Contrôle 1 : Corrigé
Limite, continuité et dérivabilité

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.
On écrit d'abord

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+\sin x)\cdot\frac{1}{x}}.$$

En point 0, on a des relations d'équivalence $\ln(1+u) \overset{0}{\sim} u$ et $\sin x \overset{0}{\sim} x$. En prenant $u = \sin x$, on obtient $\ln(1+\sin x) \overset{0}{\sim} \sin x \overset{0}{\sim} x$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x}}{x^2-2x+1}$.
On se sert de la relation suivante

$$\sqrt{A}-\sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}},$$

qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x}}{x^2-2x+1} &= \frac{(x^2-x+1)-x}{(x^2-2x+1)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{\cancel{x^2-2x+1}}{\cancel{(x^2-2x+1)}(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Lorsque $x \to 1$, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x}}{x^2-2x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.}$$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2^x+x)^{\frac{1}{x}}$.
Intuitivement, le terme 2^x croît beaucoup plus vite que x, donc on devrait obtenir 2 comme limite.
On écrit

$$(2^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(2^x+x)\cdot\frac{1}{x}}.$$

En regardant l'exposant, on a

$$\begin{aligned}
\ln(2^x + x) \cdot \tfrac{1}{x} &= \ln\left(2^x \cdot (1 + \tfrac{x}{2^x})\right) \cdot \tfrac{1}{x} \\
&= \left(\ln(2^x) + \ln(1 + \tfrac{x}{2^x})\right) \cdot \tfrac{1}{x} \\
&= \ln 2 + \ln(1 + \tfrac{x}{2^x}) \cdot \tfrac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme, lorsque $x \to +\infty$, est équivalent à $\frac{x}{2^x} \cdot \frac{1}{x}$ (car $\ln(1+u) \overset{0}{\sim} u$) et tend donc vers 0. On conclut que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(2^x + x) \cdot \tfrac{1}{x} = \ln 2,$$

et

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (2^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln 2} = 2.}$$

Exercice 2. Considérer la fonction suivante

$$f(x) := \begin{cases} x^{x^2} & \text{si } x > 0; \\ 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(1) **Déterminer si f est continue en 0.**
Pour que f soit continue en 0, il faut que la limite de f en 0 existe. Clairement la limite à gauche $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ vaut 1. Il faut donc étudier la limite à droite $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. On écrit

$$x^{x^2} = e^{\ln x \cdot x^2}.$$

L'exposant $\ln x \cdot x^2$ tend vers 0 par les croissances comparées. Donc

$$\lim_{x \to 0^+} x^{x^2} = e^0 = 1.$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue en } 0.}$

(2) **Calculer la dérivée de f pour $x \neq 0$.**
Pour $x < 0$, la fonction f est la fonction constante 1, donc $f'(x) = 0$.
Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^{x^2}\right)' \\
&= \left(e^{\ln x \cdot x^2}\right)' \\
&= e^{\ln x \cdot x^2} \cdot (\ln x \cdot x^2)' \quad \text{(dérivée d'une fonction composée)} \\
&= e^{\ln x \cdot x^2} \cdot (x + \ln x \cdot 2x) \quad \text{(dérivée d'un produit)} \\
&= x^{x^2} \cdot x\,(1 + 2\ln x) \\
&= x^{x^2+1}\,(1 + 2\ln x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} x^{x^2+1}\,(1 + 2\ln x) & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

(3) **Déterminer si f est dérivable en 0.**

Par définition, la fonction f est dérivable en 0 si et seulement si la limite suivante existe

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Pour $x>0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{x^{x^2}-1}{x} \\ &= \frac{e^{\ln x \cdot x^2}-1}{x}. \end{aligned}$$

Comme $\ln x \cdot x^2$ tend vers 0 lorsque $x \to 0^+$, en utilisant la relation d'équivalence $e^u - 1 \overset{0}{\sim} u$, on obtient

$$e^{\ln x \cdot x^2} - 1 \overset{0}{\sim} \ln x \cdot x^2.$$

Donc lorsque $x \to 0^+$, le quotient $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est équivalent à $\frac{\ln x \cdot x^2}{x} = \ln x \cdot x$, qui tend encore vers 0 par les croissances comparées. On a montré que la dérivée à droite de f vaut 0.

Par ailleurs, lorsque $x \to 0^-$, la fonction f est la fonction constante 1, donc la dérivée à gauche vaut aussi 0. En conséquence, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0)=0.}$

Exercice 3.

(1) **Montrer que la fonction**

$$g(x) \coloneqq \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

est monotone sur $]0,+\infty[$ et en déduire l'inégalité

$$\forall\, x>0,\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}.$$

Pour étudier la monotonie, on peut regarder la dérivée. On calcule donc d'abord la dérivée de g

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)' - \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) \\ &= \frac{x}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-(1+\cancel{x})+\cancel{x}}{x(1+x)^2} = -\frac{1}{x(1+x)^2}. \end{aligned}$$

La dérivée de g est clairement strictement négative si $x>0$. En conséquence, g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Lorsque $x\to+\infty$, on a $\ln(1+\frac{1}{x}) \to \ln 1 = 0$ et $\frac{1}{1+x} \to 0$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

et par la décroissance de g sur $]0,+\infty[$, on conclut que $g(x)>0$, soit $\ln(1+\frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$, pour tout $x>0$.

(2) **Montrer que la fonction**

$$f(x) \coloneqq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

est monotone sur $]0,+\infty[$**. En déduire qu'elle est bornée sur** $]0,+\infty[$**, en précisant la borne supérieure et la borne inférieure.**

De nouveau on va regarder la dérivée de f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)' \\
&= \left(e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x}\right)' \\
&= e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x} \cdot \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x\right)' \quad \text{(dérivée d'une fonction composée)} \\
&= e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot 1\right) \quad \text{(dérivée d'un produit)} \\
&= e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x} \cdot \left(-\frac{1}{1+x} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x} \cdot g(x).
\end{aligned}$$

On a déjà démontré que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$. On en déduit que la dérivée de f est strictement positive pour tout $x > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Pour trouver les bornes, on regarde les limites en 0^+ et $+\infty$. Écrivons

$$f(x) = e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x}.$$

En regardant l'exposant, on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\cdot x = \ln(x+1)\cdot x - \ln x\cdot x.$$

Lorsque $x \to 0^+$, le premier terme tend vers $\ln 1 \cdot 0 = 0$, et le deuxième tend aussi vers 0 par les croissances comparées. Donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x} = e^0 = 1.$$

Lorsque $x \to +\infty$, en utilisant la relation $\ln(1+u) \overset{0}{\sim} u$, on écrit

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\cdot x = 1.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x} = e^1 = e.$$

On conclut que la fonction f est bornée sur $]0,+\infty[$ avec borne inférieure 1 et borne supérieure e.