Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Feuille 6
Diagonalisation et trigonalisation

Exercice 1. Pour les matrices suivantes, calculer leurs polynômes caractéristiques, puis déterminer si elles sont diagonalisables sur $\mathbf{R}$, sur $\mathbf{C}$, et si oui les diagonaliser.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -21 & 0 & 10 \\ -10 & -1 & 5 \\ -50 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 & -7 & -32 \\ -18 & -8 & -36 \\ 10 & 5 & 23 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que

$$4A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Calculer A^n.
3. Déterminer les vecteurs $x \in \mathbf{R}^3$ tels que la suite de vecteurs $(A^n x)_{n \geq 1}$ converge dans $\mathbf{R}^3$. Quelle est la limite de cette suite ?

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier par un calcul direct que $A^3 = -I_2$. En déduire une expression de A^n.
2. Retrouver ce résultat en diagonalisant (sur $\mathbf{C}$) la matrice A.

Exercice 4. Rappelons qu'une matrice carrée est A dite nilpotente, s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que A admet une seule valeur propre $\lambda = 0$ (sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$).
2. En déduire que son polynôme caractéristique est $(-x)^n$.
3. En utilisant le théorème de Cayley–Hamilton, montrer la réciproque : si le polynôme caractéristique d'une matrice A est $(-x)^n$, alors A est nilpotente.
4. Vérifier si les matrices suivantes sont nilpotentes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 5 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -22 & -4 & 12 \\ -9 & -2 & 5 \\ -44 & -8 & 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & -40 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \colon E \to E$ une application linéaire nilpotente non nulle.

1. L'exercice précédent montre que 0 est une valeur propre. En déduire que $\dim E_0 = 1$ ou 2 (E_0 est l'espace propre associé à 0).
2. Supposons que $\dim E_0 = 2$.
   (a) Montrer qu'il existe une base de E sous laquelle la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ & 0 & b \\ & & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b ne soient pas tous nuls.
   (b) Montrer qu'on peut choisir une autre base sous laquelle la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$.
3. Supposons que $\dim E_0 = 1$.

(a) Montrer qu'il existe une base de E sous laquelle la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ et b, c ne soient pas tous nuls.

(b) Montrer qu'on peut choisir une autre base sous laquelle la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & b/a \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Si $b \neq 0$, montrer qu'on peut choisir une troisième base sous laquelle la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

(d) En déduire qu'il existe une base sous laquelle la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Soit maintenant $g \colon E \to E$ une application linéaire dont le polynôme caractéristique est scindé. En considérant une application linéaire nilpotente associée à g, montrer qu'il existe une base de E sous laquelle la matrice associée à g est une des matrices suivantes, où $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

En général, que se passe-t-il si l'on est en dimension n ?

Exercice 6. Soit A la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbf{R}$. Est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$?
2. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$.
3. On cherche à calculer les puissances T^n pour tout nombre entier $n \geq 0$.
   (a) Montrer que T peut s'écrire sous la forme $T = \lambda(\mathrm{Id} + N)$, où λ est un réel et N est une matrice vérifiant $N^2 = 0$.
   (b) On rappelle que la formule du binôme
   $$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$
   est valide pour deux matrices carrées et de même taille A et B qui *commutent*, c'est-à-dire qui vérifient $AB = BA$. En déduire une expression de T^n pour tout entier $n \geq 0$.
4. En déduire une expression de A^n pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 7. Pour les matrices suivantes, calculer leurs n-ième puissances.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ & -2 & 2 \\ & & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$