Université de Paris **2020–2021**
MI3 - Algèbre et analyse élémentaires III **L2 Info**

Contrôle 1 : Corrigé
Limite, continuité et dérivabilité

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes.

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$.

En point $x = 0$, on a des relations d'équivalence $e^x - 1 \overset{0}{\sim} x$ et $\sin x \overset{0}{\sim} x$. En particulier, les deux fonctions $e^x - 1$ et $\sin x$ sont équivalentes. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1.}$$

(2) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{-2x}}{x^2 + 2x + 1}$.

On se sert de la relation suivante

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}},$$

qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{-2x}}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{(x^2+1) - (-2x)}{(x^2+2x+1)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{-2x})} \\
&= \frac{\cancel{x^2+2x+1}}{\cancel{(x^2+2x+1)}(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{-2x})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{-2x}}.
\end{aligned}$$

Lorsque $x \to -1$, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{-2x}}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.}$$

(3) $\lim_{x\to +\infty} (\ln x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$.

Intuitivement, le terme 3^x croît beaucoup plus vite que $\ln x$, donc on devrait obtenir 3 comme limite.

On écrit

$$(\ln x + 3^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(\ln x + 3^x)\cdot\frac{1}{x}}.$$

En regardant l'exposant, on a

$$\begin{aligned}
\ln(\ln x + 3^x)\cdot\tfrac{1}{x} &= \ln\left(3^x \cdot (\tfrac{\ln x}{3^x} + 1)\right)\cdot\tfrac{1}{x} \\
&= \left(\ln(3^x) + \ln(1 + \tfrac{\ln x}{3^x})\right)\cdot\tfrac{1}{x} \\
&= \ln 3 + \ln(1 + \tfrac{\ln x}{3^x})\cdot\tfrac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme, lorsque $x \to +\infty$, est équivalent à $\frac{\ln x}{3^x} \cdot \frac{1}{x}$ (car $\ln(1+u) \overset{0}{\sim} u$) et tend donc vers 0. On conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x + 3^x) \cdot \tfrac{1}{x} = \ln 3,$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (\ln x + 3^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln 3} = 3.}$$

Exercice 2. Considérer la fonction suivante

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} (1+x)^{\ln x} & \text{si } x > 0; \\ 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(1) **Déterminer si f est continue en 0.**
Pour que f soit continue en 0, il faut que la limite de f en 0 existe. Clairement la limite à gauche $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ vaut 1. Il faut donc étudier la limite à droite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. On écrit

$$(1+x)^{\ln x} = e^{\ln(1+x)\cdot\ln x}.$$

En regardant l'exposant, on a

$$\ln(1+x)\cdot\ln x \overset{0}{\sim} x \cdot \ln x, \text{ car } \ln(1+x) \overset{0}{\sim} x.$$

Mais le terme $x \cdot \ln x$ tend vers 0 par les croissances comparées. Donc

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)\cdot\ln x = 0,$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x} = e^0 = 1.$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue en } 0.}$

(2) **Calculer la dérivée de f pour $x \neq 0$.**
Pour $x < 0$, la fonction f est la fonction constante 1, donc $f'(x) = 0$.
Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((1+x)^{\ln x}\right)' \\ &= \left(e^{\ln(1+x)\cdot\ln x}\right)' \\ &= e^{\ln(1+x)\cdot\ln x} \cdot (\ln(1+x)\cdot\ln x)' \quad \text{(dérivée d'une fonction composée)} \\ &= e^{\ln(1+x)\cdot\ln x} \cdot \left(\frac{\ln x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{x}\right) \quad \text{(dérivée d'un produit).} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} (1+x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{x}\right) & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

(3) **Déterminer si f est dérivable en 0.**
Par définition, la fonction f est dérivable en 0 si et seulement si la limite suivante existe

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Pour $x>0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{(1+x)^{\ln x}-1}{x}\\ &= \frac{e^{\ln(1+x)\cdot\ln x}-1}{x}.\end{aligned}$$

Comme on a déjà démontré que

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)\cdot\ln x = 0,$$

en utilisant la relation d'équivalence $e^u-1\overset{0}{\sim}u$, on obtient

$$e^{\ln(1+x)\cdot\ln x}-1\overset{0}{\sim}\ln(1+x)\cdot\ln x\overset{0}{\sim}x\cdot\ln x.$$

Donc lorsque $x\to 0^+$, le quotient $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est équivalent à $\frac{x\cdot\ln x}{x}=\ln x$, qui a pour limite $-\infty$. En conséquence, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

Exercice 3.

(1) **Montrer que la fonction**

$$g(x) \coloneqq \ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$$

est monotone sur $]0,+\infty[$ **et en déduire l'inégalité**

$$\forall\, x>0,\ \ln(1+x)>\frac{x}{1+x}.$$

Pour étudier la monotonie, on peut regarder la dérivée. On calcule donc d'abord la dérivée de g

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\right)'\\ &= \frac{1}{1+x}-\frac{(1+\cancel{x})-\cancel{x}}{(1+x)^2}\\ &= \frac{x}{(1+x)^2}.\end{aligned}$$

La dérivée de g est clairement strictement positive si $x>0$. En conséquence, g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Lorsque $x\to 0^+$, on a $\ln(1+x)\overset{0}{\sim}x\to 0$ et $\frac{x}{1+x}\to\frac{0}{1+0}=0$. Donc

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=0,$$

et par la croissance de g sur $]0,+\infty[$, on conclut que $g(x)>0$, soit $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$, pour tout $x>0$.

(2) **Montrer que la fonction**

$$f(x) \coloneqq (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

est monotone sur $]0,+\infty[$. En déduire qu'elle est bornée sur $]0,+\infty[$, en précisant la borne supérieure et la borne inférieure.

De nouveau on va regarder la dérivée de f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' \\
&= \left(e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}}\right)' \\
&= e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}} \cdot \left(\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}\right)' \quad \text{(dérivée d'une fonction composée)} \\
&= e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x} + \ln(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \quad \text{(dérivée d'un produit)} \\
&= e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\right) \\
&= -e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot g(x).
\end{aligned}$$

On a déjà démontré que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$. On en déduit que la dérivée de f est strictement négative pour tout $x > 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Pour trouver les bornes, on regarde les limites en 0^+ et $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}} = e^1 = e,$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Donc la fonction f est bornée sur $]0,+\infty[$ avec borne inférieure 1 et borne supérieure e.