Algèbre linéaire
m-à-j le 27 novembre 2020

Fueille Systèmes linéaires

Exercice 2. Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2x_1 & + x_2 & + 2x_3 & + 3x_4 = a \\ x_1 & + x_2 & + 3x_3 & = b \end{cases},$$

où $a, b \in \mathbf{R}$ sont deux nombres réels. (Si $(a,b) = (0,0)$, le système est appelé *homogène*.)

On écrit le système sous forme de matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On met tous les coefficients dans une même matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & b \end{array} \right)$$

et on la réduit à la forme échelonnée en faisant une élimination de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & b \end{array} \right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & b \\ 2 & 1 & 2 & 3 & a \end{array} \right)$$
$$\overset{L_2 - 2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & b \\ 0 & -1 & -4 & 3 & a-2b \end{array} \right) \overset{L_2 \times (-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & b \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -a+2b \end{array} \right)$$
$$\overset{L_1 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a-b \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -a+2b \end{array} \right)$$

Le résultat corrésponde au système

$$\begin{cases} x_1 & & - \ x_3 & + 3x_4 = a - b \\ & x_2 & + 4x_3 & - 3x_4 = -a + 2b \end{cases}.$$

Pour le résoudre, on voit que les variables x_3 et x_4 peuvent prendre des valeurs librement, alors que x_1 et x_2 sont uniquement déterminées une fois on fixe x_3 et x_4. Donc on a la solution suivante

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 + a - b \\ x_2 = -4x_3 + 3x_4 - a + 2b \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

qui est en particulier valable pour tout a, b.

Remarque. Si l'on considère le système suivant

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 = a \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = b \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = c \end{cases},$$

où l'on a ajouté une troisième équation. Clairement, pour que le système admette des solutions, il faut $b = c$. Cela se manifeste aussi dans le calcul matriciel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & b \\ 1 & 1 & 3 & 0 & c \end{array}\right) \overset{L_3-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -b+c \end{array}\right) \overset{\text{même calcul}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a-b \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -a+2b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -b+c \end{array}\right)$$

Donc la forme échelonnée pour la matrice d'un système donne beaucoup d'informations sur la solution. Notamment, la sous-matrice en bas à droite pose des contraintes sur les coefficients : il faut qu'elle soit nulle pour qu'il existe des solutions ; la sous-matrice en haut à gauche nous permet d'expliciter la solution.

Exercice 14. Déterminer les valeurs du paramètre réel u pour lesquelles le système linéaire suivant admet des solutions autres que la solution triviale :

$$\begin{cases} ux & + & y & + & z & +t = 0 \\ x & + (1+u)y & & + & z & +t = 0 \\ x & + & y & + (2+u)z & & +t = 0 \\ x & + & y & + & z & +t = 0 \end{cases}$$

On considère la matrice des coefficients

$$\begin{pmatrix} u & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+u & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+u & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1-L_4 \\ L_2-L_4 \\ L_3-L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} u-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant des opérations élémentaires, on obtient une matrice où il y a trois lignes qui n'ont qu'un seul élément possiblement non nul. On va maintenant discuter selon la valeur du paramètre u.

— Si $u \in \{1, 0, -1\}$, dans ce cas on aura une ligne entièrement nulle.

  — $u = 1$: on réduit la matrice à forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc la solution est $x = -t, y = 0, z = 0, t = t$, où t peut prendre des valeurs librement.

— $u = 0$: pareil on obtient la forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc la solution est $x = 0, y = -t, z = 0, t = t$, où t peut prendre des valeurs librement.

— $u = -1$: pareil on obtient la forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette fois-ci la solution est $x = 0, y = 0, z = -t, t = t$, où t peut prendre des valeurs librement.

— Si $u \notin \{1, 0, -1\}$, dans ce cas on a le droit de diviser par $u - 1, u$ et $u + 1$ car ils sont tous non nuls. La forme échelonnée est donc

$$\begin{pmatrix} u-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui signifie qu'il existe une seule solution $x = y = z = t = 0$.

Feuille Espaces vectoriels n°1, §1

Exercice 1. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (2, 1, -3), v_2 = (3, 2, -5), v_3 = (1, -1, 1) \text{ et } v_4 = (6, 2, -7).$$

Montrer que v_4 est une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, v_3. Le système $\{a, b, c\}$ est-il générateur dans $\mathbf{R}^3$? Forme-t-il une base de $\mathbf{R}^3$?

Il faut démontrer l'existence de nombres réels $x, y, z \in \mathbf{R}$ tels que

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3 = v_4.$$

Cette écriture nous donne le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x + 2y - z = 2 \\ -3x - 5y + z = -7 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Notons que la matrice des coefficients est exactement composée des trois vecteurs colonnes v_1, v_2, v_3. Pour résoudre le système, on réduit la matrice suivante sous forme échelonnée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3+3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$
$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1-2L_2 \\ L_3+L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1-3L_3 \\ L_2+2L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Donc $x = 1, y = 1, z = 1$ donnent une solution, on a une égalité $v_1 + v_2 + v_3 = v_4$.
Ici la forme échelonnée est une matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, 1, 1)$. Si on avait commencé par un vecteur (a, b, c) quelconque au lieu de $v_4 = (6, 2, -7)$, on aurait obtenu une matrice échelonnée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array}\right),$$

où d, e, f sont des nombres réels qui dépendent de a, b, c. On voit donc que tout vecteur (a, b, c) dans $\mathbf{R}^3$ s'écrit d'une manière unique sous forme

$$(a, b, c) = d \cdot v_1 + e \cdot v_2 + f \cdot v_3.$$

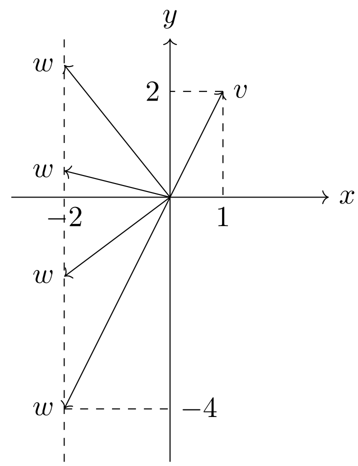
Le système $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une base de $\mathbf{R}^3$, qui est en particulier libre et générateur.

Remarque. Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée est appelé le *rang* du système des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Ce nombre est égal à la dimension du sous-espace $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ engendré par $v_1, \ldots, v_n$. Le système est libre si son rang est égal au nombre de vecteurs ; il est générateur si son rang est égal à la dimension de l'espace total (autrement dit, si le sous-espace $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ engendré est l'espace total). Donc la propriété d'être libre / générateur / une base se lit dans la forme échelonnée.

Exercice 4. Dans l'espace $\mathbf{R}^2$, on considère les vecteurs

$$v = (1, 2) \text{ et } w = (-2, m).$$

— À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel au vecteur v ?
— En supposant que w *n'est pas* proportionnel à v, montrer que tout vecteur de $\mathbf{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.



— Si v et w sont proportionnels, alors il existe un nombre réel λ tel que

$$w = \lambda \cdot v \quad \text{soit} \quad (-2, m) = (\lambda, 2\lambda).$$

Il est donc clair que $\lambda = -2$ et $m = -4$.

— Supposons maintenant que $m \neq -4$. Soit (a, b) un vecteur dans $\mathbf{R}^2$. On veut démontrer que (a, b) peut toujours s'écrire comme une combinaison linéaire

$$(a, b) = x \cdot v + y \cdot w,$$

où $x, y \in \mathbf{R}$ sont deux nombres réels. Cette écriture nous donne le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} x - \ 2y = a \\ 2x + my = b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Notons que la matrice des coefficients est exactement composée de deux vecteurs colonnes v et w. Pour résoudre le système, on réduit la matrice suivante sous forme échelonnée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 2 & m & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & m+4 & -2a+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & \frac{-2a+b}{m+4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{ma+2b}{m+4} \\ 0 & 1 & \frac{-2a+b}{m+4} \end{array}\right),$$

où on se sert de l'hypothèse $m \neq -4$ pour pourvoir diviser par $m + 4$. On voit que $x = \frac{ma+2b}{m+4}$ et $y = \frac{-2a+b}{m+4}$ donnent toujours une solution. Donc tout (a, b) est une combinaison linéaire de v et w.

Remarque. Une méthode plus directe serait de remarquer que, lorsque v et w ne sont pas proportionnels, le système (v, w) est libre, donc $\mathrm{Vect}(v, w)$ est forcément de dimension 2. Autrement dit, les vecteurs v et w engendrent un plan, qui est donc $\mathbf{R}^2$ tout entier.

Exercice 5. Déterminer si la suite de vecteurs est libre / génératrice / une base.

$$v_1 = (1, -1, i), v_2 = (-1, i, 1), v_3 = (i, 1, -1).$$

On est dans $\mathbf{C}^3$, où les éléments sont de type (a,b,c) avec $a,b,c \in \mathbf{C}$ des nombres complexes. Quand on fait des opérations élémentaires sur une matrice, on a le droit de multiplier les nombres complexes non nuls.
Pour détermine si une suite de vecteurs est libre / génératrice / une base, on écrit les vecteurs en vecteurs colonnes pour obtenir une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & i & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & i-1 & i+1 \\ 0 & i+1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & i-1 & i+1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & i+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que pour une suite de vecteurs, elle est libre si le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée est égal au nombre de vecteurs dans la suite (qui est aussi le nombre des colonnes) ; elle est génératrice s'il n'y a pas de ligne nulle dans la forme échelonnée.
Ici on voit que cette suite de vecteurs est libre et génératrice. En particulier elle forme une base de $\mathbf{C}^3$.

Exercice 6. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (2,3,-1), v_2 = (1,-1,-2), v_3 = (3,7,0), \text{ et } v_4 = (5,0,-7).$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1,v_2) = \mathrm{Vect}(v_3,v_4)$.

Soit (a,b,c) un vecteur dans $\mathbf{R}^3$. On étudie la condition sur les coefficients a,b,c pour que (a,b,c) soit contenu dans $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$, autrement dit, pour que (a,b,c) puisse s'écrire comme une combinaison linéaire

$$(a,b,c) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2,$$

où $x,y \in \mathbf{R}$ sont deux nombres réels. Cette écriture nous donne le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - y = b \\ -x - 2y = c \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Notons que la matrice des coefficients est exactement composée de deux vecteurs colonnes v_1 et v_2. Pour résoudre le système, on réduit la matrice suivante sous forme échelonnée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 3 & -1 & b \\ -1 & -2 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -c \\ 2 & 1 & a \\ 3 & -1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -c \\ 0 & -3 & a+2c \\ 0 & -7 & b+3c \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -c \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}(a+2c) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7}(b+3c) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3}(2a+c) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}(a+2c) \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{21}(7a-3b+5c) \end{array}\right).$$

Donc pour qu'il existe une solution (x, y), il faut que a, b, c vérifient l'équation $7a - 3b + 5c = 0$. Dans ce cas, $x = \frac{1}{3}(2a + c)$ et $y = -\frac{1}{3}(a + 2c)$ donnent une solution, c'est-à-dire que

$$(a, b, c) = \tfrac{1}{3}(2a + c) \cdot v_1 - \tfrac{1}{3}(a + 2c) \cdot v_2.$$

Par exemple, pour $v_1 = (2, 3, -1)$, on peut vérifier que $x = 1$ et $y = 0$ donc $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$ qui est évidente. Dans le langage d'espace vectoriel, on voit que l'espace $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est un plan dans $\mathbf{R}^3$ donné par l'équation $7a - 3b + 5c = 0$.
Maintenant pour démontrer l'égalité $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$, on a deux méthodes :

— soit on peut faire la même chose pour v_3 et v_4 pour trouver l'équation de $\mathrm{Vect}(v_3, v_4)$, et on vérifie que c'est la même équation $7a - 3b + 5c = 0$;

— soit on vérifie d'abord que v_3 et v_4 appartiennent à $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, en montrant qu'ils vérifient l'équation $7a - 3b + 5c = 0$

$$7 \cdot 3 - 3 \cdot 7 + 5 \cdot 0 = 0, \quad 7 \cdot 5 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-7) = 0.$$

Par linéarité, toute combinaison linéaire de v_3 et v_4 sera aussi dans $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et on a donc une inclusion $\mathrm{Vect}(v_3, v_4) \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Pour montrer l'égalité, on remarque que $\{v_3, v_4\}$ est un système libre : clairement v_3 et v_4 ne sont pas proportionnels. Cela signifie que $\mathrm{Vect}(v_3, v_4)$ est de dimension 2, autrement dit, c'est aussi un plan dans $\mathbf{R}^3$. On peut en déduire que $\mathrm{Vect}(v_3, v_4)$ est égal à $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 8. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v = (1, -2, -5) \text{ et } w = (-2, 4, m).$$

— À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel au vecteur v ?

— En supposant que w *n'est pas* proportionnel à v, on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a

$$P = \big\{(x, y, x) \in \mathbf{R}^3 \;\big|\; ax + by + cz = 0\big\},$$

où a, b, c sont des nombres réels, non tout les trois nuls, que l'on déterminera.

— Si v et w sont proportionnels, alors il existe un nombre réel λ tel que

$$w = \lambda \cdot v \quad \text{soit} \quad (-2, 4, m) = (\lambda, -2\lambda, -5\lambda).$$

Il est donc clair que $\lambda = -2$ et $m = 10$.

— Si l'on suppose que $m \neq 10$, pour étudier l'ensemble des combinaisons linéaires de v et w, on considère la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ -2 & 4 & y \\ -5 & m & z \end{array}\right).$$

En utilisant le fait que $m \neq 10$ (on a donc le droit de diviser par $m-10$), on la réduit sous forme échelonnée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{mx+2z}{m-10} \\ 0 & 1 & \frac{5x+z}{m-10} \\ \hline 0 & 0 & 2x+y \end{array}\right).$$

Donc pour qu'il existe x_1, x_2 tels que

$$x_1 \cdot v + x_2 \cdot w = (x, y, z),$$

il faut que $2x + y = 0$. Dans ce cas, $x_1 = \frac{mx+2z}{m-10}$ et $x_2 = \frac{5x+z}{m-10}$ donnent une solution. L'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w est donc le plan dans $\mathbf{R}^3$ donné par l'équation $2x + y = 0$. On pose $a = 2, b = 1, c = 0$.

Exercice 10. Dans l'espace $\mathbf{R}^4$, on considère le sous-espace F engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, -1, 0), v_2 = (4, 8, -4, -3), v_3 = (0, 1, 3, 4) \text{ et } v_4 = (2, 5, 1, 4).$$

Extraire de ce système générateur de F un système de vecteurs libres.

On écrit ces vecteurs en vecteurs colonnes pour obtenir une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On la réduit en forme échelonnée

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Les « pivots », c'est-à-dire les premiers « 1 » dans chaque ligne non nulle, sont marqués en rouge. Ils apparaissent dans les colonnes $1, 2$ et 3, on peut donc extraire les vecteurs v_1, v_2, v_3 comme un système de vecteurs libres.

Remarque. Disons si l'on obtient une forme échelonnée de type

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

on peut en déduire que $\{v_1, v_2\}$ n'est pas libre, autrement dit, ils sont proportionnels. Dans ce cas il faut prendre les vecteurs $\{v_1, v_3, v_4\}$ qui forme un système libre qui engendre $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Exercice 13. Trouver une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs suivants dans $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (3, 1, -1), v_2 = (-1, 1, 2), v_3 = (1, -1, 1) \text{ et } v_4 = (5, -2, 3).$$

Une relation de dépendance linéaire est la même chose que d'écrire le vecteur $(0, 0, 0)$ en une combinaison linéaire non triviale. On considère donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On la réduit en forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{12} \end{pmatrix}.$$

Considérons une combinaison linéaire $(0, 0, 0) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3 + t \cdot v_4$. On sait que $x = -\frac{3}{4}t$, $y = -\frac{1}{3}t$ et $z = -\frac{37}{12}t$ est une solution, où la quatrième variable t peut prendre des valeurs librement. On peut donc prendre $t = 12$, avec $x = -9$, $y = -4$ et $z = -37$, et on a bien

$$(0, 0, 0) = -9v_1 - 4v_2 - 37v_3 + 12v_4.$$

Exercice 14. Considérons l'espace $\mathbf{R}_2[x]$ et les polynômes

$$P_1(x) = (x - 1)^2, \quad P_2(x) = (2x + 1)^2 \quad \text{et} \quad P_3(x) = ux + 3,$$

où u est un paramètre réel.

— À quelle condition sur le paramètre u le vecteur P_3 est-il une combinaison linéaire de P_1 et P_2 ?

— On suppose cette condition vérifiée. Montrer que P_1 est une combinaison linéaire de P_2 et P_3 et que P_2 est une combinaison linéaire de P_1 et P_3.

— On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de $\mathbf{R}_2[x]$ est une combinaison linéaire de P_1, P_2 et P_3.

Rappelons que $\mathbf{R}_2[x]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. Chaque élément est de forme $ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$. On peut donc identifier l'espace $\mathbf{R}_2[x]$ avec l'espace $\mathbf{R}^3$ en renvoyant le polynôme $ax^2 + bx + c$ au vecteur (a, b, c).
Les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont donc identifiés avec les vecteurs $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (4, 4, 1)$ et $v_3 = (0, u, 3)$.

— S'il existe deux nombres réels $x, y \in \mathbf{R}$ tels que

$$v_3 = x \cdot v_1 + y \cdot v_2,$$

on a alors
$$\begin{cases} x+4y=0 \\ -2x+4y=u \\ x+\ y=3 \end{cases}.$$
On peut facilement résoudre que $x=4$ et $y=-1$, il faut donc que $u=-12$. Dans ce cas on a $v_3=4v_1-v_2$, soit $P_3=4P_1-P_2$.

— Comme on a $P_3=4P_1-P_2$ si $u=-12$, on en déduit que $P_1=\frac{1}{4}P_2+\frac{1}{4}P_3$ et $P_2=4P_1-P_3$.

— De nouveau, au lieu de traiter le problème dans $\mathbf{R}_2[x]$, on ramène le problème dans $\mathbf{R}^3$ en renvoyant ax^2+bx+c à (a,b,c). On considère la matrice
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & a \\ -2 & 4 & u & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array}\right).$$
La forme échelonnée est
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{(12-u)a-12b+4uc}{3(u+12)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(u+6)a+3b-uc}{3(u+12)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2a+b+4c}{u+12} \end{array}\right).$$
On a donc la combinaison linéaire suivante
$$ax^2+bx+c=\tfrac{(12-u)a-12b+4uc}{3(u+12)}P_1(x)+\tfrac{(u+6)a+3b-uc}{3(u+12)}P_2(x)+\tfrac{-2a+b+4c}{u+12}P_3(x).$$
Notons que si l'on omet la colonne (a,b,c), on peut aussi déduire de la forme échelonnée que les trois vecteurs forment une base. Cela suffit pour démontrer que tout vecteur dans $\mathbf{R}_2[x]$ s'écrit comme une combinaison linéaire sans préciser les coefficients.

Remarque. Pour la dernière question, il est aussi possible de démontrer le résultat sans faire le calcul : comme P_1 et P_2 ne sont pas proportionnels, l'espace $\mathrm{Vect}(P_1,P_2)$ est un sous-espace de dimension 2. Si l'on suppose que P_3 n'est pas une combinaison linéaire de P_1 et P_2, alors P_3 n'appartient pas au sous-espace $\mathrm{Vect}(P_1,P_2)$. Le sous-espace $\mathrm{Vect}(P_1,P_2,P_3)$ est donc de dimension 3, qui est forcément $\mathbf{R}_2[x]$ tout entier ; le système (P_1,P_2,P_3) forme donc une base de $\mathbf{R}_2[x]$. On en déduit alors que tout vecteur de $\mathbf{R}_2[x]$ est une (unique) combinaison linéaire de P_1, P_2 et P_3.

Exercice 15. Dans l'espace $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on considère les éléments suivants
$$\cos x, \quad \sin x, \quad 1, \quad \cos 2x, \quad \cos(x+\tfrac{\pi}{4}).$$

— Montrer que $\sin x$ n'est pas proportionnelle à $\cos x$.

— Montrer que 1 n'est pas une combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.

— Est-ce que $\cos 2x$ est une combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$? Même question pour $\cos(x+\frac{\pi}{4})$.

— On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe un nombre réel $a\in\mathbf{R}$ tel que $\cos x=a\sin x$. Notons qu'il s'agit d'une égalité de deux fonctions, qui veut dire que

$$\text{« pour tout } x \in \mathbf{R}, \text{ on a } \cos x = a \sin x \text{ ».}$$

On peut donc vérifier sur des points particuliers. Mettons $x = 0$, alors on a

$$1 = \cos 0 = a \sin 0 = a \cdot 0 = 0,$$

une contradiction. Donc $\sin x$ n'est pas proportionnel à $\cos x$.

— On raisonne encore par l'absurde : supposons qu'il existe des nombres réels $a, b \in \mathbf{R}$ tel que

$$1 = a \cos x + b \sin x.$$

De nouveau il s'agit d'une égalité de deux fonctions, et on va vérifier sur des points particuliers. Pour $x = 0$, on a

$$1 = a \cos 0 + b \sin 0 = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a \;;$$

pour $x = \pi$, on a

$$1 = a \cos \pi + b \sin \pi = a \cdot (-1) + b \cdot 0 = -a.$$

Mais a ne peut pas être 1 et -1 à la fois, une contradiction. On peut donc conclure qu'il n'existe pas tels a, b.

— Pour la fonction $\cos 2x$, on peut procéder comme dans la question précédente : supposons qu'il existe des nombres réels $a, b \in \mathbf{R}$ tel que

$$\cos 2x = a \cos x + b \sin x.$$

Pour $x = 0$, on a

$$1 = \cos 0 = a \cos 0 + b \sin 0 = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a \;;$$

pour $x = \pi$, on a

$$1 = \cos 2\pi = a \cos \pi + b \sin \pi = a \cdot (-1) + b \cdot 0 = -a.$$

C'est donc absurde.

Alternativement, on peut raisonner en remarquant que $\cos 2x$ est une fonction périodique avec période π :

$$\cos 2x = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2(x + \pi).$$

Donc si l'on avait une écriture

$$\cos 2x = a \cos x + b \sin x,$$

on aurait

$$\cos 2x = \cos 2(x + \pi) = a \cos(x + \pi) + b \sin(x + \pi) = -(a \cos x + b \sin x) = -\cos 2x,$$

ce qui montre que $\cos 2x = 0$. Mais clairement $\cos 2x$ n'est pas égal à 0 en tant qu'une fonction, donc on a une contradiction.

Pour la fonction $\cos(x + \frac{\pi}{4})$, on se sert de la formule

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

On a

$$\begin{aligned} \cos(x + \tfrac{\pi}{4}) &= \cos x \cdot \cos \tfrac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \tfrac{\pi}{4} \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \sin x. \end{aligned}$$

Donc $\cos(x + \pi/4)$ est bien une combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$. Notons en fait que l'on peut remplacer $\pi/4$ par un nombre réel quelconque.

Exercice 16. Montrer que les fonctions x^2, $\cos x$ et $\exp x$ forment un système indépendant dans $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Supposons qu'il existe une relation de dépendance linéaire entre ces trois fonctions, alors on peut trouver trois nombre réels $a, b, c \in \mathbf{R}$ non tous nuls tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \text{ on a } ax^2 + b\cos x + c\exp x = 0.$$

On peut vérifier cet égalité sur des points particuliers. Pour $x = 0$, on a

$$a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0 \ ;$$

pour $x = \pi/2$, on a

$$a \cdot \pi^2/4 + b \cdot 0 + c \cdot e^{\pi/2} = 0 \ ;$$

pour $x = -\pi/2$, on a

$$a \cdot \pi^2/4 + b \cdot 0 + c \cdot e^{-\pi/2} = 0.$$

Les deux dernières équations nous permettent de résoudre $c = 0$, puis $a = b = 0$. Les trois nombres réels a, b, c sont donc tous nuls, une contradiction.

Exercice 17. On considère l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient

$$\forall\, n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On note v la suite numérique réelle appartenant à ce sous-espace et vérifiant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$. On note de même w la suite numérique réelle vérifiant $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$. Montrer que le système $\{v, w\}$ est un système libre et générateur de ce sous-espace vectoriel.

On considère l'ensemble des suites numériques

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{(u_n)_{n\geq 0}\} = \{(u_0, u_1, u_2, \dots)\},$$

qui est muni d'une structure d'espace vectoriel par la somme vectorielle

$$(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0},$$
$$\text{soit } (u_0, u_1, u_2, \dots) + (v_0, v_1, v_2, \dots) = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots),$$

et la multiplication par un scalaire

$$\lambda \cdot (u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0},$$
$$\text{soit } \lambda \cdot (u_0, u_1, u_2, \dots) = (\lambda u_0, \lambda u_1, \lambda u_2, \dots).$$

Les suites qui vérifient la relation de récurrence forment le sous-espace vectoriel suivant

$$E = \{(u_n)_{n\geq 0} \mid \forall\, n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}.$$

Il est facile de montrer que la somme des deux suites dans E, ou la multiplication par un scalaire d'une suite dans E est encore dans E. D'ailleurs on remarque que tout élément u dans E est uniquement déterminé par les deux premières coordonnées u_0 et u_1 : si deux éléments coïncident sur les deux premières coordonnées, par la relation de récurrence ils coïncideront sur toutes les coordonnées. Ainsi on obtient les suites v et w déterminés par $(v_0, v_1) = (1, 0)$ et $(w_0, w_1) = (0, 1)$. Il s'agit maintenant de démontrer que $\{v, w\}$ forme une base de E.
D'abord pour montrer que $\{v, w\}$ est générateur, on vérifie que tout $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ s'écrit comme une combinaison linéaire

$$av + bw = a(1, 0, 1, \dots) + b(0, 1, 1, \dots) = (a, b, a + b, \dots).$$

Clairement si l'on pose $a = u_0$ et $b = u_1$, les deux suites u et $av + bw$ coïncideront sur les deux premières coordonnées et donneront donc la même suite. Donc

$$u = u_0 \cdot v + u_1 \cdot w.$$

Puis on montre que $\{v, w\}$ est libre, autrement dit, il n'existe pas de relation de dépendance linéaire entre eux. Si l'on pose

$$0 = (0, 0, 0, \dots) = av + bw = (a, b, a + b, \dots),$$

il est clair que a et b sont forcément tous les deux nuls, d'où la conclusion.

Remarque. On a vu que le sous-espace E est de dimension 2 admettant une base $\{v, w\}$. Il est possible de choisir d'autres bases. Considérons l'équation quadratique

$$X^2 = X + 1$$

qui admet deux racines $\lambda, \mu = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ($\lambda = 1,618\dots$ et $\mu = -0,618\dots$). Alors il est facile de vérifier que

$$v' = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \text{ et } w' = (1, \mu, \mu^2, \mu^3, \dots)$$

sont tous les deux des suites dans E. Comme $\lambda \neq \mu$, ces deux suites forment aussi une base $\{v', w'\}$ de E, donc toute suite dans E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de v' et w'

$$u = av' + bw'.$$

En particulier on a la formule qui décrit le terme général de u

$$\forall\, n \geq 0,\ u_n = a\lambda^n + b\mu^n.$$

Par exemple la suite $w = (0, 1, 1, 2, 3, 5\dots)$ (la suite de Fibonacci) admet la formule suivante

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\mu^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Cette formule notamment nous permet d'étudier le comportement de la croissance de w_n : lorsque n tend vers ∞, le terme μ^n tend vers 0 car $|\mu| < 1$, donc la croissance est gouvernée par λ^n. Autrement dit, la suite w_n croît comme une suite géométrique.

Exercice 20. On va considérer l'ensemble $\mathbf{R}$ comme un espace vectoriel $\mathbf{Q}$ (cela signifie que les « scalaires » sont exclusivement des nombres rationnels).

— Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas proportionnel à 1.

— Soit x, y deux rationnels tels que $x + y\sqrt{2} \neq 0$. Montrer que le nombre réel

$$\frac{1}{x + y\sqrt{2}}$$

est une combinaison linéaire de 1 et $\sqrt{2}$.

— Soit $\mathbf{K}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de 1 et $\sqrt{2}$. Montrer que $\mathbf{K}$ est un corps pour les opérations d'addition et de multiplication usuelles.

On considère $\mathbf{R}$ comme un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, donc une combinaison linéaire de deux éléments u, v serait une somme de forme $pu + qv$, avec $p, q \in \mathbf{Q}$ des nombres rationnels au lieu de nombres réels quelconques.

— Si $\sqrt{2}$ était proportionnel à 1, on aurait un nombre rationnel $q \in \mathbf{Q}$ tel que

$$\sqrt{2} = q \cdot 1 = q.$$

Donc q est égal à $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel, une contradiction. On conclut que $\{1, \sqrt{2}\}$ forme un système libre dans $\mathbf{R}$.

— Si $x, y \in \mathbf{Q}$ ne sont pas tous nuls, comme $\{1, \sqrt{2}\}$ est libre, on sait que $x + y\sqrt{2}$ est aussi non nul. On peut donc considérer le nombre réel

$$\frac{1}{x + y\sqrt{2}}.$$

On se sert de la formule $(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = A - B$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x + y\sqrt{2}} &= \frac{x - y\sqrt{2}}{(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})} \\
&= \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} \\
&= \frac{x}{x^2 - 2y^2} \cdot 1 + \left(-\frac{y}{x^2 - 2y^2}\right) \cdot \sqrt{2} \\
&= p \cdot 1 + q \cdot \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ici les nombres $p := \frac{x}{x^2 - 2y^2}$ et $q := -\frac{y}{x^2 - 2y^2}$ sont clairement encore des nombres rationnels. On a donc écrit $\frac{1}{x + y\sqrt{2}}$ comme une combinaison linéaire de 1 et $\sqrt{2}$.

— On considère le sous-ensemble

$$\mathbf{K} = \left\{ p \cdot 1 + q \cdot \sqrt{2} \;\middle|\; p, q \in \mathbf{Q} \right\}.$$

Pour deux éléments $p + q\sqrt{2}$ et $p' + q'\sqrt{2}$ dans $\mathbf{K}$,

— Leur somme $(p + q\sqrt{2}) + (p' + q'\sqrt{2}) = (p + p') + (q + q')\sqrt{2}$ appartient à $\mathbf{K}$;

— L'inverse additif $-(p + q\sqrt{2}) = (-p) + (-q)\sqrt{2}$ appartient à $\mathbf{K}$;

— Le produit
$$(p+q\sqrt{2})(p'+q'\sqrt{2}) = (pp'+2qq') + (pq'+p'q)\sqrt{2}$$
appartient à $\mathbf{K}$;

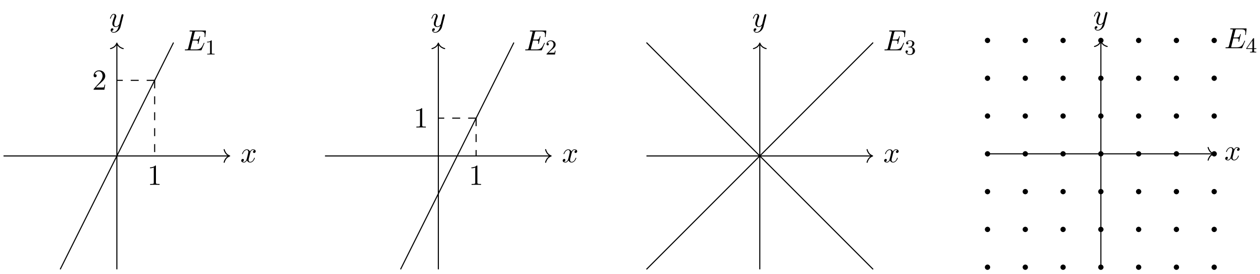
— Pour p, q non tous nuls, l'inverse multiplicatif $1/(p+q\sqrt{2})$ appartient à $\mathbf{K}$ par la question précédente.

Donc $\mathbf{K}$ forme ce qu'on appelle un *corps*, qui est en fait un sous-corps de $\mathbf{R}$. Souvent on la note comme $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, qui signifie que c'est le corps obtenu en ajoutant $\sqrt{2}$ dans $\mathbf{Q}$.

Feuille Espaces vectoriels n°1, §2

Exercice 2. Dans $\mathbf{R}^2$, les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

a) $E_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$;
b) $E_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x - y = 1\}$;
c) $E_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$;
d) $E_4 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.



a) C'est un sous-ensemble défini par une équation linéaire homogène : il est donc un sous-espace vectoriel, qui corresponde géométriquement à une droite passant par l'origine. On peut vérifier des deux propriétés

— Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux vecteurs dans E_1. On a alors
$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 = 0 \\ 2x_2 - y_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2(x_1+x_2) - (y_1+y_2) = 0.$$
La somme (x_1+x_2, y_1+y_2) appartient donc à E_1.

— Soit (x,y) un vecteur dans E_1 et soit $\lambda \in \mathbf{R}$ un scalaire réel. On a
$$2x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda x - \lambda y = 0.$$
Donc $(\lambda x, \lambda y)$ appartient aussi à E_1.

b) Le sous-ensemble est défini par une équation linéaire non homogène. C'est une droite dans $\mathbf{R}^2$ qui ne passe pas par l'origine : $2 \cdot 0 - 0 = 0 \neq 1$. Cela est déjà suffisant pour conclure que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel. On étudie les deux propriétés

— Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux vecteurs dans E_2. On a alors
$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 = 1 \\ 2x_2 - y_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2(x_1+x_2) - (y_1+y_2) = 2.$$
La somme (x_1+x_2, y_1+y_2) est donc jamais dans E_2.

— Soit (x, y) un vecteur dans E_2 et soit $\lambda \in \mathbf{R}$ un scalaire réel. On a

$$2x - y = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda x - \lambda y = \lambda.$$

Donc $(\lambda x, \lambda y)$ appartient à E_2 si et seulement si $\lambda = 1$. Cela peut être interprété géométriquement : l'intersection de la droite E_2 avec la droite $\operatorname{Vect}\big((x, y)\big)$ consiste d'un seul point qui est (x, y).

c) On peut décomposer $x^2 - y^2$ en un produit $(x + y)(x - y)$. Le sous-ensemble E_3 est donc la réunion des deux droites $x + y = 0$ et $x - y = 0$.

— Si l'on prend un vecteur dans chaque droite, la somme ne serait pas forcément dans la réunion. Par exemple on peut prendre $(1, 1), (1, -1) \in E_3$ mais la somme $(2, 0)$ n'est pas dans E_3. Donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel.

— La multiplication par scalaire est toutefois respectée : si $(x, y) \in E_3$, on a

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 - y^2) = 0,$$

donc $(\lambda x, \lambda y)$ appartient à E_3.

d) Le sous-ensemble E_4 est composé des points entiers (x, y) avec $x, y \in \mathbf{Z}$.

— La somme des deux points entiers est clairement encore entière et donc appartient à E_4.

— La multiplication par scalaire n'est pas satisfaite dans ce cas : par exemple on peut prendre $(1, 0)$ qui est dans E_4 et le multiplier par $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$. Le point $(\frac{1}{2}, 0)$ n'est pas entier et n'appartient donc pas à E_4. On voit que E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Feuille Espaces vectoriels n°2, §1

Exercice 1. Dans $\mathbf{R}^3$, considérons le sous-ensemble

$$P = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \bigm| x - 2y + 3z = 0\big\}.$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non mutuellement proportionnels, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

L'équation de P peut être considérée comme une équation linéaire, qui est déjà sous forme échelonnée. On sait donc que les solutions sont

$$\begin{cases} x = 2y - 3z \\ y \in \mathbf{R} \\ z \in \mathbf{R} \end{cases}$$

où y et z peuvent prendre des valeurs librement. On peut donc prendre les valeurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ pour (y, z) et obtenir $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 0, 1)$. Tout élément dans P, autrement dit, toute solution (x, y, z) de l'équation peut ainsi s'écrire comme

$$(x, y, z) = y \cdot v + z \cdot w.$$

Remarque. En général, pour un sous-espace P de $\mathbf{R}^n$ donné par un système d'équations linéaires, les éléments appartenant à ce sous-espace sont exactement les solutions du système. En résolvant le système, les solutions contiennent des variables libres $y_1, y_2, \ldots$ et des autres variables $x_1, x_2, \ldots$ qui en dépendent. Pour chaque variable libre y_i, on peut obtenir une solution $y_i = 1$, $y_j = 0$ pour $j \neq i$. Ces solutions forment une base de P, et on voit que la dimension de P est égal au nombre des variables libres.

Exercice 2. Dans $\mathbf{R}^3$, considérons le sous-ensemble

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; 2x - y - 2z = 0\right\}.$$

Déterminer sa dimension et en trouver une base.

Les solutions pour cette équation sont

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + z \\ y \in \mathbf{R} \\ z \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

Les variables y et z peuvent prendre des valeurs librement. On peut obtenir deux solutions en prenant $(y, z) = (1, 0)$ et $(0, 1)$: $v = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ et $w = (1, 0, 1)$. Donc P est de dimension 2, et $\{v, w\}$ en est une base.

Exercice 3. Dans $\mathbf{R}^4$, trouver une base pour le sous-espace vectoriel formé des (x, y, z, t) qui vérifient $x - y = 0$ et $z - t = 0$.

Les solutions pour cette équation sont

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbf{R} \\ z = t \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

où les variables y et t peuvent prendre des valeurs librement et les variables x et z en dépendent. On peut obtenir deux solutions en prenant $(y, t) = (1, 0)$ et $(0, 1)$: les vecteurs $v = (1, 1, 0, 0)$ et $w = (0, 0, 1, 1)$ forment une base de ce sous-espace.

Exercice 4. Dans $\mathbf{R}^4$, déterminer la dimension du sous-ensemble

$$P = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x + y + 2z + 3t = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}\right\}$$

et en trouver une base.

On résout le système en faisant une élimination de Gauss

$$\begin{cases} x \qquad - z + 3t = 0 \\ \qquad y + 4z - 3t = 0 \end{cases}.$$

Les solutions pour cette équation sont

$$\begin{cases} x = z - 3t \\ y = -4z + 3t \\ z \in \mathbf{R} \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

où les variables z et t peuvent prendre des valeurs librement et les variables x et y en dépendent. On peut obtenir deux solutions en prenant $(z,t) = (1,0)$ et $(0,1)$: les vecteurs $v = (1,-4,1,0)$ et $w = (-3,3,0,1)$ forment une base de ce sous-espace P, qui est donc de dimension 2.

Exercice 13. Pour le sous-espace suivant de $\mathbf{R}^3$, donner une base parmi la famille génératrice donnée, déterminer la dimension et un système d'équations minimal, puis compléter la base en une base de $\mathbf{R}^3$

$$E = \mathrm{Vect}((-1,1,1),(-1,1,2)).$$

Les deux vecteurs ne sont pas proportionnels et forment donc une base de E. On a ainsi $\dim E = 2$. Pour l'équation on regarde la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2b-c \\ 0 & 1 & -b+c \\ \hline 0 & 0 & a+b \end{array}\right).$$

Le plan E est donc donné par l'équation $a+b=0$:

$$E = \left\{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; a+b=0\right\}.$$

Pour compléter $(-1,1,1),(-1,1,2)$ en une base de $\mathbf{R}^3$, il suffit de prendre un vecteur qui n'est pas dans E, par exemple $(1,0,0)$. On a donc une base $\{(-1,1,1),(-1,1,2),(1,0,0)\}$ pour $\mathbf{R}^3$.

En particulier, le sous-espace $\mathrm{Vect}((1,0,0))$—la droite engendrée par $(1,0,0)$—donne un supplémentaire de E dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 14. Pour le sous-espace suivant de $\mathbf{R}^3$, en déterminer une base, la dimension et un système d'équations minimal

$$E = \{(2x-y, x+y, -x+y) \mid x,y \in \mathbf{R}\}.$$

D'une manière équivalente, c'est le sous-espace engendre par les vecteurs $(2, 1, -1)$ et $(-1, 1, 1)$, car tout élément s'écrit comme

$$(2x - y, x + y, -x + y) = x(2, 1, -1) + y(-1, 1, 1).$$

On regarde donc la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & b \\ -1 & 1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{b-c}{2} \\ 0 & 1 & \frac{b+c}{2} \\ \hline 0 & 0 & a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c \end{array}\right)$$

Donc c'est un sous-espace de dimension 2 donné par l'équation $a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c = 0$. Pour une base, on a plusieurs choix : les vecteurs $(2, 1, -1)$ et $(-1, 1, 1)$ ne sont pas proportionnels et forment donc déjà une base ; soit on peut procéder comme dans les exercices précédents et prendre $(b, c) = (1, 0)$ et $(0, 1)$, cela donne une autre base $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ et $(-\frac{3}{2}, 0, 1)$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel réel, et considérons deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E. Montrer que

$$\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2.$$

Rappelons que la dimension d'un espace vectoriel est égale au nombre de vecteurs dans une base.

On prend d'abord une base $\{u_i\} = \{u_1, \dots, u_d\}$ de $F_1 \cap F_2$, où l'on suppose que $\dim(F_1 \cap F_2) = d$. Le système $\{u_1, \dots, u_d\}$ étant libre dans F_1, on peut le compléter en une base de F_1 en ajoutant des vecteurs $v_1, \dots, v_a \in F_1$: cela donne $\{u_i, v_i\} = \{u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_a\}$ comme une base de F_1 et on a $\dim F_1 = d + a$. Pareil on peut trouver des vecteurs $w_1, \dots, w_b \in F_2$ tels que $\{u_i, w_i\} = \{u_1, \dots, u_d, w_1, \dots, w_b\}$ forme une base de F_2 et $\dim F_2 = d + b$.

Maintenant il faut montrer que

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$$

qui vaut $(d + a) + (d + b) - d = d + a + b$. Pour ce faire on va montrer que $\{u_i, v_i, w_i\} = \{u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_a, w_1, \dots, w_b\}$ forme une base de $F_1 + F_2$.

— C'est un système générateur : tout élément de $F_1 + F_2$ est une somme $f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$. Or f_1 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\{u_i, v_i\}$, et f_2 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\{u_i, w_i\}$, on voit que $f_1 + f_2$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\{u_i, v_i, w_i\}$.

— C'est une système libre : supposons qu'il existe des valeurs réelles λ_i, μ_i, ν_i telles que

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_a v_a) + (\nu_1 w_1 + \cdots + \nu_b w_b) \\ &= \underbrace{\sum \lambda_i u_i + \sum \mu_i v_i}_{\in F_1} + \underbrace{\sum \nu_i w_i}_{\in F_2}. \end{aligned}$$

On va montrer que λ_i, μ_i et ν_i sont obligatoirement toutes nulles. À partir de l'égalité on peut écrire de deux manières différentes le vecteur suivant

$$F_1 \ni \quad \sum \lambda_i u_i + \sum \mu_i v_i = -\sum \nu_i w_i \quad \in F_2.$$

C'est un vecteur dans $F_1 \cap F_2$, il s'écrit donc comme une combinaison linéaire des $\{u_i\}$: il existe des valeurs λ_i' telles que

$$\sum \lambda_i u_i + \sum \mu_i v_i = \sum \lambda_i' u_i.$$

Mais comme $\{u_i, v_i\}$ est libre, cela entraîne que $\mu_i = 0$ et $\lambda_i = \lambda_i'$. Par un argument similaire on peut montrer que ν_i sont toutes nulles et on a

$$0 = \sum \lambda_i u_i.$$

Comme $\{u_i\}$ est libre, cela entraîne finalement que λ_i sont toutes nulles. Donc λ_i, μ_i, ν_i sont forcément toutes nulles.

Remarque. Pour que deux sous-espaces soient supplémentaires, il faut premièrement que la somme de leurs dimensions soit égale à la dimension de l'espace total. Si c'est le cas, pour conclure on peut soit montrer que l'intersection est de dimension 0 (c'est-à-dire qu'elle ne contient que le vecteur 0), soit montrer que la somme des deux sous-espaces est l'espace total, qui sont équivalents par la conclusion de cet exercice.

Feuille Espaces vectoriels n°2, §2

Exercice 1. Soit E_1 le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\{(1,3,0,4),(2,0,1,2)\}$ et E_2 le sous-espace engendré par $\{(1,1,2,3),(4,-1,0,2)\}$. E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$?

E_1 et E_2 sont supplémentaires si et seulement si les quatre vecteurs forment une base de $\mathbf{R}^4$. On étudie donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que les quatre vecteurs forment bien une base.

Exercice 2. Soit E_1 le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\{(1,-1,0,1),(0,2,1,0)\}$ et E_2 le sous-espace engendré par $\{(0,6,-1,4),(3,3,1,5)\}$. E_1

(1) Caractériser $E_1 \cap E_2$.

(2) Donner une base de $E_1 + E_2$.

(3) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

Notons les quatre vecteurs par v_1, v_2, v_3, v_4. On étudie la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & a \\ -1 & 2 & 6 & 3 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 4 & 5 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-a+4c+d}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-a+d}{4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3a+b-2c-2d \end{array}\right).$$

(1) Tout vecteur dans E_1 est une combinaison linéaire de v_1, v_2, et tout vecteur dans E_2 est une combinaison linéaire de v_3, v_4. Un vecteur v dans $E_1 \cap E_2$ peut donc s'écrire comme

$$v = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 = z \cdot v_3 + t \cdot v_4.$$

On a alors une relation de dépendance linéaire

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 - z \cdot v_3 - t \cdot v_4 = 0.$$

Rappelons que toute solution du système donne une relation de dépendance linéaire pour les vecteurs en question. Ici si l'on suppose que les variables sont $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = -z, x_4 = -t$, la variable x_4 peut prendre des valeurs librement. On suppose donc que $x_4 = 2$ et obtient une solution

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 2 \end{cases}.$$

Cela nous donne une relation de dépendance linéaire

$$-6v_1 - 3v_2 - v_3 + 2v_4 = 0$$

ou

$$6v_1 + 3v_2 = -v_3 + 2v_4 = (6, 0, 3, 6).$$

Donc $E_1 \cap E_2$ est la droite engendrée par le vecteur $(6, 0, 3, 6)$ (ou $(2, 0, 1, 2)$).

(2) Dans la forme échelonnée on voit que les pivots apparaissent dans les colonnes $1, 2, 3$, donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $E_1 + E_2$.

(3) On sait que l'équation de $E_1 + E_2$ est $3a + b - 2c - 2d = 0$. Pour trouver un supplémentaire, il suffit de prendre un vecteur qui n'est pas contenu dans E, c'est-à-dire qui ne vérifie pas cette équation. On peut par exemple prendre le vecteur $(1, 0, 0, 0)$. Le sous-espace $\mathrm{Vect}((1, 0, 0, 0))$—la droite engendrée par $(1, 0, 0, 0)$—donne un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 3. Dans $\mathbf{R}^4$ considérons le sous-ensemble E des (x, y, z, t) tels que $x + y + z + t = 0$ et le sous-ensemble F des (x, y, z, t) tels que $x = y = z = t$.

(1) Montrer que E et F sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

(2) Déterminer des bases de E et de F.

---

(1) Il est facile de voir que E et F sont effectivement des sous-espaces de $\mathbf{R}^4$: E est un hyperplan donné par l'équation $x+y+z+t=0$ et il est de dimension 3 ; F est la droite engendrée par $(1,1,1,1)$ et donc de dimension 1.

Pour montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$, il suffit de montrer que $E \cap F = \{0\}$, grâce à la conclusion de l'exercice 9 :

$$\dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F = 3 + 1 = 4.$$

Un vecteur $v = (x,y,z,t)$ est dans $E \cap F$ si et seulement s'il vérifie à la fois $x+y+z+t=0$ et $x=y=z=t$. Cela entraîne que $x=y=z=t=0$ et $v=(0,0,0,0)$. Donc $E \cap F$ est effectivement l'ensemble $\{0\}$ (autrement dit, l'origine).

(2) Pour une base de E, comme les trois variables y,z,t sont libres, on peut prendre $(y,z,t) = (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. On a donc une base $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$.

Pour F, il est clair que $(1,1,1,1)$ est un vecteur dans F, qui donne donc une base.

Exercice 8. Trouver la dimension, des bases et des équations pour les espaces $E \cap F$ et $E+F$, où $E = \operatorname{Vect}\big((1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)\big)$ et $F = \operatorname{Vect}\big((1,2,2),(2,3,-1),(1,3,-3)\big)$.

On étudie d'abord les deux espaces E et F séparément pour trouver leurs dimensions et des bases. Pour E, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les premiers deux vecteurs $v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,1,-1)$ forment une base de E. Pareil pour F, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les premiers deux vecteurs $v_3 = (1,2,2), v_4 = (2,3,-1)$ forment une base de F. Maintenant on étudie la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & -1 & 2 & -1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -4a+3b-c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2a-b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3a-2b+c \end{array}\right).$$

Donc $E+F$ est l'espace total $\mathbf{R}^3$ (la colonne (a,b,c) dans la matrice alors ne sert à rien ; si $E+F$ était de dimension 2, elle servirait à déterminer l'équation de $E+F$). De plus on a une relation de dépendance linéaire

$$-2v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = 0.$$

Cela entraîne que

$$2v_1 + v_2 = v_3 + v_4 = (3,5,1)$$

est un vecteur dans $E \cap F$. Par l'égalité

$$\dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F,$$

on sait que $E \cap F$ est un sous-espace de dimension 1. C'est donc la droite engendrée par le vecteur $(3,5,1)$. Pour donner ses équations, on peut prendre par exemple les équations $5a - 3b = 0$ et $a - 3c = 0$.

Exercice 6.

(1) Montrer que les vecteurs $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,2)$ et $u_3 = (3,1,1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.

(2) Trouver les coordonnées du vecteur $w = (1,2,3)$ dans cette base.

(3) Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (2,1,0)$ forment une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^3$.

(4) Trouver les coordonnées des vecteurs u_i dans la base $\mathcal{B}'$. En déduir les coordonnées du vecteur $w = (1,2,3)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

---

(1) Il faut montrer que ces trois vecteurs u_i sont libres. On regarde la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & -7/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien de rang 3. Donc on a effectivement une base de $\mathbf{R}^3$.

(2) Pour exprimer w en une combinaison linéaire de u_i, on regarde la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & -7/3 & 3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 34/7 \\ 0 & 1 & 0 & 15/7 \\ 0 & 0 & 1 & -9/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & 15/7 \\ 0 & 0 & 1 & -9/7 \end{array}\right).$$

Donc

$$w = \tfrac{4}{7}u_1 + \tfrac{15}{7}u_2 - \tfrac{9}{7}u_3,$$

les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B} = \{u_i\}$ sont $(4/7, 15/7, -9/7)$.

(3) On regarde la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 3. Les $\{v_i\}$ sont libres et forment donc une base.

(4) On calcule simutanement les coordonnées des trois vecteurs u_i dans la base $\mathcal{B}'$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & v_2 & v_3 & u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On obtient

$$u_1 = 3/2v_1 + 1/2v_3, \quad u_2 = v_1 + 2v_2, \quad u_3 = v_2 + v_3.$$

Autrement dit, les coordonnées de u_i $(i = 1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}' = \{v_i\}$ sont respectivement

$$(3/2, 0, 1/2), \quad (1, 2, 0), \quad (0, 1, 1).$$

Pour le vecteur w, comme on connait déjà l'exprimer en terme de u_i, on obtient

$$w = (\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{7} + 1 \cdot \tfrac{15}{7})v_1 + (2 \cdot \tfrac{15}{7} - 1 \cdot \tfrac{9}{7})v_2 + (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{7} - 1 \cdot \tfrac{9}{7})v_3 = 3v_1 + 3v_2 - v_3$$

soit une multiplication de matrice

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/7 \\ 15/7 \\ -9/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}' = \{v_i\}$ sont $(3, 3, -1)$.

Remarque. Ce calcul est ce que l'on appelle un *changement de base.*