ ), il suffit de montrer que la mesure  $\nu'$  translatée de  $\nu$  par  $\chi_{o}$  vérifie encore cette propriété. La mesure  $\nu'$  est définie par

$$v'(g) = v(g_{X_0})$$
 pour g continue à support compact.

Or 
$$|\hat{\phi}|^2 \cdot v'(g) = v((|\hat{\phi}|^2 \cdot g)_{\chi_0}) = v(\hat{\phi}_{\chi_0} \cdot \hat{\phi}_{\chi_0} \cdot g_{\chi_0})$$

$$= v(\hat{\phi}_{\chi_0} \cdot \hat{\phi}_{\chi_0} \cdot g_{\chi_0})$$

$$= |\phi_{\chi_0}|^2 v(g_{\chi_0}) = \mu_{\phi_{\chi_0}}(g_{\chi_0})$$

Il faut montrer que  $\mu_{\varphi\chi_{_{\scriptsize O}}}(g_{\chi_{_{\scriptsize O}}}) = \mu_{\varphi}(g)$  pour toute fonction continue à support compact, ce qui sera vrai si l'égalité a lieu pour toute  $g \in C_{_{\scriptsize O}}(\hat{G})$ , et puisque les  $\mu_{\varphi}$  sont des mesures bornées, il suffit de le vérifier pour  $g \in \hat{A}$ , qui est dense dans  $C_{_{\scriptsize O}}(\hat{G})$ . Or, si  $g = \hat{f}$  avec  $f \in A$ , on a

$$\mu_{\phi\chi_{o}}(g_{\chi_{o}}) = \mu_{\phi\chi_{o}}(f\chi_{o}) = \langle (f\chi_{o}) * (\phi\chi_{o}), \phi\chi_{o} \rangle$$

Or 
$$(f\chi_0) * (\phi\chi_0) = (f * \phi) \cdot \chi_0$$
 et  $\langle f_1 \cdot \chi_0, f_2 \cdot \chi_0 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$ .

Donc on a

$$\mu_{\phi\chi_{_{\boldsymbol{O}}}}(g_{\chi_{_{\boldsymbol{O}}}}) = \langle \mathbf{f} * \phi, \phi \rangle = \mu_{\phi}(\hat{\mathbf{f}}) = \mu_{\phi}(g)$$

Donc 
$$\mu_{\phi \chi_{o}}(g_{\chi_{o}}) = (|\hat{\phi}|^{2}.v')(g) = \mu_{\phi}(g) = (|\hat{\phi}|^{2}.v)(g)$$

pour toute  $\phi \in J$ , ce qui montre que  $\nu = \nu^t$ , donc que  $\nu$  est une mesure de Haar. On supposera désormais  $\hat{G}$  muni de cette mesure de Haar, à laquelle toute autre est proportionnelle. On a donc pour  $f \in A$  et  $\phi \in J$ 

$$\langle \mathbf{f} * \phi, \phi \rangle = \int_{\widehat{G}} \hat{\mathbf{f}}(\xi) |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\nu(\xi)$$

Lemme 4. L'ensemble des  $f * \phi$ , où f et  $\phi$  sont dans J, est dense dans  $L^2(G)$ . Soient  $g \in L^2(G)$  et  $\varepsilon > 0$ . Puisque J est dense dans  $L^2(G)$ , il existe f dans J telle que  $\left|\left|g-f\right|\right|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ . Et puisque la fonction  $x \to f_x$  est continue

de G dans  $L^2(G)$ , il existe un voisinage V de  $\theta$  dans G tel que  $||f_X-f||<\frac{\epsilon}{2}$  pour tout x de V. Si  $\phi$  est une fonction continue réelle positive, à support compact et nulle hors de V, telle que  $\int \phi(x) d\mu(x) = 1$ , on a clairement  $\phi \in J$ . De plus, pour toute  $h \in L^2(G)$  telle que  $||h||_2 \le 1$ , on a

$$\begin{aligned} \forall y \in G & \phi * f(y) - f(y) = \int_{\phi}(x) (f(x^{-1}y) - f(y)) d\mu(x) \\ & = \int_{\phi}(x) (f_{x}(y) - f(y)) d\mu(x) \\ & < \phi * f - f, h > = \int_{\phi}(x) (f_{x}(y) - f(y)) h(y) d\mu(x) d\mu(y) \end{aligned}$$

donc

$$|<\phi * f-f,h>| \le f\phi(x)| < f_x-f,h>|d\mu(x)$$
  
 $\le f\phi(x)||f_x-f||_2d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ 

puisque  $||f_x-f||_2 < \frac{\varepsilon}{2}$  quand  $\phi(x) \neq 0$ .

II en résulte que 
$$||\phi * f-f||_2 = \sup_{||h||_2 \le 1} |\langle \phi * f-f, h \rangle|$$
  
 $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ 

et, par suite,  $||g-\phi * f||_2 < \varepsilon$ .

Théorème 5. Il existe une isométrie linéaire bijective de  $L^2(G)$  sur  $L^2(G)$  qui coîncide sur  $L^1(G) \cap L^2(G)$  avec la transformation de Fourier. Cette isométrie est encore appelée transformation de Fourier.

Si 
$$f = f_1 * \phi$$
, où  $f_1$  et  $\phi$  sont dans J, on a 
$$||f||_2 = \langle f, f \rangle = \langle f_1 * \phi, f_1 * \phi \rangle = \langle f_1 * f_1^* * \phi, \phi \rangle$$

$$= \int \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_1^* \cdot |\hat{\phi}|^2 dv = \int |\hat{f}_1 \cdot \hat{\phi}|^2 dv$$

$$= \int |\hat{f}|^2 dv$$

Cette égalité se prolonge à J par continuité. Et la transformation de Fourier se prolonge en une isométrie linéaire de  $L^2(G)$  sur un sous-espace V complet, donc fermé, de  $L^2(\widehat{G})$ .

Pour voir que  $V = L^2(\hat{G})$ , il suffit de montrer que les fonctions continues à support compact sur  $\hat{G}$  sont adhérentes à V. Soit  $\psi$  une telle fonction. On voit comme plus haut qu'il existe  $(\phi_1,\dots,\phi_m)$  dans J telles que  $\sum\limits_{i=1}^{m} |\hat{\phi}_j|^2 = h > 0$  sur le support de  $\psi$ . Alors  $\psi_1 = \frac{\psi}{h}$  est dans  $C_o(\hat{G})$ , donc adhérente à  $\hat{A}$  en norme uniforme. Il existe donc une suite  $(f_n)$  dans A telle que  $||\psi_1 - \hat{f}_n|| \to 0$ . Alors  $g_n = f_n * (\sum\limits_{i=1}^{m} \phi_i * \phi_i^*)$  est dans J et

$$\begin{split} ||\hat{\mathbf{g}}_{n} - \psi||_{2} &= ||(\hat{\mathbf{f}}_{n} - \psi_{1}) \cdot (\sum_{j=1}^{m} |\hat{\phi}_{j}|^{2})||_{2} \leq ||\hat{\mathbf{f}}_{n} - \psi_{1}|| \cdot ||\mathbf{h}||_{2} \\ &\leq ||\hat{\mathbf{f}}_{n} - \psi_{1}|| \cdot (\sum_{j=1}^{m} ||\phi_{j}| * ||\phi_{j}||^{2}) \rightarrow 0 \end{split}$$

Et puisque  $\hat{g}_n$  est dans V,  $\psi$  est adhérente à V.

Lemme 6. Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux éléments de  $L^2(G)$ , et  $\hat{\phi}_1$  et  $\hat{\phi}_2$  leurs transformées de Fourier. Alors  $\hat{\phi}_1.\hat{\phi}_2$  est dans  $L^1(\hat{G})$  et on a pour tout x de G.

$$\phi_{\mathcal{I}} * \phi_{\mathcal{Z}}(x) = \int_{\widehat{G}} \hat{\phi}_{\mathcal{I}}(\xi) . \hat{\phi}_{\mathcal{Z}}(\xi) \xi(x) dv(\xi)$$

D'après le théorème précédent,  $\hat{\phi}_1$  et  $\hat{\phi}_2$  sont dans  $L^2(G)$ . Donc leur produit est dans  $L^1(\hat{G})$ . De plus, puisque la transformation de Fourier est isométrique, elle conserve le produit scalaire. Donc

$$< \phi_1, \phi_2 > = < \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 >$$

Par ailleurs, 
$$\phi_1 * \phi_2(x) = \int \phi_1(y) \phi_2(y^{-1}x) d\mu(x)$$
$$= \int \phi_1(y) \overline{\phi_2(x^{-1}y)} d\mu(x)$$
$$= \langle \phi_1, (\phi_2^*)_x \rangle$$

Si 
$$\phi \in J$$
, on a  $\phi = \hat{\phi}$  et  $\hat{\phi}_{x}(\xi) = \overline{\xi(x)}\hat{\phi}(\xi)$ .

Ces égalités se conservent par passage à la limite pour tout  $\phi$  de  $L^2(G)$ . On a donc

$$\phi_1 * \phi_2(x) = \langle \phi_1, (\phi_2^*)_x \rangle = \langle \hat{\phi}_1, \overline{\xi(x)} \hat{\phi}_2 \rangle$$

$$= \int \hat{\phi}_1(\xi) \hat{\phi}_2(\xi) \xi(x) dv(\xi)$$

On étudie maintenant le dual  $\hat{G}$  du groupe localement compact  $\hat{G}$ . Pour tout x de G, l'application  $\chi \to \chi(x)$  de  $\hat{G}$  dans U est un homomorphisme continu, donc un élément j(x) de  $\hat{G}$ .

Théorème 7. (Pontryagin). Si j est l'application de G dans  $\hat{G}$  définie par  $j(x)(\chi) = \chi(x)$ , j est un isomorphisme bicontinu de G sur  $\hat{G}$ , et l'application réciproque de la transformation de Fourier de  $L^2(G)$  sur  $L^2(\hat{G})$  est, à une symétrie près, la transformation de Fourier de  $L^2(\hat{G})$  sur  $L^2(\hat{G})$ .

Il est clair que j est un homomorphisme de G dans  $\hat{G}$ . Pour montrer la continuité de j, il suffit de montrer que j est continue en  $\theta$ . Si W est un voisinage de 1 dans  $\hat{G}$ , il existe (par définition de la topologie de  $\hat{G}$ ) un compact K de  $\hat{G}$  et  $\epsilon > 0$  tels que  $\{t|V\chi \in K|t(\chi)-1| < \epsilon\}$  soit inclus dans W. Mais puisque K est équicontinu en  $\theta$ , il existe un voisinage V de  $\theta$  tel que  $Vx \in V$ ,  $V\chi \in K|\chi(x)-1| < \epsilon$ . Donc  $j(V) \subset W$ .

Si f et  $\phi$  sont dans J, f \*  $\phi$  = g est dans J et on a  $\hat{g}$  =  $\hat{f}_*\hat{\phi}_*$ . Donc, d'après le *lemme 6*, pour tout x de G

$$g(x) = \int_{\hat{G}} \hat{g}(\xi) \xi(x) d\nu(\xi)$$
$$= \int_{\hat{G}} \hat{g}(\xi) j(x) (\xi) d\nu(\xi)$$

d'ôù  $g(-x) = \int g(\xi) \overline{j(x)}(\xi) d\nu(\xi)$ 

Alors  $\hat{g}$  est dans  $L^1(\hat{G})$  et la transformée de Fourier de  $\hat{g}$  au point  $\hat{g}$  au point  $\hat{g}$  est g(-x).

On va prouver maintenant l'injectivité de j. Si j n'était pas injectif, il existerait un  $a \in G$ , distinct de  $\theta$ , tel que j(a) = 1, c'est-à-dire tel que  $\chi(a) = 1$  pour tout  $\chi$  de  $\hat{G}$ .

Il existerait alors un voisinage V de  $\theta$  dant G tel que a n'appartienne pas à  $V.V^{-1} = \{x.y^{-1} | x \in V, y \in V\}$ . Si  $\phi$  est un élément non négligeable de J nul hors de V, la fonction  $\phi * \phi^*$  est continue et nulle hors de  $V.V^{-1}$ , donc nulle en a. De plus  $\phi * \phi^*(\theta) = \int_G |\phi(x)|^2 d\mu(x) > 0$ . D'après le *lemme 6*, on a

$$0 = \phi * \phi^*(a) = \int_{\widehat{G}} \phi(\xi) \cdot \overline{\phi(\xi)} \xi(a) d\nu(\xi)$$
$$= \int_{\widehat{G}} \widehat{\phi}(\xi) \overline{\widehat{\phi}(\xi)} d\nu(\xi) = \phi * \phi^*(\theta) \neq 0$$

et cette contradiction prouve l'injectivité de j.

Si X' et Y' désignent les compactifiés d'Alexandroff de G et  $\hat{G}$  et si on prolonge j à X' en posant  $j(\infty) = \infty$ , on va montrer que j est continue en  $\infty$ , c'est-à-dire que j(x).f tend vers 0 quand x tend vers  $\infty$  dans G, pour toute  $f \in L^1(\hat{G})$ .

Soit donc  $f \in L^1(\widehat{G})$ . Si  $g = |f|^{1/2}$  et  $h = \frac{f}{g}$ , on a f = g.h et g et h sont dans  $L^2(\widehat{G})$ . Il existe donc  $\phi_1$  et  $\phi_2$  dans  $L^2(G)$  telles que  $g = \widehat{\phi}_1$  et  $h = \widehat{\phi}_2$ . Par le *lemme 6*, pour tout x de G

$$\phi_1 * \phi_2(x) = \int \hat{\phi}_1(\xi) \hat{\phi}_2(\xi) \xi(x) dv(x)$$

$$= \int f(\xi) j(x)(\xi) dv(\xi)$$

$$= \hat{f} \cdot j(x^{-1})$$

La démonstration du *lemme 1* montre que  $\phi_1 * \phi_2$  est dans  $C_o(G)$ , donc que  $\lim_{x\to\infty} \phi_1 * \phi_2(-x) = 0$ . Donc  $\lim_{x\to\infty} \hat{f}(j(x)) = 0$ .

L'application j est donc un homéomorphisme de X' sur le compact j(X'). Il en résulte que  $j(G) = \hat{G} \cap j(X')$  est fermé dans  $\hat{G}$  et que j est un homéomorphisme de G sur j(G). On identifiera désormais G à un sous-groupe fermé de  $\hat{G}$  au moyen de j.

Montrons maintenant que j est surjectif, c'est-à-dire  $G = \hat{G}$ . S'il existait  $\alpha \in \hat{G} \setminus G$ , il existerait un voisinage V de 1 dans  $\hat{G}$  tel que  $\alpha \notin V.V^{-1}.G$ , et  $\phi$  dans  $L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$  non négligeable nulle hors de V. Alors, si  $\phi_1 = (\phi^*)_{\alpha}$ , la fonction  $\phi_2 = \phi * \phi_1$  est continue, vaut  $\phi * \phi^*(1) = ||\phi||_2^2$  en  $\alpha$  et s'annule hors de  $\alpha.V.V^{-1}$ , donc en particulier sur G.

Il existe donc  $\psi$  et  $\psi_1$  dans  $L^2(\hat{G})$  telles que  $\hat{\psi} = \phi$  et  $\hat{\psi}_1 = \phi_1$ , et f et  $f_1$  dans  $L^2(G)$  telles que  $\hat{f} = \psi$  et  $\hat{f}_1 = \psi_1$ . Pour tout t dans  $\hat{G}$ , on a puisque la transformation de Fourier est isométrique de  $L^2(\hat{G})$  dans  $L^2(\hat{G})$ , donc conserve le produit scalaire,

$$\phi_2(t) = \phi * \phi_1(t) = \langle \phi, (\phi_1^*)_t \rangle = \langle \psi, \overline{\psi}_1, t \rangle = \int \psi(\xi) . \psi_1(\xi) \overline{t}(\xi) d\nu(\xi).$$

Et, par le lemme 6, pour x dans G

$$f * f_1(x) = /\hat{f}(\xi).\hat{f}_1(\xi)\xi(x)d\nu(\xi)$$
$$= /\psi(\xi).\psi_1(\xi)\xi(x)d\nu(\xi)$$

Donc, si t = j(x)

$$0 = \phi_2(t) = \phi * \phi_1(t) = \int \psi(\xi) \psi_1(\xi) \xi(x) d\nu(\xi) = f * f_1(x)$$

Il en résulte que  $f * f_1$  est nulle sur G. Si h est un élément arbitraire de  $L^1(G)$ , on a donc

$$0 = ff * f_1(x)\bar{h}(x)d\mu(x) = \langle f, f_1^* * h \rangle = \langle \psi, \overline{\psi}_1.\hat{h} \rangle$$

d'où

$$/\psi_{\uparrow}(\xi)\psi(\xi)\hat{h}(\xi)dv(\xi) = 0$$

Et puisque  $\hat{A}$  est dense dans  $C_{o}(\hat{G})$ , la mesure  $\psi.\psi_{1}.\nu$  est donc nulle, ce qui entraîne que  $\psi\psi_{1}$  est nul  $\nu$ -presque partout sur  $\hat{G}$ .

Donc

$$0 \neq ||\phi||_2^2 = \phi_2(\alpha) = \int \psi(\xi)\psi_1(\xi)\overline{\alpha}(\xi)d\nu(\xi) = 0$$

et cette contradiction achève de prouver que  $G = \hat{G}$ .

Si f et  $\phi$  sont dans J, f \*  $\phi$  = g est dans J et on a  $\hat{g}$  =  $\hat{f}.\hat{\phi}$ . D'après le *Lemme 6*, on a donc pour tout x de G

$$g(x) = \int_{G} \hat{g}(\xi) \cdot \xi(x) d\nu(\xi)$$

$$= \int_{G} \hat{g}(\xi) \overline{\xi(x^{-1})} d\nu(\xi) = \hat{g}(x^{-1})$$

puisque  $\hat{g}$  est dans  $L^1(\hat{G})$ .

Par continuité, cette égalité reste valable pour g dans  $L^2(G)$  puisque l'ensemble des f \*  $\phi$  est dense dans  $L^2(G)$ . On a donc, pour  $g \in L^2(G)$ , en notant  $g \in L^2(G)$ , en notant  $g \in L^2(G)$ , en notant  $g \in L^2(G)$ ,

Il en résulte que, pour  $h \in L^2(\hat{G})$ , la fonction g de  $L^2(G)$  dont h est la transformée de Fourier est  $(\hat{h})^{\vee}$ ,  $\hat{G}$  étant identifié à G au moyen de j.

Corollaire 8. Si x est différent de l'élément neutre dans G, il existe un caractère  $\chi$  dans  $\hat{G}$  tel que  $\chi(x) \neq 1$ .

Cet énoncé n'est autre que l'injectivité de l'application j de G dans Ĝ.

On considère maintenant un sous-groupe fermé H de G. Alors H est un groupe localement compact commutatif. On munit le groupe quotient G/H de la topologie quotient : si  $\pi$  est la projection canonique de G sur G/H, une partie V de G/H est dite ouverte si  $\pi^{-1}(V)$  est ouvert dans G.

Théorème 9. Le groupe G/H est un groupe localement compact. L'application  $\pi$  est ouverte, et tout compact de G/H est l'image par  $\pi$  d'un compact de G.

Si W est ouvert dans G, on

$$\pi^{-1}(\pi(\mathbb{W})) = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}} \mathbf{x}.\mathbb{W}$$

et puisque x.W est ouvert,  $\pi^{-1}(\pi(W))$  est ouvert dans G. Donc  $\pi(W)$  est ouvert dans G/H.

Si x n'est pas dans H, il existe un voisinage ouvert W de  $\theta$  dans G tel que x.W.W<sup>-1</sup>  $\cap$  H =  $\emptyset$ . Donc  $\pi(xW) \cap \pi(W) = \emptyset$ , et puisque  $\pi(W)$  est ouvert,  $\pi(x)$  et  $\pi(\theta)$  sont séparés par des ouverts disjoints. Donc G/H est séparé.

Si W est un voisinage compact de  $\theta$ ,  $\pi(W)$  est un voisinage compact de  $\pi(\theta)$ . Donc G/H est localement compact.

Enfin, si V est un voisinage de  $\pi(\theta)$ ,  $\pi^{-1}(V)$  est un voisinage de  $\theta$  et il existe un voisinage W de  $\theta$  tel que  $x,y \in W \Rightarrow x.y^{-1} \in \pi^{-1}(V)$ . Donc si  $\pi(x)$  et  $\pi(y)$  appartiement à  $\pi(W)$ ,  $\pi(x).\pi(y)^{-1} \in V$ . Ceci montre que G/H est un groupe topologique.

Et, si K est un compact de G/H, soit W un voisinage ouvert relativement compact de  $\theta$  dans G. Pour tout  $y = \pi(x)$  dans K,  $y.\pi(W) = \pi(x.W)$  est un voisinage de y. Il existe donc un nombre fini de points  $x_1, \ldots, x_m$  de G tels que  $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} \pi(x_i W)$ . Alors  $\bigcup_{i=1}^{m} x_i W = K'$  est compact dans G et on a

## $K \subseteq \pi(K')$

Donc K est 1'image du compact  $K' \cap \pi^{-1}(K)$ .

Théorème 10. Si H est un sous-groupe fermé de G, l'ensemble  $H^{\perp}$  des caractères de G égaux à 1 sur H est un sous-groupe fermé de  $\widehat{G}$ .

La démonstration est claire.

Théorème 11. Si H est un sous-groupe fermé de G, le dual de G/H s'identifie à  $H^{\perp}$ .

Si  $\chi$  est un caractère de G/H,  $\chi \circ \pi$  est un homomorphisme continu de G dans U, donc un caractère de G. De plus  $\chi \circ \pi$  est égal à 1 sur H. On définit ainsi une application  $\Phi$  de (G/H) dans H<sup>L</sup>.

Si  $\Phi(\chi)$  est le caractère 1,  $\chi$  vaut 1 en tout point de G/H. D'où l'injectivité de  $\Phi$ .

Si  $x_0 \in H^L$ , et si x et y dans G vérifient  $\pi(x) = \pi(y)$ , on a  $xy^{-1} \in H$ ,

donc  $\chi_o(xy^{-1}) = \chi_o(x)\chi_o(y)^{-1} = 1$  et  $\chi_o(x) = \chi_o(y)$ . Donc  $\chi_o$  se factorise en  $\chi_o = 0$  où  $\chi$  est un homomorphisme de G/H dans U. Et si  $V_o$  est un ouvert de U,  $\chi^{-1}(V_o) = \pi(\chi^{-1}(V_o))$  donc est un ouvert de G/H, et  $\chi$  est continu, donc appartient à (G/H). D'où la surjectivité de  $\Phi$ .

Enfin, puisque les compacts de G/H sont les images par  $\pi$  des compacts de G,  $\Phi$  est un homéomorphisme.

Théorème 12. Si H est un sous-groupe fermé de G,  $(H^{\perp})^{\perp}$  s'identifie à H quand on identifie  $\hat{G}$  à G.

Si  $a \in H$ , pour tout  $\chi$  de  $H^{\perp}$ , on a  $\chi(a) = 1$ . Donc  $a \in (H^{\perp})^{\perp}$ . Inversement, si  $a \notin H$  et si  $\pi$  est la projection canonique de G sur G/H, on a  $\pi(a) \neq \pi(\theta)$ . En vertu du corollaire 8, il existe  $\chi \in (G/H)^{\perp}$  tel que  $\chi(\pi(a)) \neq 1$ . Donc  $\chi \circ \pi \in H^{\perp}$  et  $\chi \circ \pi(a) \neq 1$ ; d'où  $a \in (H^{\perp})^{\perp}$ .

Théorème 13. Si H est un sous-groupe fermé de G, tout caractère de H se prolonge en un caractère de G.

Si on applique le *théorème 11* au sous-groupe  $H^{\perp}$  du groupe  $\hat{G}$ , on obtient  $(\hat{G}/H^{\perp})^{\hat{}} = (H^{\perp})^{\perp} = H$ . Donc  $\hat{H}$  s'identifie à  $(\hat{G}/H^{\perp})^{\hat{}}$ , donc à  $\hat{G}/H^{\perp}$  par le théorème de Pontryagin.

Et l'application de  $\hat{G}/H^{\perp}$  sur  $\hat{H}$  qui réalise cette identification est l'application qui à une classe de caractères sur G égaux sur H associe la restriction à H. Puisque cette application est surjective, tout élément de  $\hat{H}$  est la restriction d'un élément de  $\hat{G}$ .