Feuille 5
Espaces linéaires, matrices et déterminants

Exercice 1. On introduit les vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ et la matrice suivants

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est A.

1. Vérifier que (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Calculer la matrice de passage P de la base canonique vers la base (v_1, v_2, v_3) ainsi que son inverse P^{-1}.
3. En utilisant la formule de changement de base, calculer la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2, v_3).
4. Calculer directement $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ et vérifier le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 2. On introduit les vecteurs dans $\mathbf{R}^5$ et la matrice suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^5$ est A.

1. Vérifier que $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ forment une base de $\mathbf{R}^5$.
2. Soit $F = \langle v_1, v_2 \rangle$ le sous-espace de $\mathbf{R}^5$ engendré par v_1, v_2. De même soit $G = \langle v_3, v_4 \rangle$ et $H = \langle v_5 \rangle$. Montrer que $\mathbf{R}^5 = F \oplus G \oplus H$, puis que les sous-espaces F, G et H sont stables par l'application f (un sous-espace F est dit stable par f si pour tout $x \in F$ on a $f(x) \in F$).
3. Calculer la matrice de passage P de la base canonique vers la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ ainsi que son inverse P^{-1}.
4. En utilisant la formule de changement de base, calculer la matrice A' de f dans la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Comment lit-on sur la matrice A' le fait que F, G et H sont stables ?

Exercice 3. Un système d'équations $AX = B$, où A est une matrice carrée d'ordre n et B est un vecteur colonne, possède une unique solution X si et seulement si A est inversible. Déterminer, selon les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbf{C}$, le nombre de solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & - & 5z & = & -4 \\ 2x & + & y & + & z & = & 5 \\ 4x & + & 3y & + & \alpha z & = & 9\,. \end{array} \right.$$

Exercice 4.

1. Dessiner le parallélogramme engendré dans le plan $\mathbf{R}^2$ par les deux vecteurs $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (1, 3)$. Calculer l'aire de ce parallélogramme.
2. Dessiner le parallélépipède engendré dans l'espace $\mathbf{R}^3$ par les trois vecteurs $v_1 = (2, 0, 2)$, $v_2 = (1, 2, 3)$ et $v_3 = (1, 4, -1)$. Calculer le volume de ce parallélépipède.

Exercice 5. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique.

1. Donner la liste des éléments du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.
2. Soient $\alpha = (143)$, $\beta = (41)$, $\gamma = (23)$, $\delta = (2143) \in \mathfrak{S}_4$. Calculer les produits : $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\delta\beta$.

3. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations suivantes et calculer leurs inverses

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8;$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 3 & 7 & 8 & 2 & 11 & 1 & 12 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12}.$$

4. Calculer l'ordre de τ. Calculer τ^{2015}.
5. Calculer la signature de α, β, γ, δ, σ, τ.

Exercice 6. Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -22 & 22 & -33 \\ 55 & 11 & 44 \\ 33 & -44 & 55 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3+2i & -7+3i \\ -2+5i & 4-i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+i & 2-i & 2 \\ i & 1+2i & 1+i \\ 2+i & 3+i & 3-i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -7 & -9 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & -7 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 17 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 2 \\ 1 & 1-x & -1 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 3 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & x & -4 \\ -x & y & 2x \\ x & 2y & -y \end{vmatrix}$$

Exercice 7. On calcule le déterminant de *Vandermonde*

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pour cela on fixe $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ et on pose $P(x) = D_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$. Montrer que P est un polynôme de degré $n-1$ qui s'annule en $x_1, \ldots, x_{n-1}$ lorsque ces derniers nombres sont distincts. En déduire une expression de $D_n(x_1, \ldots, x_n)$ à l'aide de $D_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ et conclure.

Exercice 8. Soient $a, b, c \in \mathbf{C}$, on définit

$$D_n(a,b,c) \coloneqq \begin{vmatrix} a & b & & & & & \\ c & a & b & & & & \\ & c & a & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & a & b & \\ & & & & c & a & b \\ & & & & & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $D_2(a,b,c)$ et $D_3(a,b,c)$. Par convention on estime que $D_1(a,b,c) = a$.
2. En développant par rapport à la première colonne, montrer la relation de récurrence

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}.$$

3. En déduire un calcul de $D_n(1,1,-1)$.