Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Contrôle 1 : Corrigé
Développements limités; suites numériques

Exercice 1. (6 pts) Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right).$$

Solution. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &= \frac{x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)x} \\ &= \frac{\cancel{x} - (\cancel{x} - x^2/2 + o(x^2))}{x^2} \frac{x}{\ln(1+x)}. \end{aligned}$$

En tendant $x \to 0$, la limite est

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.

1. (4 pts) Montrer que la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ converge vers 0.
2. (4 pts) Plus généralement, déterminer pour quelle valeur de $a \in \mathbf{R}$, la suite $u_n = (n+1)^a - n^a$ est convergente.

Solution.

1. On a
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$
2. On a
$$\begin{aligned} (n+1)^a - n^a &= n^a \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a - 1 \right) \\ &= n^a \left(\cancel{1} + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1} \right) \\ &= a \cdot n^{a-1} + o(n^{a-1}). \end{aligned}$$
Si $a > 1$, la suite u_n est équivalente à une puissance positive de n, donc diverge vers $+\infty$;
Si $a = 1$, $(n+1)^1 - n^1 = 1$ est la constante 1, donc u_n converge vers 1 ;
Si $a < 1$, la suite u_n est équivalente à une puissance négative de n, donc converge vers 0.

Exercice 3. Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{2+x^2}$.

1. (4 pts) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.
2. (4 pts) Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbf{R}$, (u_n) est convergente. Déterminer la limite.

Solution.

1. On a
$$\begin{aligned} \frac{x}{2+x^2} &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2/2} \\ &= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{8} + o(x^5). \end{aligned}$$

2. Si $u_0 = 0$, alors u_n est identiquement 0.
   On suppose maintenant $u_0 > 0$, alors on peut voir par récurrence que

$$0 < u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{2 + u_n^2} < u_n.$$

   La suite (u_n) est une suite décroissante et positive. Elle est donc convergente, et la limite est la seule solution réelle de l'équation $x = f(x)$, qui est 0.
   Pour $u_0 < 0$, on peut utiliser le même raisonnement pour montrer que (u_n) est une suite croissante et négative, avec limite 0.
   Solution alternative. On calcule le dérivé de f

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2 + x^2) - x \cdot 2x}{(2 + x^2)^2} = \frac{2 - x^2}{(2 + x^2)^2}.$$

   On remarque que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ (plus précisément, $|f(x)|$ est bornée par $\frac{\sqrt{2}}{4}$). Notons I l'intervalle $[-1, 1]$. Pour tout $x \in I$ on a

$$0 < f'(x) \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

   Donc I est un intervalle stable pour la fonction f. Par le théorème de point fixe, la suite u_n converge vers l'unique point fixe de la fonction f sur I. Pour déterminer cette limite, on regarde l'équation

$$x = f(x) = \frac{x}{2 + x^2}.$$

   Il existe une seule solution réelle $x = 0$. Donc la suite u_n tend vers 0.