Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Feuille 4
Intégrales généralisées

Exercice 1. Pour chacune des intégrales (d'une fonction positive) suivantes, déterminer la convergence et si oui calculer la valeur.

a)$\int_0^{+\infty} 1dt$; b)$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$; c)$\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$; d)$\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$; e)$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$;

f)$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$; g)$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$; h)$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n}dt$; i)$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$; j)$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)}$.

Exercice 2. Étudier les intégrales suivantes.

a)$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\cos(1/t)}}$; b)$\int_0^{+\infty}(t+1)-\sqrt{t^2+2t}dt$; c)$\int_0^{+\infty} t^a e^{-t}dt$; d)$\int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2}dt$; e)$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$;

f)$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\ln t}}}{t}dt$; g)$\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/3}+\sin t}dt$; h)$\int_0^{+\infty} \sin(\sin t)dt$; i)$\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$; j)$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2-t^3}}$;

k)$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln t^\beta}$; l)$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$; m)$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$; n)$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)dt$; o)$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$;

p)$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t+e^t}dt$; q)$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt$; r)$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$; s)$\int_0^{+\infty} \cos(e^t)dt$; t)$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$;

u)$\int_0^1 \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t^2}dt$; v)$\int_1^{+\infty} \sqrt{t+\cos t}-\sqrt{t}dt$; w)$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}dt$.

Exercice 3. Calculer les intégrales $I=\int_0^{\pi/2} \ln\cos t dt$ et $J=\int_0^{\pi/2} \ln\sin t dt$ après avoir montré la convergence.

Exercice 4. Une fonction $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ positive, intégrable sur $\mathbf{R}$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$ est appelée la *densité d'une loi de probabilité*. Pour une *variable aléatoire* X qui suit cette loi, la valeur $\mathbf{E}(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ (si elle existe) est appelée *l'espérance* de X.

1. Soit $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Montrer qu'elle est la densité d'une loi de probabilité : la *loi de Cauchy*.
2. Montrer que la loi de Cauchy n'a pas d'espérance, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ diverge.
3. Pour $\lambda>0$, soit $g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$ Montrer que g est la densité d'une loi de probabilité : la *loi exponentielle* de paramètre λ.
4. Montrer que la loi exponentielle admet une espérance. Calculer sa valeur.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$ qui admet une limite l en $+\infty$ et une limite l' en $-\infty$.

1. Soit $x\geq 0$. Montrer que $\int_0^x (f(t+1)-f(t))dt = \int_x^{x+1} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt$.
2. Montrer que $\int_x^{x+1} f(t)dt$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.
3. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty}(f(t+1)-f(t))dt$ converge et calculer sa valeur.
4. Étudier de même $\int_{-\infty}^0 (f(t+1)-f(t))dt$. En déduire la convergence de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t+1)-f(t))dt$$
et calculer sa valeur.