Université Paris Diderot (Paris VII) **2018-2019**
MA3 - Algèbre et analyse fondamentales I **L2 MIASHS**

Partiel : Corrigé

Exercice 1.

1. (1 pt) Donner la définition d'une suite de Cauchy.
2. (1 pt) Démontrer que, dans $\mathbf{R}$, toute suite de Cauchy est bornée.
3. (1 pt) Démontrer que, dans $\mathbf{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.

Solution.

1. Une suite (u_n) est dite de Cauchy, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ assez grand, tel que pour $p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$.
2. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$. Selon la définition, si l'on pose $\varepsilon = 1$, alors il existe $N \in \mathbf{N}$ assez grand, tel que pour $p \geq N$ et $q = N$, on a $|u_p - u_N| < 1$. Cela entraîne que
$$|u_p| < |u_N| + 1 \text{ pour tout } p \geq N.$$
Il suffit de prendre
$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\},$$
et $|u_p| \leq M$ est maintenant valable pour tout $p \in \mathbf{N}$. Donc toute suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$ est bornée.
3. On utilise le fait que toute suite bornée dans $\mathbf{R}$ admet une valeur d'adhérence. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$. D'après la question précédente, elle est bornée, donc elle admet une valeur d'adhérence l : c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $n \geq N$, tel que $|u_n - l| < \varepsilon$. On prétend que l est en fait une limite pour la suite (u_n) : pour tout $\varepsilon > 0$, comme (u_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbf{N}$, tel que pour $p, q \geq N$, on a $|u_p - u_q| < \varepsilon/2$. Comme l est une valeur d'adhérence, il existe $n \geq N$, tel que $|u_n - l| < \varepsilon/2$. Donc si l'on pose $q = n$, alors pour tout $p \geq N$,
$$|u_p - l| \leq |u_p - u_n| + |u_n - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$
ce qui montre que l est effectivement la limite de la suite (u_n). Donc toute suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$ est convergente.

Exercice 2. Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. (1,5 pts) Donner le développement limité de la fonction $\arctan x$ à l'ordre 5 en 0 (on pourra utiliser le fait que $\arctan x$ est la primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$).
2. (1 pt) Donner le domaine de définition de la fonction g dans $\mathbf{R}$.
3. (1,5 pts) Montrer que la fonction g se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
4. (2 pts) Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de la foction g, et la position de ce graphe par rapport à la tangente.

Solution.

1. Le développement limité de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est
$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + o(t^4).$$
On peut calculer son intégrale et on obtient
$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

2. Clairement la fonction g n'est pas définie si $(\sin x)^3 = 0$ ou $x^2 = 0$, c'est-à-dire si $x = k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Donc le domaine de définition de g est $\mathbf{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.
3. On calcule le développement limité de la fonction g à l'ordre 1 en 0. On a

$$\arctan x = x - x^3/3 + o(x^4) \quad \text{et} \quad \sin x = x - x^3/6 + o(x^4).$$

Alors

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x - \ x^3/3 + o(x^4)}{(x - x^3/6 + o(x^4))^3} - \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{x(1 - x^2/3 + o(x^3))}{x^3(1 - x^2/6 + o(x^3))^3} - \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1 - x^2/3 + o(x^3)}{1 - 3 \cdot x^2/6 + o(x^3)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{(1 - x^2/3) - (1 - x^2/2) + o(x^3)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{x^2/6 + o(x^3)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} \\
&= \frac{1/6 + o(x)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} \\
&= (1/6 + o(x))(1 + x^2/2 + o(x^3)) \\
&= 1/6 + o(x)\ .
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a $g(x) = 1/6 + 0 \cdot x + o(x)$. Donc on peut mettre $g(0) = 1/6$: ainsi g sera une fonction continue en 0 avec dérivée $g'(0) = 0$.
4. Par la question précédente, il est clair que la tangente en 0 au graphe de g a pour l'équation

$$y = 1/6 = 1/6 + 0 \cdot x.$$

C'est une droite horizontale. Pour voir la position du graphe par rapport à la droite 1/6, on regarde la valeur $g(x) - 1/6$:

$$\begin{aligned}
g(x) - 1/6 &= \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{6x^2 \arctan x - (6 + x^2)(\sin x)^3}{6x^2(\sin x)^3} \\
&= \frac{1}{6x^2(\sin x)^3}\left(6x^2\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) - (6 + x^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^3\right) \\
&= \frac{1}{6x^2(\sin x)^3}\left(6x^3 - 2x^5 + \frac{6}{5}x^7 + o(x^7) - (6 + x^2)\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 + o(x^7)\right)\right) \\
&= \frac{1}{6x^2(\sin x)^3}\left(\frac{21}{20}x^7 + o(x^7)\right) \\
&= \frac{7}{40}\frac{x^5 + o(x^5)}{(\sin x)^3}
\end{aligned}$$

Comme $\sin x \sim x$ en 0, on obtient $g(x) - 1/6 \sim \dfrac{7}{40}x^2$ en 0, qui est une fonction positive. Donc le graphe de g est au-dessus de la tangente au voisinage de 0.

Exercice 3. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos n}{n^a + \cos n}$ où a est un paramètre réel.

1. (1,5 pts) Si $a > 1$, montrer que la série converge absolument.

2. (1,5 pts) Si $1 \geq a > 1/2$, montrer que la série converge (indication : on pourra utiliser un développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$).
3. (a) (1 pt) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, il existe un entier n_k tel que

$$(8k-1)\pi/4 \leq n_k \leq (8k+1)\pi/4.$$

(On pourra considérer la longueur de l'intervalle $[(8k-1)\pi/4, (8k+1)\pi/4]$.)

(b) (1 pt) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ qui minore la suite $(\cos n_k)_{k \in \mathbf{N}}$.

(c) (2 pts) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \dfrac{\cos^2 n_k}{n_k}$ diverge, puis que la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\cos^2 n}{n}$ diverge.

(d) (1 pt) Si $a = 1/2$, montrer que la série de terme général u_n diverge.

Solution.

1. La fonction $\cos x$ est toujours bornée par -1 et 1. On a donc une majoration

$$|u_n| = \left| \frac{\cos n}{n^a + \cos n} \right| \leq \frac{1}{n^a - 1}.$$

Lorsque $a < 1$, le terme $\dfrac{1}{n^a - 1}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n^a}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. D'après le théorème de comparaison, la série $|u_n|$ est convergente, c'est-à-dire que la série u_n est absolument convergente.

2. On écrit

$$u_n = \frac{\cos n}{n^a + \cos n} = \frac{\cos n}{n^a} \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n^a}}.$$

Lorsque $n \to \infty$, le terme $\dfrac{\cos n}{n^a} \to 0$. On peut donc appliquer le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ en 0 :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\cos n}{n^a} \left(1 - \frac{\cos n}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a} \right) \right) \\ &= \frac{\cos n}{n^a} - \frac{\cos^2 n}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}} \right) . \end{aligned}$$

Le premier terme $\dfrac{\cos n}{n^a}$ donne une série convergente d'après le critère de Dirichlet. Le reste est majoré par le terme $\dfrac{1}{n^{2a}}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente lorsque $a > 1/2$. On conclut que la série u_n est convergente.

3. (a) Clairement, la longueur de l'intervalle $[(8k-1)\pi/4, (8k+1)\pi/4]$ est $(8k+1)\pi/4 - (8k-1)\pi/4 = \pi/2 > 1$. Pour un intervalle de longueur supérieure à 1, il existe forcément au moins un nombre entier dedans. On peut donc en prendre un et le nommer n_k.

(b) Comme les n_k sont choisis tels que n_k soit dans l'intervalle $[(8k-1)\pi/4, (8k+1)\pi/4]$, on a

$$n_k - 2k\pi \in [-\pi/4, \pi/4].$$

Sur l'intervalle $[-\pi/4, \pi/4]$, la fonction $\cos x$ est minorée par $\sqrt{2}/2$. On a alors

$$\cos n_k = \cos(n_k - 2k\pi) \geq \sqrt{2}/2.$$

On peut donc poser $c = \sqrt{2}/2$.

(c) En utilisant les relations $\cos n_k \geq c$ et $n_k \leq (8k+1)\pi/4$, on a la minoration suivante pour la série $\sum_{k\geq 1} \frac{\cos^2 n_k}{n_k}$:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\cos^2 n_k}{n_k} \geq \sum_{k\geq 1} \frac{c^2}{(8k+1)\pi/4} = \sum_{k\geq 1} \frac{2}{\pi} \frac{1}{8k+1} .$$

Lorsque $k \to \infty$, le terme $\frac{2}{\pi}\frac{1}{8k+1}$ est équivalent à $\frac{2}{\pi}\frac{1}{8k} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{k}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. On conclut que $\sum_{k\geq 1} \frac{\cos^2 n_k}{n_k}$ est divergente. En remarquant que $\frac{\cos^2 n_k}{n_k}$ est une sous-suite de $\frac{\cos^2 n}{n}$, il est évident que $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2 n}{n}$ est aussi divergente.

(d) Comme dans la question précédente, on applique le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 0 :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\cos n}{n^{1/2}} \frac{1}{1+\frac{\cos n}{n^{1/2}}} \\ &= \frac{\cos n}{n^{1/2}} \left(1 - \frac{\cos n}{n^{1/2}} + \frac{\cos^2 n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\cos n}{n^{1/2}} - \frac{\cos^2 n}{n} + \frac{\cos^3 n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) . \end{aligned}$$

Le premier terme $\frac{\cos n}{n^{1/2}}$ donne une série convergente d'après le critère de Dirichlet. Le deuxième terme donne une série divergente d'après ce qu'on a démontré. Le reste est majoré par le terme $\frac{1}{n^{3/2}}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. On conclut que la série u_n est divergente.

Exercice 4. (3 pts) Déterminer l'ensemble des couples (a, b), avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $b > 0$, pour lesquels l'intégrale généralisée suivante est convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^a \ln t}{1+t^b} dt.$$

Solution. En 0 : comme $b > 0$ on a une relation équivalente

$$\frac{t^a \ln t}{1+t^b} \sim t^a \ln t = \frac{1}{t^{-a}(\ln t)^{-1}}.$$

C'est une intégrale de Bertrand, donc il faut $-a < 1$, i.e. $a > -1$, pour que l'intégrale soit convergente.
En $+\infty$: de même, comme $b > 0$ on a une relation équivalente

$$\frac{t^a \ln t}{1+t^b} \sim \frac{t^a \ln t}{t^b} = \frac{1}{t^{b-a}(\ln t)^{-1}}.$$

C'est une intégrale de Bertrand, donc il faut $b - a > 1$ pour que l'intégrale soit convergente. Donc les couples (a, b) pour lesquels l'intégrale est convergente sont ceux qui satisfont $a > -1$ et $b > a + 1$.