Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Feuille 2
Suites numériques

Exercice 1. Déterminer si chacun des énoncés suivants est vrai pour deux suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$

1. Si u_n est croissante et convergente, elle est majorée ;
2. Si u_n est majorée et convergente, elle est croissante ;
3. Si u_n est décroissante et positive, elle converge ;
4. Si u_n est croissante et non majorée , elle diverge ;
5. Si u_n et v_n sont divergentes, $u_n v_n$ est divergente ;
6. Si u_n est convergente et v_n divergente, $u_n + v_n$ est divergente ;
7. Si u_n est convergente et v_n divergente, $u_n v_n$ est divergente ;
8. Si u_n tend vers 0, $u_n v_n$ tend vers 0.

Exercice 2. Déterminer les limites des suites suivantes

a) $\dfrac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$; b) $(2+(-1)^n)^{\frac{1}{n}}$; c) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$;

d) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; e) $n^{\frac{1}{n}}$; f) $\dfrac{\sin n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par $u_n \coloneqq 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

1. On pose $v_0 = 1$ et $v_n = \dfrac{1}{2^{n-1}+1}+\dfrac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $v_n \geq \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que $u_{2^n} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et conclure que u_n ne converge pas dans $\mathbf{R}$.

Remarque. On pourrait comparer u_n à une intégrale (voir l'exercice 7).

Exercice 4. On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies par

$$u_n \coloneqq 1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}; \qquad v_n \coloneqq u_n + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

1. Montrer que
   (a) la suite u_n est croissante ;
   (b) la suite v_n est décroissante ;
   (c) pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$;
   (d) $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

   En déduire que les suites u_n et v_n sont convergentes et de même limite, et que cette limite est le nombre réel e.
2. Montrer que pour tout entier $n > 0$ il existe un unique nombre réel θ_n vérifiant $0 < \theta_n < 1$ et tel que
$$e = 1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}. \tag{1}$$
3. Montrer que e est irrationnel (en montrant que la formule (1) n'est pas possible si $e = \dfrac{p}{q}$ pour p et q dans $\mathbf{N}^*$.

Exercice 5 (Moyenne de Cesàro)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite tendant vers l (avec l un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

1. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général, mais est vraie lorsque u_n est monotone.
2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} ku_k$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{l}{2}$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs, telle que la suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Exercice 7. Soit f une fonction continue positive et décroissante sur $]1,+\infty[$.

1. Montrer que
$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx.$$
En déduire la convergence de la suite $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par
$$v_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx.$$
est décroissante et minorée. En déduire la convergence de la suite $w_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

Exercice 8. Soit u_n une suite décroissante positive convergeant vers 0. On pose $v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n$. Soient p et k deux entiers. Montrer que
$$u_p \geq u_p - u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + (-1)^k u_{p+k} \geq 0.$$
En déduire que la suite v_n est de Cauchy.

Exercice 9. Étudier les suites suivantes

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$; b) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$;

c) $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$; d) $u_0 = 1/3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{3}\exp(u_n)$.

Exercice 10. Étudier les suites suivantes

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2$;
2. u_0, u_1 quelconques et $u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n$.

Exercice 11.

1. Étudier les suites u_n et v_n définies par $u_0 > v_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$. Déterminer leur limites.
2. (Moyenne arithmético-géométrique) Étudier les suites u_n et v_n définies par $u_0 > v_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$.
Attention : la détermination de limite n'est pas du tout évidente !