Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Contrôle 2 : Corrigé
Déterminant; groupe symétrique; réduction de matrice

Exercice 1. (4 pts) Calculer le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solution. On peut soit éliminer tous les coefficients dans un colonne (ou une ligne) sauf un, en appliquant les trois opérations élémentaires

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_1-2L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \cdot (0 + (-2) + (-2) - 0 - 3 - (-1)) = 6\ ;$$

soit faire un calcul direct

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0$$
$$= 2 \cdot (0 + 1 + 2 - 0 - 0 - 1) - 1 \cdot (0 + 0 + 2 - 0 - 1 - 3) = 4 - (-2) = 6\ .$$

Exercice 2. (4 pts) Considérons le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Calculer le produit suivant et déterminer sa signature

$$(134) \cdot (23).$$

Solution. Le produit de deux cycles est donné par la composition

$$\tau \cdot \sigma \coloneqq \tau \circ \sigma.$$

⚠Par cette convention, on procède de droite à gauche. On a

$$1 \overset{\sigma}{\mapsto} 1 \overset{\tau}{\mapsto} 3$$
$$3 \overset{\sigma}{\mapsto} 2 \overset{\tau}{\mapsto} 2$$
$$2 \overset{\sigma}{\mapsto} 3 \overset{\tau}{\mapsto} 4$$
$$4 \overset{\sigma}{\mapsto} 4 \overset{\tau}{\mapsto} 1$$

Le produit est donc le cycle (1324). Comme c'est un cycle de longueur 4, sa signature est $(-1)^{4-1} = -1$ (ou bien, on a $\mathrm{sgn}(134) = (-1)^2 = 1$ et $\mathrm{sgn}(23) = -1$. Comme la signature est mulplicative, la signature du produit est égale au produit des signatures, i.e. -1).

Exercice 3. Soit A la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. (2 pts) Diagonaliser A en trouvant une base en vecteurs propres. Quelle est la matrice de passage P de la base canonique à cette base ?
3. (2 pts) Calculer la matrice inverse de P.
4. (2 pts) Donner une expression explicite pour A^n.

Solution.

1. Le polynôme caractéristique de A est le suivant

$$\begin{aligned}\chi_A(X) = \det(A - X \cdot \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ 0 & 3-X & 0 \\ -1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X) \cdot \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 0 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(1-X)(3-X) \ .\end{aligned}$$

2. On a $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$, chacune est de multiplicité 1. La matrice est donc diagonalisable. Pour trouver les vecteurs propres, on regard les équations suivantes

$$E_1 = \{x \mid (A - 1 \cdot \mathrm{Id})x = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

$$E_2 = \{x \mid (A - 2 \cdot \mathrm{Id})x = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 \text{ quelconque} \end{array}$$

$$E_3 = \{x \mid (A - 3 \cdot \mathrm{Id})x = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3$$

On peut donc prendre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P de la base canonique à cette base est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On écrit P et Id ensemble.

$$(P \mid \mathrm{Id}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On fait les trois opérations élémentaires pour les lignes et on obtient

$$(\mathrm{Id} \mid P^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Donc on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. La formule pour changement de base nous donne

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1},$$

où D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} A^n &= (P \cdot D \cdot P^{-1})^n \\ &= (P \cdot D \cdot \cancel{P^{-1}})(\cancel{P} \cdot D \cdot \cancel{P^{-1}}) \dots (\cancel{P} \cdot D \cdot P^{-1}) \\ &= P \cdot D^n \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 1 - 2^n & 3^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit A la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. (2 pts) La matrice A est-elle diagonalisable ?

*3. (3 pts) Trigonaliser (jordaniser) A en bien choisissant une base.

Solution.

1. Le polynôme caractéristique de A est le suivant

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(A - X \cdot \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(1-X)(3-X) + 1 + 0 - (X-1) - 0 - 0 \\ &= (2-X)(1-X)(3-X) + (2-X) \\ &= (2-X)((1-X)(3-X)+1) \\ &= (2-X)(X^2 - 4X + 4) \\ &= (2-X)^3 . \end{aligned}$$

2. On a $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$, avec la multiplicité $m(2) = 3$. Si A était diagonalisable, il existe une base sous laquelle A a pour matrice $\mathrm{Diag}(2,2,2) = 2\,\mathrm{Id}$, c'est-à-dire il existe une matrice de passage P telle que $A = P \cdot 2\,\mathrm{Id} \cdot P^{-1} = 2\,\mathrm{Id}$. Mais on voit clairement que $A \neq 2\,\mathrm{Id}$. Donc A n'est pas diagonalisable.
On peut soit calculer l'espace E_2

$$E_2 = \{x \mid (A - 2 \cdot \mathrm{Id})x = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 \ .$$

Donc E_2 est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $\dim E_2 = 1 < m(2) = 3$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

3. On a trouvé que $\dim E_2 = 1$, on cherche donc un bloc de Jordan de type

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire on cherche une base v_1, v_2, v_3 telle que

$$\begin{aligned} Av_1 &= 2v_1 \\ Av_2 &= 2v_2 + v_1 \\ Av_3 &= 2v_3 + v_2 \,. \end{aligned}$$

La première équation signifie que $v_1 \in E_2$, on prend donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puis on cherche v_2 satisfaisant

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut prendre par exemple $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ensuite pour v_3, il faut

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut prendre par exemple $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi on a trouvé la base qui jordanise A.