Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Feuille 7
Réduction de matrice; applications

Exercice 1. Trigonaliser les matrices suivantes en blocs de Jordan (jordanisation)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $E_n = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$. C'est un espace vectoriel réel de dimension $n+1$. On a la base canonique $\{1, X, \ldots, X^n\}$.

1. Soit $d\colon P \mapsto P'$ l'application de la dérivée. Montrer que c'est une application linéaire et nilpotente. Déterminer sa matrice sous la base canonique.
2. Soit $f\colon P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$. Montrer que c'est une application linéaire et nilpotente. Déterminer sa matrice sous la base canonique.
3. Pour $n = 3$, trouver une base de E_3 sous laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $g\colon P(X) \mapsto (X^2-1)P''(X) + (2X+1)P'(X)$. Montrer que c'est une application linéaire de E_n dans E_n. Déterminer sa matrice sous la base canonique, puis étudier cette matrice : est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. Soit $a \in \mathbf{R}$. On étudie de nouveau la suite (u_n) récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que l'on a la relation
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$
Pour déterminer u_n il suffit donc de calculer A^n.
2. Montrer que A est toujours trigonalisable sur $\mathbf{R}$, et diagonalisable sur $\mathbf{R}$ si $a \neq 1$.
3. En supposant $a \neq 1$, diagonaliser A, puis calculer A^n.
4. Pour $a = 1$, on a deux méthodes pour calculer A^n.
   (a) *Calcul direct.* Trigonaliser A, puis calculer A^n.
   (b) *Argument de continuité.* Montrer que la matrice A^n, vue comme fonction de a, est continue, puis déterminer A^n en utilisant le résultat pour $a \neq 1$.
5. Que se passe-t-il si la suite est définie par une équation dont les deux racines sont complexes ?

Exercice 4.

1. Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes avec la condition initiale $x(0) = x_0$
$$x'(t) = \lambda x(t), \quad x'(t) = \lambda x(t) + a \cdot e^{\lambda t}, \quad x'(t) = \lambda x(t) + a \cdot e^{\lambda t} + b \cdot te^{\lambda t}.$$
2. Résoudre les systèmes différentiels suivants en utilisant la réduction de matrice, avec les conditions initiales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et $z(0) = z_0$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 4x - 2y - z \\ y' & = & x + y - z \\ z' & = & 2x - 2y + z \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + y + z \\ y' & = & 2y + 2z \\ z' & = & x - y + 3z \end{array} \right..$$