Université de Paris **2020–2021**
MI3 - Algèbre et analyse élémentaires III **L2 Info**

Devoir maison

Exercice 1. Déterminer le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

(1) $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 ;

(2) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2 ;

(3) $\dfrac{\cos x}{1+\tan x}$ à l'ordre 4 ;

(4) $\dfrac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 4 ;

(5) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 3 ;

(6) $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Exercice 2 (Feuille DL, §2 Exercice 2 et 5)**.** Calculer les limites suivantes, en utilisant des développements limités :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x}$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{x^2}}{x\tan x - x^2}$;

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$.

***Exercice 3.** Soit f une fonction dérivable jusqu'à l'ordre $n+1$ sur un intervalle I. Soit a un point à l'intérieur de I. La formule de Taylor–Lagrange dit que pour tout $x\in I$, il existe un point ξ entre a et x tel que

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(1) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{Z}_{>0}$, il exists un nombre $\theta_n\in\,]1,e[$ tel que

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{(n+1)!}.$$

(2) Montrer que e est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être écrit comme un quotient $\frac{m}{n}$ avec deux nombres entiers m et n. (On pourrait étudier le produit $n!\cdot e$.)

***Exercice 4.** Soit n un nombre entier positif. Considérer la fonction polynomiale $(x^2-1)^n$. Montrer que son n-ième dérivée admet n zéros distincts dans l'intervalle $]-1,1[$. (*Indication* : appliquer le théorème de Rolle.)