Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Feuille 3
Séries numériques

Exercice 1. Soit α un nombre réel. Pour tout entier strictement positif n, on pose

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}, \quad w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 2. Pour chacune des suites v_n suivantes, déterminer la convergence et si oui calculer sa somme.

a)$v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; b)$v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$; c)$v_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

d)$v_n = \sin\dfrac{\pi}{4n^2-1}\sin\dfrac{2n\pi}{4n^2-1}$; e)$v_n = \dfrac{1}{n+1}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{\ln n}{n}\right)$; f)$v_n = \arctan\dfrac{1}{1+n+n^2}$;

g) $v_n = \dfrac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$; h)$v_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$; i)$v_n = \arctan\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)$.

Exercice 3. Déterminer si chacun des énoncés suivants est vrai pour une série $\sum_n u_n$, où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels strictement positifs.

1. Si la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente.
2. Si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors la série $\sum_n \sqrt{u_n}$ est convergente.
4. Si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors la série $\sum_n u_n^2$ est convergente.
5. Si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors la série $\sum_n \ln(1+u_n)$ est convergente.
6. Si la série $\sum_n u_n$ est convergente et si de plus $u_n < 1$, alors la série $\sum_n \ln(1-u_n)$ est convergente.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors la série $\sum_n v_n$ est convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\prod_{k=1}^n (1-v_k) = \dfrac{u_0}{S_n}$.
3. On suppose que la série $\sum_n v_n$ est convergente.
   (a) Quelle est la nature de la série $\sum_n \ln(1-v_n)$?
   (b) Montrer que la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Exercice 5. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbf{R}_{>0}$, la série de terme général $\dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ converge-t-elle ?

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On pose $v_n = u_n + u_{n+1} + \cdots u_{2n}$.

1. On suppose que $u_n = a^n$, avec $a \in \mathbf{R}_{>0}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ et la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ sont de même nature, et calculer la somme de $\sum_{n\geq 1} v_n$ si elle est convergente.
2. On suppose que $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Montrer que la série $\sum_n v_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 7. Soit u_n une suite positive tell que la série $\sum u_n$ converge. On pose $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 v_n}$. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la série $\sum v_n$ est divergente.

Exercice 8. Étudier, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$, la convergence des séries de terme général

$$a)\frac{1}{n^\alpha}\cos\left(\frac{1}{n}\right); \qquad b)\alpha^{\frac{n+\sqrt{\ln n}}{2}}; \qquad c)\frac{(-\alpha)^n}{\ln n}.$$

Exercice 9. Pour tout entier positif n, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $u'_n = (-1)^n + u_n$ et $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

1. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente.
2. Calculer $u_{2n} + u_{2n+1}$ et $u'_{2n} + u'_{2n+1}$ pour $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, mais la série $\sum u'_n$ est divergente.

Exercice 10. Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et soit σ une application de $\mathbf{N}_{>0}$ dans $\mathbf{N}_{>0}$ définie par

$$\sigma(3n-2) = 2n-1, \quad \sigma(3n-1) = 4n-2, \quad \sigma(3n) = 4n.$$

1. Montrer que σ est une bijection.
2. Comparer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer si la série $\sum v_n$ est convergente.
2. Déterminer si la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 12. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = f''(0) = 1$. Étudier les séries suivantes

$$a)f\left(\frac{1}{n}\right); \qquad b)f\left(\frac{1}{n^2}\right); \qquad c)f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right); \qquad d)f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \text{(ici } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^3\text{)}$$

Exercice 13.

1. Étudier les séries suivantes à termes positifs.

$$1)\frac{1+\ln n}{n^2}; \quad 2)n^{\ln a}(a>0); \quad 3)1-\cos\left(\frac{1}{n}\right); \quad 4)e^{-\sqrt{n}};$$

$$5)\frac{2^n+5}{3^n-11}; \quad 6)\left(\frac{3n}{4n+1}\right)^{2n+1}; \quad 7)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n; \quad 8)\frac{(n!)^3}{(3n)!};$$

$$9)\frac{n^2}{2^n}; \quad 10)\frac{2^n}{n!}; \quad 11)\frac{n!}{n^n}; \quad 12)n^{(n^{-k})}-1(k\in\mathbf{R});$$

$$13)\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}; \quad 14)\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \quad 15)\frac{1!+\cdots+(n-1)!}{n!}; \quad 16)\frac{1!+\cdots+(n-2)!}{n!}.$$

2. Étudier les séries suivantes à termes de signe quelconque.

$$1)\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}; \quad 2)(-1)^n\frac{1+n}{n}; \quad 3)\frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}; \quad 4)\frac{\sin(n\theta)}{2^n};$$

$$5)\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}; \quad 6)\frac{(-1)^n}{n-\ln n}; \quad 7)\frac{(-1)^n}{2n+\cos(n\pi)}; \quad 8)\frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n(n+1)}.$$