Séance 23 octobre

Exercice 4.

(1) Déterminer le développement limité de $\frac{1}{\sqrt{\sin x + \cos x}}$ en 0 à l'ordre 4 (on va seulement développer jusqu'à l'ordre 3).

Pour commencer, on écrit une racine carrée $\sqrt{A}$ sous forme $A^{\frac{1}{2}}$. La fonction s'écrit donc

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x + \cos x}} = (\sin x + \cos x)^{-\frac{1}{2}}.$$

On applique alors les développements limités de $\sin x$ et $\cos x$ jusqu'à l'ordre 3

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= (x - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)) + (1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)) \\ &= 1 + \underbrace{x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)}_{\text{ramplacé par une variable } u \to 0} \\ &= 1 + u.\end{aligned}$$

Dans le changement de variable, on voit que u est égale à x plus des termes de degré supérieur que 2, donc $u = x + o_0(x)$ et ainsi $u \overset{0}{\sim} x$ et $o_0(u^3) = o_0(x^3)$. Pour un développement en terme de x à l'ordre 3, il suffit d'avoir un développement en terme de u à l'ordre 3. Il faut donc développer la fonction $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$ jusqu'à l'ordre 3. Rappelons qu'on a le développement limité suivant

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\times 1}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3\times 2\times 1}u^3 + o_0(u^3).$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{8}u^2 - \tfrac{5}{16}u^3 + o_0(u^3).$$

On remplace maintenant u par son expression $x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$ et obtient :

$$\begin{aligned}1 \quad & - \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)) \\ & + \tfrac{3}{8}(x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3))^2 \\ & - \tfrac{5}{16}(x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3))^3 \quad + o_0(x^3).\end{aligned}$$

Pour le carré, on a

$$(A+B)^2 = A^2 + 2A\cdot B + B^2$$

donc

$$\begin{aligned}(x + (\underbrace{-\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)}_{B}))^2 &= x^2 + 2x\cdot(-\tfrac{1}{2}x^2) + o_0(x^3) \\ &= x^2 - x^3 + o_0(x^3)\end{aligned}$$

où on n'a gardé que les termes de degré ≤ 3 et on a mis tout le reste dans l'expression $o_0(x^3)$. Pareil on a

$$(x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3))^3 = x^3 + o_0(x^3).$$

Pour finir, on obtient

$$\begin{aligned} 1 \quad & - \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)) \\ & + \tfrac{3}{8}(x^2 - x^3 + o_0(x^3)) \\ & - \tfrac{5}{16}(x^3 + o_0(x^3)) \quad + o_0(x^3) \\ = \ & \boxed{1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{8}x^2 - \tfrac{29}{48}x^3 + o_0(x^3).} \end{aligned}$$

On peut vérifier le résultat ici.

---

(2) Déterminer le développement limité de $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ **en** 0 **à l'ordre** 4**.**

C'est une fonction composée, on veut d'abord obtenir le développement limité de $\frac{\sin x}{x}$, qui est celui de $\sin x$ divisé par x.

Notons que si l'on développait $\sin x$ jusqu'à l'ordre 4, après avoir divisé par x on aurait

$$\tfrac{\sin x}{x} = \tfrac{x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4)}{x} = 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + o_0(x^3)$$

qui est à l'ordre 3 et donc n'est pas suffisant.

On développe donc la fonction $\sin x$ jusqu'à l'ordre 5

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_0(x^5)}{x} = 1 + \underbrace{(-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + o_0(x^4))}_{\text{remplacé par une variable } u \to 0} = 1 + u.$$

Dans ce changement de variable, on a $u \overset{0}{\sim} -\frac{1}{6}x^2$, donc $o_0(u^2) = o_0(x^4)$. Donc pour développer en terme de x à l'ordre 4, il suffit de développer en terme de u jusqu'à l'ordre 2. Rappelons que le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0 est

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \cdots + o_0(u^k) \\ &= u - \tfrac{1}{2}u^2 + o_0(u^2). \end{aligned}$$

On remplace u par son expression $-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o_0(x^4)$ et obtient :

$$(-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + o_0(x^4)) - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + o_0(x^4))^2 + o_0(x^4).$$

Pour le carré, il est clair que seulement le premier terme $\left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2 = \frac{1}{36}x^4$ est de degré ≤ 4, soit

$$(-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + o_0(x^4))^2 = \tfrac{1}{36}x^4 + o_0(x^4).$$

On conclut que

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= (-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + o_0(x^4)) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{36}x^4 + o_0(x^4)) + o_0(x^4) \\ &= \boxed{-\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{180}x^4 + o_0(x^4).} \end{aligned}$$

On peut vérifier le résultat ici.

---

(3) Déterminer le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 à l'ordre 4.
Pour commencer, il faut écrire la fonction sous la forme

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x}}.$$

(Rappelons que l'on fait exactement la même chose pour calculer la dérivée ; en particulier $\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)'$ n'est pas du tout égale à $\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$: ce n'est pas un polynôme !)
On développe maintenant la fonction $\ln(1+x)$. Il faut faire attention à l'ordre : comme il faut ensuite diviser par x, pour la même raison que dans la question précédente, il faut développer jusqu'à l'ordre 5. Donc

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\cdot\tfrac{1}{x} &= \left(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5+o_0(x^5)\right)\cdot\tfrac{1}{x}\\ &= 1-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{1}{4}x^3+\tfrac{1}{5}x^4+o_0(x^4),\end{aligned}$$

et

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+o_0(x^4)}.$$

Maintenant on veut appliquer le développement limité pour la fonction e^u, mais il faut faire attention : la formule

$$e^u = 1+u+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{6}u^3+\tfrac{1}{24}u^4+o_0(u^4)$$

est seulement valable pour une variable u qui tend vers 0, alors que l'exposant $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+o_0(x^4)$ qu'on a ici tend vers 1. On enlève donc la constante 1 et met le reste comme une variable u

$$\begin{aligned}e^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+o_0(x^4)} &= e^1\cdot e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+o_0(x^4)}}_{u\to 0}\\ &= e\cdot e^u\\ &= e\cdot(1+u+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{6}u^3+\tfrac{1}{24}u^4+o_0(u^4)).\end{aligned}$$

Notons que $u \overset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x$, donc $o_0(u^4) = o_0(x^4)$. On peut finir le calcul en remplaçant u par son expression $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+o_0(x^4)$, qui est sans difficulté mais un peu pénible. Ici je fais le calcul jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= e\cdot(1+u+\tfrac{1}{2}u^2+o_0(u^2))\\ &= e\cdot(1+(-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2+o_0(x^2))\\ &\qquad +\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2+o_0(x^2))^2 \quad +o_0(x^2))\\ &= e\cdot(1+(-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2+o_0(x^2))+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}x^2+o_0(x^2))+o_0(x^2))\\ &= \boxed{e\cdot(1-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{11}{24}x^2+o_0(x^2)).}\end{aligned}$$

On peut vérifier le résultat ici. Remarquons en particulier que le terme constant est égal à e, qui donne la limite

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Je corrige quelques exercices, où l'on fait très souvent des erreurs typiques.

Exercice 6.

(5) Donner le développement limité de $\ln(2+2x+x^2)$ en 0 à l'ordre 3.
Ici on a une fonction composée avec ln, donc on a envie d'appliquer le développement limité

$$\ln(1+u) = u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 + o_0(u^3).$$

On est tenté immédiatement d'écrire $2+2x+x^2$ sous forme $1+(1+2x+x^2)$ et de remplacer $1+2x+x^2$ par une variable u, mais cela ne marchera pas ! Rappelons que le développement limité de $\ln(1+u)$ n'est valable que lorsque la variable u tend vers 0, alors que la fonction $1+2x+x^2$ tend vers 1.

La méthode correcte est d'écrire

$$\begin{aligned}\ln(2+2x+x^2) &= \ln(2\cdot(1+x+\tfrac{1}{2}x^2))\\ &= \ln 2 + \ln(1+x+\tfrac{1}{2}x^2).\end{aligned}$$

En d'autres termes, on extrait la constante 2 pour avoir la somme de 1 et une valeur qui tend vers 0. Maintenant on peut remplacer $x+\frac{1}{2}x^2$ par u et procéder comme d'habitude

$$\begin{aligned}\ln(2+2x+x^2) &= \ln 2 + \ln(1+x+\tfrac{1}{2}x^2)\\ &= \ln 2 + \ln(1+u)\\ &= \ln 2 + u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 + o_0(u^3)\\ &= \ln 2 + (x+\tfrac{1}{2}x^2) - \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{2}x^2)^2 + \tfrac{1}{3}(x+\tfrac{1}{2}x^2)^3 + o_0(x^3)\\ &= \boxed{\ln 2 + x - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3).}\end{aligned}$$

On peut vérifier le résultat ici.

---

(9) Donner le développement limité de $\dfrac{3x^2+3x+2}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 4.
On va appliquer le développement limité de $\frac{1}{1+u}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o_0(u^4),$$

ou, de manière équivalente, le développement limité de $\frac{1}{1-u}$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o_0(u^4).$$

En tout cas il faut faire attention au signe.
En remplaçant x^2 par u, on a

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+3x+2}{1+x^2} &= (3x^2+3x+2)\cdot\frac{1}{1+u}\\ &= (3x^2+3x+2)\cdot(1-u+u^2+o_0(u^2)),\end{aligned}$$

où, comme $u = x^2$, on a $o_0(u^2) = o_0(x^4)$. Puis

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+3x+2}{1+x^2} &= (3x^2+3x+2)\cdot(1-x^2+x^4+o_0(x^4))\\ &= \boxed{2+3x+x^2-3x^3-x^4+o_0(x^4).}\end{aligned}$$

On peut vérifier le résultat ici.

---

(10) Donner le développement limité de $\dfrac{3x+1}{2+3x+x^2}$ en 0 à l'ordre 3.

Cette question resemble à la précédente. On est donc tenté d'écrire $2+3x+x^2 = 1+(1+3x+x^2)$ et de remplacer $1+3x+x^2$ par u. Encore une fois cela ne marche pas, car le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ n'est valable que lorsque u tend vers 0.

Donc on doit d'abord extraire la constante 2

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{2+3x+x^2} &= (3x+1)\cdot\frac{1}{2+3x+x^2}\\ &= (3x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot(1+\frac{3x+x^2}{2})}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(3x+1)\cdot\frac{1}{1+\frac{3x+x^2}{2}}.\end{aligned}$$

Maintenant on peut remplacer $\frac{3x+x^2}{2}$ par u et obtient

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{2+3x+x^2} &= \tfrac{1}{2}\cdot(3x+1)\cdot\frac{1}{1+u}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(3x+1)\cdot(1-u+u^2-u^3+o_0(u^3))\\ &= \boxed{\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{11}{8}x^2+\tfrac{27}{16}x^3+o_0(x^3).}\end{aligned}$$

On peut vérifier le résultat ici.

Un exemple de développement limité en $+\infty$.

Exercice 9.

(1) Déterminer le développement limité de $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 2 ; que peut-on en déduire pour la branche infinie correspondante ?

Il s'agit tout simplement de faire un changement de variable $t=\frac{1}{x}$. Comme $x\to+\infty$, on a $t\to 0^+$. En terme de t, le calcul du développement limité est immédiat

$$\begin{aligned}e^t\sqrt{1+t} = e^t\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}} &= (1+t+\tfrac{1}{2}t^2+o_0(t^2))(1+\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{8}t^2+o_0(t^2))\\ &= 1+\tfrac{3}{2}t+\tfrac{7}{8}t^2+o_0(t^2).\end{aligned}$$

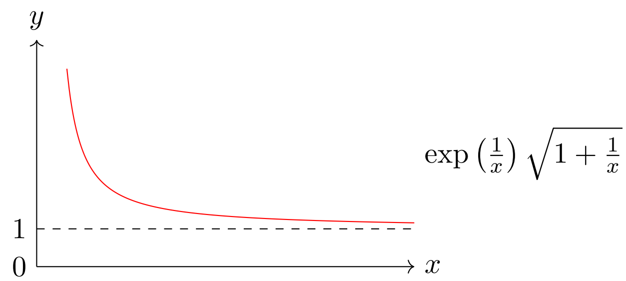
En remplaçant t par $\frac{1}{x}$, on obtient

$$\exp\left(\tfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} = 1+\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{x}+\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{1}{x^2}+o_0\left(\tfrac{1}{x^2}\right).$$

On peut en déduire que la fonction admet une limite finie qui vaut 1

$$\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\tfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} = 1.$$

La droite horizontale $y = 1$ est donc une droite asymptote pour la branche infinie. De plus le graphe de la fonction se trouve au dessus de la droite $y = 1$, car le terme suivant 1 dans le développement limité est $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$, qui est positif.



Encore une fois, il faut noter que le développement limité ne détermine que le comportement de la fonction en un seul point (qui est $+\infty$ dans cet exemple). Par exemple, aucune chose n'est dite sur le comportement en 0, où l'on voit très bien que la fonction tend vers $+\infty$.