Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Feuille 0
Révisions

1 Limite d'une fonction en un point

Exercice 1. En utilisant le langage epsilon-delta,

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ n'est pas 0 (n'existe pas).
3. Soit $E \colon x \mapsto \lfloor x \rfloor$ la *fonction partie entière*. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$.

2 Calculs des limites

la règle de l'Hôpital

Exercice 2.

1. Calculer les limites suivantes
$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}; \qquad b)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}; \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$$
2. Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital
$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}.$$
3. Étudier les limites suivantes
$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}; \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{5x+\sin 3x}{x+\tan 7x}; \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$$

3 Fonctions équivalentes en un point

Soient f et g des fonctions définies sur $\check{B}(a,\delta) :=]a-\delta; a+\delta[- \{a\}$, un *voisinage épointé* d'un point a.

Définition. Les fonctions f et g sont dites *équivalentes* en a, s'il existe $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \delta$ et une fonction u définie sur $\check{B}(a,\varepsilon)$ telles que

— $\forall x \in \check{B}(a,\varepsilon)$, on a $f(x) = u(x)g(x)$;
— $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$.

On note dans ce cas $f \underset{a}{\sim} g$.

Remarque.

1. Si g ne s'annule pas sur $\check{B}(a,\varepsilon)$, on a
$$f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
2. La notion de fonction équivalente n'exige pas que les fonctions aient des limites. Par exemple, soit $f \colon x \mapsto \sin \frac{1}{x}$. On a vu que f n'a pas de limite en 0, mais on a toujours $f \underset{0}{\sim} f$.

Exercice 3.

1. Donner la définition des fonctions équivalentes en $+\infty$ (en $-\infty$).
2. Montrer que $E(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ et que $E(x) \underset{-\infty}{\sim} x$ où E désigne la fonction partie entière.