Université Paris Diderot (Paris VII) | **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I | **L2 MIASHS**

Feuille 1
Fonctions équivalentes; développements limités

Exercice 1. Soient c_1 et c_2 deux réels tels que $f_1 \underset{a}{\sim} c_1 g$ et $f_2 \underset{a}{\sim} c_2 g$.

1. Montrer que si $c_1 + c_2 \neq 0$, alors $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} (c_1 + c_2)g$.
2. Montrer que si $c_1 + c_2 = 0$, alors $f_1 + f_2 = o_a(g)$.

Exercice 2.

1. Montrer que si $\varphi = o_a(f)$ et $f \underset{a}{\sim} g$, alors $\varphi = o_a(g)$.
2. Montrer que $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g = o_a(g)$ (ou $f - g = o_a(f)$).
3. En déduire que si $\varphi = o_a(f)$ et $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f + \varphi \underset{a}{\sim} g$.

Exercice 3. Montrer que si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et si g_1 et g_2 sont de même signe au voisinage de a (strictement positives ou strictement négatives), alors $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.

Exercice 4.

1. Montrer que $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$ et que $x^n = o_{+\infty}(e^x)$ pour tout entier n.
2. Montrer que $\mathrm{sh}(x) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{2}$ et que $\mathrm{ch}(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{2}$ puis que $\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{x}}{2}$.
3. Donner des équivalents en 0 aux fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.

Exercice 5.

1. Montrer que $\ln(x+1) - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ à la fonction $x \mapsto \ln(x^2+1) - 2\ln(x)$.

Exercice 6.

1. Montrer que $\dfrac{\ln(x+1)}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
2. En déduire que $(x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Exercice 7.

1. Déterminer un équivalent dans un voisinage à gauche de $\frac{\pi}{2}$ à la fonction tangente.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ à la fonction $f \colon x \mapsto \tan\left(\dfrac{2\pi x}{4x+3}\right)$.

Exercice 8.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/\sin x}$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \,\mathrm{argch}\left(x \,\mathrm{sh}\frac{1}{x}\right)$.
3. (*) Calculer la limite précédente lorsque $x \to +\infty$ ($\sqrt{3}/3$).
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan(4x)} \ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$.
5. En déduire la limite en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $x \mapsto (\tan x)^{\mathrm{cotan}(4x)}$.

Exercice 9. Trouver les développements limités des fonctions suivantes au point 0 et à l'ordre indiqué

a) $\cos x \sin x$	(ordre 3) ;	b) $e^x \sin x$	(ordre 3) ;	c) $\dfrac{1}{\cos x}$	(ordre 5) ;
d) $\dfrac{1}{1+e^x}$	(ordre 2) ;	e) $\dfrac{\sin x}{x}$	(ordre 5) ;	f) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$	(ordre 2) ;
g) $\left(\cos\left(x+x^2\right)\right)^2$	(ordre 5) ;	h) $\dfrac{\cos x}{1+\tan x}$	(ordre 4) ;	i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}$	(ordre 5) ;
j) $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$	(ordre 5) ;	k) $\sqrt[3]{1-x}$	(ordre 3) ;	l) $\dfrac{\ln(x+1)}{1+x}$	(ordre 3) ;
m) $\cos(\sin(x))$	(ordre 5) ;	n) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin(x)}$	(ordre 3) ;	o) $e^{x-x^2/2+x^3/3}$	(ordre 4).

Exercice 10.

1. Calculer les limites suivantes
$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x\tan x - x^2}; \qquad c)\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$
2. Déterminer les limites suivantes
$$a)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}},\ \text{où } a,b,c>0; \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\cdots(1-\cos^n x)}{\sin^{2n} x}.$$

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $]-1;1[-\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{\cos x}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Exercice 12.

1. Montrer que la fonction $x\mapsto x+\ln(1+x)$ admet au voisinage de zéro une fonction réciproque et en donner un développement limité en 0 à l'ordre 3.
2. Soit f une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0)=0$ et $f'=1+f+f^2$. Calculer un développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice 13.

1. Étudier les branches infinies du graphe de la fonction $x\mapsto f(x)=x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (préciser la position du graphe par rapport à l'asymptote éventuelle).
2. Former le développement asymptotique en $+\infty$, à la précision $\frac{1}{x^3}$, de $x\mapsto x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$.

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer l'inégalité suivante
$$\forall u>0,\ u-\frac{u^2}{2}\le \ln(1+u)\le u.$$
2. Montrer que f est dérivable et en déduire que f est strictement croissante.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f=\ln 2$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f=+\infty$.

Exercice 15.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, l'équation $|x\sin x|=1$ admet une unique solution $x_n\in]n\pi;n\pi+\dfrac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que $x_n=n\pi+\dfrac{1}{n\pi}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand $n\to\infty$.
3. Montrer qu'on peut remplacer $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ par $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.