Devoir maison

Exercice 1. Déterminer le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

(1) $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 ;
(2) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2 ;
(3) $\dfrac{\cos x}{1+\tan x}$ à l'ordre 4 ;
(4) $\dfrac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 4 ;
(5) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 3 ;
(6) $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

---

(1) On va utiliser les développements limités pour les fonctions exp et sin :

$$\begin{aligned}\sin x &= x-\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^4)\\ \exp u &= 1+u+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{6}u^3+\tfrac{1}{24}u^4+o_0(u^4).\end{aligned}$$

En posant $u=\sin x$ et en remarquant que $u \overset{0}{\sim} x$ donc $o_0(u^4)=o_0(x^4)$, on obtient

$$\begin{aligned}\exp(\sin x) &= 1+u+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{6}u^3+\tfrac{1}{24}u^4+o_0(u^4)\\ &= 1+(x-\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^4))+\tfrac{1}{2}(x-\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^4))^2\\ &\quad+\tfrac{1}{6}(x-\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^4))^3+\tfrac{1}{24}(x-\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^4))^4+o_0(x^4)\\ &= 1+(x-\tfrac{1}{6}x^3)+\tfrac{1}{2}(x^2-\tfrac{1}{3}x^4)+\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{24}x^4+o_0(x^4)\\ &= 1+x+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{8}x^4+o_0(x^4).\end{aligned}$$

(2) On connait le développement limité pour la racine carrée :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2} &= 1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2+o_0(x^2)\\ &= 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+o_0(x^2).\end{aligned}$$

Donc à l'intérieur de la première racine carrée on a

$$1+\sqrt{1+x}=2+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+o_0(x^2).$$

Il faut faire attention que l'on ne peut pas appliquer le développement limité de $\sqrt{1+u}$ directement ici en mettant $u=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o_0(x^2)$: le terme constant est 2 au lieu de 1. Il faut donc faire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{1+x}} &= \sqrt{2+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+o_0(x^2)}\\ &= \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^2+o_0(x^2)}\\ &= \sqrt{2}\cdot\big(1+\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^2+o_0(x^2)\big)-\tfrac{1}{8}\big(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^2+o_0(x^2)\big)^2+o_0(x^2)\big)\\ &= \sqrt{2}\cdot\big(1+\tfrac{1}{8}x-\tfrac{5}{128}x^2+o_0(x^2)\big),\end{aligned}$$

où l'on a appliqué le développement limité de $\sqrt{1+u}$ pour $u=\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+o_0(x^2)$ et le fait $o_0(u^2)=o_0(x^2)$.

Remarque. Notons que si l'on pose $x=0$, la fonction vaut $\sqrt{1+\sqrt{1+0}}=\sqrt{2}$ qui est bien le terme constant dans le développement limité obtenu.

(3) On va utiliser les développements limités pour les fonctions cos et tan :

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)$$
$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + o_0(x^4).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1+\tan x} &= \cos x \cdot \frac{1}{1 + x + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^4)} \\
&= \cos x \cdot \Big(1 - \big(x + \tfrac{1}{3}x^3 + o_0(x^4)\big) + \big(x + \tfrac{1}{3}x^3 + o_0(x^4)\big)^2 \\
&\qquad - \big(x + \tfrac{1}{3}x^3 + o_0(x^4)\big)^3 + \big(x + \tfrac{1}{3}x^3 + o_0(x^4)\big)^4 + o_0(x^4)\Big) \\
&= \cos x \cdot \big(1 - x + x^2 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{5}{3}x^4 + o_0(x^4)\big) \\
&= \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)\big) \cdot \big(1 - x + x^2 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{5}{3}x^4 + o_0(x^4)\big) \\
&= 1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{29}{24}x^4 + o_0(x^4).
\end{aligned}$$

(4) On a

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1 + \big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)\big)}.$$

Encore une fois, le dénominateur vaut 2 lorsque x tend vers 0 donc on ne peut pas appliquer directement le développement limité pour $\frac{1}{1+u}$. Il faut d'abord diviser par 2 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^x} &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4 + o_0(x^4)} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(1 - \big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{48}x^4 + o_0(x^4)\big) + \big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{48}x^4 + o_0(x^4)\big)^2 \\
&\qquad - \big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{48}x^4 + o_0(x^4)\big)^3 + \big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{48}x^4 + o_0(x^4)\big)^4 + o_0(x^4)\Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(1 - \big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{48}x^4\big) + \big(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{7}{48}x^4\big) - \big(\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{3}{16}x^4\big) + \big(\tfrac{1}{16}x^4\big) + o_0(x^4)\Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \big(1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{24}x^3 + o_0(x^4)\big) \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{48}x^3 + o_0(x^4).
\end{aligned}$$

(5) On connait bien le développement limité pour la fonction $\sin x$, mais il faut faire attention au degré. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_0(x^5)} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o_0(x^4)}\right) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \Big(1 - \Big(1 - \big(-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + o_0(x^4)\big) + \big(-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + o_0(x^4)\big)^2 + o_0(x^4)\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \big(\cancel{1} - \big(\cancel{1} + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4 + o_0(x^4)\big)\big) \\
&= -\tfrac{1}{6}x - \tfrac{7}{360}x^3 + o_0(x^3).
\end{aligned}$$

(6) Écrivons

$$(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \left(e^{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{1+x}} = e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}}.$$

On calcule d'abord le développement limité de l'exposant

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\cdot\tfrac{1}{1+x} &= \left(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+o_0(x^3)\right)\cdot\left(1-x+x^2-x^3+o_0(x^3)\right)\\ &= x-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{11}{6}x^3+o_0(x^3).\end{aligned}$$

Puis on a

$$\begin{aligned}e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}} &= e^{x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3+o_0(x^3)}\\ &= 1+\left(x-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{11}{6}x^3+o_0(x^3)\right)+\tfrac{1}{2}\left(x-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{11}{6}x^3+o_0(x^3)\right)^2\\ &\qquad+\tfrac{1}{6}\left(x-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{11}{6}x^3+o_0(x^3)\right)^3+o_0(u^3)\\ &= 1+\left(x-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{11}{6}x^3\right)+\tfrac{1}{2}(x^2-3x^3)+\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^3)\\ &= 1+x-x^2+\tfrac{1}{2}x^3+o_0(x^3).\end{aligned}$$

Exercice 2 (Feuille DL, §2 Exercice 2 et 5)**.** Calculer les limites suivantes, en utilisant des développements limités :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x}$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x - e^{x^2}}{x\tan x - x^2}$;

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$.

---

(1) On a

$$\sin x - x\cos x = x-\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^3)-x(1-\tfrac{1}{2}x^2+o_0(x^2)) = \tfrac{1}{3}x^3+o_0(x^3)$$

et

$$\sin x - x = x-\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^3)-x = -\tfrac{1}{6}x^3+o_0(x^3).$$

La limite pour le quotient est donc égale au quotient des deux coefficients

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cdot\cos x}{\sin x - x}=\frac{1/3}{-1/6}=-2.$$

(2) On a

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}}.$$

Il suffit donc de calculer la limite pour l'exposant :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} &= \ln\left(\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o_0(x^3)}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\\ &= \ln\left(1-\tfrac{1}{6}x^2+o_0(x^2)\right)\cdot\frac{1}{x}\\ &= \left(-\tfrac{1}{6}x^2+o_0(x^2)\right)/x\\ &= -\tfrac{1}{6}x+o_0(x) \quad \to 0 \text{ lorsque } x\to0\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

(3) On a $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$ et $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$. Si l'on soustrait x des deux, le quotient a pour limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} = \frac{-1/6}{1/3} = -\frac{1}{2}.$$

(4) On a
$$\begin{aligned} \cos x - e^{x^2} &= \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)\right) - \left(1 + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + o_0(x^4)\right) \\ &= -\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{11}{24}x^4 + o_0(x^4) \quad \overset{0}{\sim} -\tfrac{3}{2}x^2 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} x\tan x - x^2 &= x\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)\right) - x^2 \\ &= \tfrac{1}{3}x^4 + o_0(x^4) \quad \overset{0}{\sim} \tfrac{1}{3}x^4. \end{aligned}$$
Donc la limite pour le quotient est
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x\tan x - x^2} = \lim_{x\to 0} -\tfrac{9}{2x^2} = -\infty.$$

(5) Prenons d'abord un changement de variable pour la ramener à zero : posons $x = 1 + t$, on va étudier la limite
$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{t}.$$
Or
$$\frac{\ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{t - \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)}{t^2} - \frac{1}{t} = -\tfrac{1}{2} + o_0(1).$$
Donc cette limite est $-\frac{1}{2}$.

***Exercice 3.** Soit f une fonction dérivable jusqu'à l'ordre $n+1$ sur un intervalle I. Soit a un point à l'intérieur de I. La formule de Taylor–Lagrange dit que pour tout $x \in I$, il existe un point ξ entre a et x tel que
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}_{>0}$, il exists un nombre $\theta_n \in]1, e[$ tel que
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{(n+1)!}.$$

(2) Montrer que e est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être écrit comme un quotient $\frac{m}{n}$ avec deux nombres entiers m et n. (On pourrait étudier le produit $n! \cdot e$.)

---

(1) On va considérer la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ qui satisfait $f^{(i)}(x) = f(x) = e^x$ pour tout nombre entier positif i.

Pour un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, par la formule de Taylor–Lagrange appliquée sur f pour $a = 0$ et $x = 1$, on obtient l'existence d'un point $\xi_n \in \,]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} e = f(1) &= f(0) + f'(0) \cdot (1-0) + \frac{f''(0)}{2}(1-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \frac{f^{n+1}(\xi_n)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Comme le nombre ξ_n est dans l'intervalle $]0, 1[$, on voit que le nombre $\theta_n \coloneqq e^{\xi_n}$ tombe dans l'intervalle $]1, e[$, qui est donc bien le nombre qu'on cherche.

(2) On raisonne par l'absurde : si le nombre e était rationnel, c'est-à-dire que l'on peut l'écrire comme un quotient m/n avec m, n deux nombres entiers. On peut en plus supposer que n est un nombre entier positif. En notant que e est borné par les deux entiers 2 et 3, on peut conclure que e lui-même n'est pas entier, donc n devrait être supérieur à 1 : $n \geq 2$. Alors considérons le produit $n! \cdot e$: d'un coté on a

$$n! \cdot e = n! \cdot \frac{m}{n} = (n-1)! \cdot m$$

donc c'est un nombre entier ; de l'autre coté on a

$$n! \cdot e = n! \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{(n+1)!}\right) = n! \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \frac{\theta_n}{n+1}.$$

La première partie est un nombre entier, alors que le deuxième terme est le quotient d'un nombre $\theta_n \in \,]1, e[$ par le nombre $n + 1$ qui est $\geq 3 > e$, donc c'est un nombre strictement entre 0 et 1 qui n'est jamais entier. On a alors obtenu une contradiction.

***Exercice 4.** Soit n un nombre entier positif. Considérer la fonction polynomiale $(x^2 - 1)^n$. Montrer que son n-ième dérivée admet n zéros distincts dans l'intervalle $]-1, 1[$. (*Indication* : appliquer le théorème de Rolle.)

Notons la fonction polynomiale par $f(x)$. On remarque d'abord que le polynôme $f(x) = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ admet deux zéros -1 et 1 avec multiplicité n. Donc pour $0 \leq k \leq n$, la dérivée $f^{(k)}(x)$, qui est un polynôme de degré $2n - k$, admet -1 et 1 comme des zéros avec multiplicité $n - k$, et il reste au plus $(2n - k) - 2(n - k) = k$ d'autres zéros distincts (notons que si $k = n$, la multiplicité de -1 et 1 devient $n - n = 0$, donc -1 et 1 ne sont plus des zéros pour $f^{(n)}(x)$).
On va montrer par récurrence que pour $0 \leq k \leq n$, la k-ième dérivée $f^{(k)}(x)$ de $f(x)$ admet exactement k zéros distincts dans l'intervalle $]-1, 1[$.
Initialisation. Pour $k = 0$, clairement f admet aucun zéro dans $]-1, 1[$.
Hérédité. Si pour $k \leq n - 1$, la k-ième dérivée $g(x) \coloneqq f^{(k)}(x)$ de $f(x)$ admet k zéros distincts dans l'intervalle $]-1, 1[$. On les note comme $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 1$. Notons que -1 et 1 sont des zéros de multiplicité $n - k$, donc on note aussi $x_0 \coloneqq -1$ et $x_{k+1} \coloneqq 1$ avec $g(x_0) = g(x_{k+1}) = 0$.
Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ avec $0 \leq i \leq k$, comme $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle et conclure qu'il existe un point $y_i \in \,]x_i, x_{i+1}[$ tel que $g'(y_i) = f^{(k+1)}(y_i) = 0$. Ainsi on obtient $k+1$ points $-1 < y_0 < y_1 < \cdots < y_k < 1$ qui sont tous des zéros de la fonction $f^{(k+1)}(x)$. Comme $f^{(k+1)}(x)$ admet au plus $k+1$ zéros distincts autres que -1 et 1, on conclut que $y_0, \ldots, y_{k+1}$ sont exactement ces $k + 1$ zéros distincts. Ainsi le cas $k + 1$ est démontré.

La conclusion pour le cas $k = n$ dit que la n-ième dérivée $f^{(n)}(x)$ admet exactement n zéros distincts dans l'intervalle $]-1, 1[$, donc on a gagné.

Remarque. Il est important de bien préciser sur quelle variable qu'on fait la récurrence : ici on fixe toujours la variable n qui est donnée par la fonction f ; la variable qu'on fait varier est le nombre k qui est l'ordre de dérivée, et l'hérédité est donc démontrée en allant de k à $k + 1$.