Université Paris Diderot | **2019–2020**
MMAN2 - Analyse élémentaire II | **L1 Math, Math-Info**

Corrigé TD 3

Rappel : Une fonction f est dite *négligeable* devant une autre fonction g au voisinage d'un point c, ce qui s'écrit $f = o_c(g)$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de c tel que

$$\forall\, t \in V, |f(t)| \leq \varepsilon |g(t)|.$$

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de c, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de c sur lequel $g \neq 0$, alors cette condition revient à dire que la limite $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ est zero.
La fonction f est dite *équivalente* à g au voisinage de c, ce qui s'écrit $f \overset{c}{\sim} g$, si $f - g = o_c(g)$, autrement dit, la différence entre f et g est négligeable devant g.
De nouveau, si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de c, alors cette condition revient à dire que la limite $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ vaut 1.
La relation $\overset{c}{\sim}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que l'on a $f \overset{c}{\sim} f$, $f \overset{c}{\sim} g \Rightarrow g \overset{c}{\sim} f$, et $f \overset{c}{\sim} g, g \overset{c}{\sim} h \Rightarrow f \overset{c}{\sim} h$.

Exercice 1.

Montrer que $E(x) \overset{+\infty}{\sim} x$ et que $E(x) \overset{-\infty}{\sim} x$ où $E(x)$ désigne la fonction partie entière.

Par définition de la partie entière, on a

$$E(x) \leq x < E(x) + 1,$$

donc

$$x - 1 < E(x) \leq x.$$

Supposons d'abord que $x > 0$ on peut diviser par x et obtenir

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1.$$

Clairement $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$, donc $E(x) \overset{+\infty}{\sim} x$.

Pour $x < 0$, quand on divise par x, on inverse les sens d'inégalité :

$$1 - \frac{1}{x} > \frac{E(x)}{x} \geq 1.$$

De nouveau lorsque $x \to -\infty$ la limite à gauche est 1, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$, donc $E(x) \overset{-\infty}{\sim} x$.

Exercice 2.

1. Trouver un équivalent en 0 à $x \mapsto \cos(\sin x)$.

Comme la limite en 0 est $\lim_{x\to 0} \cos(\sin x) = 1$ qui n'est pas 0, la fonction constante 1 est donc un équivalent, i.e. $\boxed{\cos(\sin x) \overset{0}{\sim} 1.}$

1. Si deux fonctions f et g ont la même limite 0 en un point x_0, c'est-à-dire $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_o} g(x) = 0$, on ne peut pas conclure que $f \overset{x_0}{\sim} g$. Un contre-exemple tout simple est $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x$ en 0 ;
2. Il peut arriver que $f \overset{x_0}{\sim} g$ sans qu'il existe de limite en x_0, par exemple $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ en } 0 \\ \sin \frac{1}{x} \end{cases}$, et $g(x) = (1+x) \cdot f(x)$ (ou même tout simplement $g(x) = f(x)$).

2. Trouver un équivalent en 0 à $x \mapsto \sqrt{|2x - x^2|}$.

On a
$$\sqrt{|2x - x^2|} = \sqrt{2|x|} \cdot \sqrt{|1 - x/2|}.$$
Le deuxième terme a pour limite
$$\lim_{x\to 0} \sqrt{|1 - x/2|} = 1.$$
On a donc $\boxed{\sqrt{|2x - x^2|} \overset{0}{\sim} \sqrt{2|x|}.}$

3. Trouver un équivalent en 0 à $x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$.

Comme la limite de $\tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$ en 0 est $\tan \pi = 0$, on ne peut donc pas conclure comme dans la première question. Mais en π la fonction tan est dérivable avec dérivée $\tan' \pi = 1/\cos^2 \pi = 1$. Par la définition de la dérivée on a
$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot x + o_a(x - a).$$
On a donc
$$\tan u = \tan \pi + \tan' \pi \cdot (u - \pi) + o_\pi(u - \pi) = u - \pi + o_\pi(u - \pi).$$
Autrement dit, $\tan u \overset{\pi}{\sim} u - \pi$. Remplaçons u par $\frac{\pi}{2x+1}$, on obtient
$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2x+1}\right) \overset{0}{\sim} \tfrac{\pi}{2x+1} - \pi = -\tfrac{2\pi x}{2x+1} \overset{0}{\sim} -2\pi x.$$
On conclut que $\boxed{\tan\left(\tfrac{\pi}{2x+1}\right) \overset{0}{\sim} -2\pi x.}$

Remarque. On peut soit calculer directement la dérivée de cette fonction en 0, qui donne -2π :
$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2x+1}\right)' = \frac{\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)'}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)} = \frac{\frac{-2\pi}{(2x+1)^2}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)}$$
qui vaut -2π quand $x = 0$. De nouveau par la définition de la dérivée,
$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2x+1}\right) = 0 + (-2\pi) \cdot x + o_0(x) = -2\pi x + o_0(x) = -2\pi x + o_0(-2\pi x).$$

On peut donc conclure que $-2\pi x$ est un équivalent (*c.f.* aussi l'exercice 3).

4. Trouver un équivalent en 0 à $x \mapsto \ln|\sin x|$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x| = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \ln u = -\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} \ln|\sin x| = -\infty$.

On a $\sin x \overset{0}{\sim} x$, ou de manière équivalente,

$$\sin x = x + o_0(x) = x \cdot \big(1 + o_0(1)\big).$$

Donc

$$\ln|\sin x| = \ln\big(|x| \cdot |1 + o_0(1)|\big) = \ln|x| + \ln|1 + o_0(1)|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln|1 + o_0(1)| = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$, la différence $\ln|1 + o_0(1)|$ est négligeable devant $\ln|x|$, on conclut que $\boxed{\ln|\sin x| \overset{0}{\sim} \ln|x|.}$

Exercice 3.

Montrer que si f est dérivable au point x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors $f(x) - f(x_0) \overset{x_0}{\sim} (x - x_0)f'(x_0)$.

Comme on a $f'(x_0) \neq 0$, on peut faire la division

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)f'(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Alors par la définition de dérivée, la limite pour le premier terme lorsque x tend vers x_0 est exactement $f'(x_0)$. Donc la limite pour cette fraction vaut 1. On peut donc conclure que $f(x) - f(x_0) \overset{x_0}{\sim} (x - x_0)f'(x_0)$.

Remarques.

1. C'est peut-être vu comme la formule de Taylor–Young à l'ordre 1 :

   $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

   Pour obtenir la relation d'équivalence, il faut que la différence soit de $o_{x_0}\big(f'(x_0) \cdot (x - x_0)\big)$: c'est bien le cas si $f'(x_0) \neq 0$.
2. Même si ce n'est pas demandé, on peut regarder le cas $f'(x_0) = 0$. Dans ce cas la fonction à droite est identiquement nulle. Donc la seule possibilité est que la fonction à gauche l'est aussi : f est donc forcément la fonction constante qui vaut $f(x_0)$ partout. En particulier, si f est une fonction non constante mais admet une dérivée nulle en x_0, la relation d'équivalence dans cet exercice n'est jamais vraie (par exemple $x_0 = 0$ et $f(x) = x^2$).

Exercice 4.

Montrer que si $f \overset{x_0}{\sim} \phi$ et $g \overset{x_0}{\sim} \psi$ et si ϕ et ψ sont de même signe au voisinage de x_0, alors $f+g \overset{x_0}{\sim} \phi+\psi$.

Par définition, dire que deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point revient à dire que leur différence est négligeable devant l'une d'eux. L'hypothèse nous dit donc que la différence entre f et ϕ est négligeable devant ϕ et la différence entre g et ψ est négligeable devant ψ. Clairement la différence entre $f+g$ et $\phi+\psi$ est tout simplement la somme des deux différences :

$$(f+g)-(\phi+\psi)=(f-\phi)+(g-\psi).$$

On va montrer que chacun des deux termes est négligeable devant $\phi+\psi$.

Utilisons le fait que ϕ et ψ soient de même signe au voisinage de x_0 : la somme des deux est forcément aussi de même signe. La valeur absolue de la somme est donc la somme des deux valeurs absolues, et va majorer chacune des deux. Plus précisément, si on note $s(x)\in\{-1,1\}$ le signe commun de $\phi(x)$ et $\psi(x)$, alors

$$|\phi(x)|+|\psi(x)|=s(x)\phi(x)+s(x)\psi(x)=s(x)(\phi(x)+\psi(x))=|\phi(x)+\psi(x)|.$$

Et en conséquence, $|\phi(x)|\leq|\phi(x)|+|\psi(x)|=|\phi(x)+\psi(x)|$ et pareil $|\psi(x)|\leq|\phi(x)+\psi(x)|$.

Comme $f-\phi$ est négligeable devant ϕ, l'inégalité $|\phi|\leq|\phi+\psi|$ montre que $f-\phi$ est négligeable devant $\phi+\psi$ aussi. Pareil $g-\psi$ est elle aussi négligeable devant $\phi+\psi$. On conclut alors que la somme $(f+g)-(\phi+\psi)=(f-\phi)+(g-\psi)$ est de nouveau négligeable devant $\phi+\psi$, ce qui revient à dire que $f+g$ est équivalente à $\phi+\psi$.

Exemple. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$, on a $\sqrt{1+x^2}\overset{+\infty}{\sim}x$.

Puis comme $(x\mapsto x)$ et $(x\mapsto\sqrt{1+x^2})$ sont de même signe positif sur $\mathbf{R}_+^*$, on déduit de $x\overset{+\infty}{\sim}x$ et $x\overset{+\infty}{\sim}\sqrt{1+x^2}$ que $2x\overset{+\infty}{\sim}x+\sqrt{1+x^2}$.

Il faut faire bien attention que cet argument ne marche que lorsque ϕ et ψ sont de même signe au voisinage de x_0, un fait qu'est utilisé dans la preuve. En général il n'est pas possible d'ajouter deux relations d'équivalence. Pour un simple contre-exemple, au voisinage de 0 on a $1+x\overset{0}{\sim}1$ et aussi $-1\overset{0}{\sim}-1$, mais leurs sommes $(1+x)+(-1)=x$ et $1+(-1)=0$ ne sont évidemment pas équivalentes au voisinage de 0, du fait que 1 et -1 ne sont pas de même signe.

Exercice 6.

Montrer que

$$\sqrt{x+1}-x=o_{+\infty}(x^2).$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Donc les deux termes sont de $o_{+\infty}(x^2)$, ce qui signifie que la somme est aussi de $o_{+\infty}(x^2)$.

Exercice 8.

1. Montrer que $\operatorname{ch} x \overset{-\infty}{\sim} e^{-x}/2$ **et que** $\operatorname{sh} x \overset{+\infty}{\sim} e^{x}/2$ **puis que** $\operatorname{sh} x \overset{+\infty}{\sim} \operatorname{ch} x$**.**

On a $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2 = (e^{2x} + 1) \cdot e^{-x}/2$. Lorsque x tend vers $-\infty$ on calcule la limite

$$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} + 1 = 1.$$

Donc $\operatorname{ch} x \overset{-\infty}{\sim} e^{-x}/2$.

Pareil on a $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2 = (1 - e^{-2x}) \cdot e^x/2$, et la limite

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-2x} = 1.$$

Donc $\operatorname{sh} x \overset{+\infty}{\sim} e^x/2$.

De façon analogue, on monterait $\operatorname{ch} x \overset{+\infty}{\sim} e^x/2$. Par la transitivité de $\sim$, on conclut que $\operatorname{sh} x \overset{+\infty}{\sim} \operatorname{ch} x$.

2. Donner des équivalents en 0 aux fonctions sh **et** ch**.**

Comme $\operatorname{sh}' 0 = 1$, par la définition de dérivée on a

$$\operatorname{sh} x = x + o_0(x)$$

soit $\boxed{\operatorname{sh} x \overset{0}{\sim} x.}$ (On fait aussi rappeler l'exercice 3.)

Pour $\operatorname{ch} x$, comme $\lim_{x \to 0} \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 0 = 1$, on a $\boxed{\operatorname{ch} x \overset{0}{\sim} 1.}$

Exercice 9.

1. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ **à la fonction** $x \mapsto \ln(x^2 + 1) - \ln x$**.**

On écrit

$$\begin{aligned} \ln(x^2+1) - \ln x &= \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0. Le deuxième terme a donc pour limite $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$. Il est donc négligeable devant $\ln x$. On conclut que $\boxed{\ln(x^2+1) - \ln x \overset{+\infty}{\sim} \ln x.}$

2. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ **à la fonction** $x \mapsto \ln(x^2 + 1) - 2\ln x$**.**

Par le même calcul, on sait maintenant que

$$\ln(x^2+1) - 2\ln x = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Sa limite lorsque x tend vers $+\infty$ étant zéro, on ne peut pas conclure directement. On regarde alors la dérivée pour la fonction $\ln(1+u)$ en $u = 0$: c'est $\frac{1}{1+u}$ qui vaut 1 en 0. On a donc

$$\ln(1+u) = \ln(1+0) + 1 \cdot u + o_0(u) = u + o_0(u),$$

autrement dit $\ln(1+u) \overset{0}{\sim} u$. On remplace maintenant u par $\frac{1}{x^2}$, et on a

$$\boxed{\ln(x^2+1) - 2\ln x = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.}$$

Exercice 10.

1. Montrer que $\dfrac{\ln(x+1)}{x} - \dfrac{\ln x}{x+1} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Remarquons d'abord que par les résultats de croissances comparées, tous les trois termes ont pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On écrit

$$\ln(x+1) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln x}{x+1} &= \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} - \frac{\ln x}{x+1} \\ &= \ln x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln x}{x(x+1)} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, on a donc l'équivalence $\ln(1 + \frac{1}{x}) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, qui vient de $\ln(1+u) \overset{0}{\sim} u$. Le deuxième terme satisfait donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, qui est alors négligeable devant $\frac{\ln x}{x^2}$ puisque 1 est négligeable devant $\ln x$. On peut donc l'oublier et regarder seulement le premier terme. C'est-à-dire il suffit de démontrer

$$\frac{\ln x}{x(x+1)} \overset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}.$$

Pour cela on calcule la fraction

$$\frac{\ln x}{x(x+1)} \Big/ \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

qui a clairement pour limite 1 lorsque x tend vers $+\infty$. La limite pour la fraction étant 1, on obtient donc une équivalence.

2. En déduire que $x^{1/(x+1)} - (x+1)^{1/x} \overset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln x}{x^2}$**.**

Pour cette question on va trouver une séquence de relations d'équivalence pour finalement arriver au résultat voulu.

Les termes à gauche ressemblent les termes qu'on a vus pour la première question, mais il faut d'abord appliquer un logarithme

$$x^{1/(x+1)} = (e^{\ln x})^{1/(x+1)} = e^{\frac{\ln x}{x+1}},$$
$$(x+1)^{1/x} = (e^{\ln(x+1)})^{1/x} = e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}.$$

On peut donc réécrire

$$x^{1/(x+1)} - (x+1)^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x+1}} - e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x+1}} \cdot \left(1 - e^{\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln x}{(x+1)}}\right) =: e^{\frac{\ln x}{x+1}} \cdot (1 - e^{f(x)}),$$

où on a fait un calcule de type $e^a - e^b = e^a \cdot (1 - e^{b-a})$, et on a noté la fonction $f(x) := \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln x}{(x+1)}$.

Comme les puissances $\frac{\ln x}{x+1}$ et $\frac{\ln(x+1)}{x}$ ont pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x+1}} = 1$. Cela veut dire qu'on peut ignorer ce terme et regarder seulement le terme $1 - e^{f(x)}$. Autrement dit on a l'équivalence

$$e^{\frac{\ln x}{x+1}} \cdot (1 - e^{f(x)}) \overset{+\infty}{\sim} 1 - e^{f(x)}.$$

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln x}{(x+1)}\right) = 0$. Au voisinage de 0 on a le développement limité de e^u

$$e^u = 1 + u + o_0(u)$$

soit

$$1 - e^u \overset{0}{\sim} -u.$$

En remplaçant u par $f(x)$ on obtient

$$1 - e^{f(x)} \overset{+\infty}{\sim} -f(x).$$

Finalement on a $f(x) \overset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$ par la première question. On peut donc formuler une séquence de relations d'équivalence

$$x^{1/(x+1)} - (x+1)^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x+1}} \cdot (1 - e^{f(x)}) \overset{+\infty}{\sim} 1 - e^{f(x)} \overset{+\infty}{\sim} -f(x) \overset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x^2}$$

et conclure par la transitivité de $\sim$.

Exercice 13.

Rappel. La *formule de Taylor–Lagrange* est une sorte de généralisation du théorème des accroissements finis plus fine pour les fonctions multiple dérivables : soit $f\colon I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^n et $n+1$-fois dérivable, pour a et b deux points dans l'intervalle de définition, il existe un point c strictement compris entre a et b tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a) \cdot (b-a) + f''(a) \cdot \tfrac{1}{2}(b-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a) \cdot \tfrac{1}{n!}(b-a)^n + f^{(n+1)}(c) \cdot \tfrac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$**, on a** $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$**.**

Ici on a écrit les premiers termes du développement limité de $\cos x$ en 0. A priori ces estimations ne sont valables qu'au voisinage de 0. Mais on peut montrer qu'elles sont en fait valables pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Clairement les trois fonctions sont toutes paires, il suffit donc de démontrer pour $x \geq 0$. On utilise la formule de Taylor–Lagrange pour les points 0 et x : à l'ordre 2, on obtient

$$\cos x = \cos 0 + \cos' 0 \cdot x + \cos'' a \cdot \tfrac{1}{2}x^2 \text{ pour un certain } a \in \,]0, x[\,.$$

Comme $\cos 0 = 1$, $\cos' 0 = -\sin 0 = 0$ et $\cos'' a = -\cos a$, on a

$$\cos x = 1 - \cos a \cdot \tfrac{1}{2}x^2 \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2,$$

la dernière inégalité venant du fait que $\cos a \leq 1$.

Puis on applique la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 4

$$\cos x = \cos 0 + \cos' 0 \cdot x + \cos'' 0 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + \cos^{(3)} 0 \cdot \tfrac{1}{6}x^3 + \cos^{(4)} a \cdot \tfrac{1}{24}x^4,$$

où $a \in \,]0, x[$. On calcule de nouveau $\cos 0 = 1$, $\cos' 0 = -\sin 0 = 0$, $\cos'' 0 = -\cos 0 = 1$, $\cos^{(3)} 0 = \sin 0 = 0$ et $\cos^{(4)} a = \cos a$. Donc

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \cos a \cdot \tfrac{1}{24}x^4 \leq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4,$$

la dernière inégalité venant de nouveau du fait que $\cos a \leq 1$.

Solution alternative. On peut aussi démontrer ces deux inégalités en étudiant les variations pour certaines fonctions. Démontrons d'abord l'inégalité à gauche. Considérons la fonction de différence

$$f(x) \coloneqq \cos x - \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2\right).$$

On va montrer que c'est une fonction à valeur toujours positives. Calculons sa dérivée

$$f'(x) = (-\sin x) - \left(0 - \tfrac{1}{2} \cdot 2x\right) = -\sin x + x.$$

On peut dériver de nouveau

$$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$$

qui est toujours positive. On a donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Plus précisément, $f'(x) < 0$ pour x négatif et $f'(x) > 0$ pour x positif, donc $f(x)$ atteint son minimum en 0 qui vaut 0, d'où $f(x) \geq 0$.

Pour l'inégalité à droite, de nouveau on considère la fonction de différence

$$g(x) \coloneqq \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4\right) - \cos x.$$

On calcule
$$g'(x) = \left(0 - \tfrac{1}{2} \cdot 2x + \tfrac{1}{24} \cdot 4x^3\right) - (-\sin x) = -x + \tfrac{1}{6}x^3 + \sin x,$$
et
$$g''(x) = -1 + \tfrac{1}{6} \cdot 3x^2 + \cos x = \cos x - \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2\right) = f(x),$$
qui est exactement la fonction $f(x)$ qu'on a vue pour la première inégalité. On a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x) =$ $f(x)$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On voit donc que $g(x)$ atteint son minimum en 0 qui vaut 0, d'où $g(x) \geq 0$.

Exercice 14.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)^2}$. En déduire la limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On va appliquer la formule de Taylor–Lagrange. Réécrivons d'abord
$$\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right).$$
Considérons la fonction $f(y) = \ln(1+y)$ définie pour $y \geq 0$. On a $f'(y) = \frac{1}{1+y}$ et $f''(y) = -\frac{1}{(1+y)^2}$, et aussi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. D'après la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2, on a
$$f(y) = f(0) + f'(0) \cdot y + f''(c) \cdot \tfrac{1}{2}y^2 \text{ avec } c \in \,]0, y[\,,$$
soit
$$f(y) = 0 + 1 \cdot y + \left(-\tfrac{1}{(1+c)^2}\right) \cdot \tfrac{1}{2}y^2 = y - \tfrac{1}{2(1+c)^2} \cdot y^2.$$
On a
$$\tfrac{1}{(1+y)^2} < \tfrac{1}{(1+c)^2} < \tfrac{1}{(1+0)^2} = 1,$$
donc
$$y - \tfrac{1}{2}y^2 < f(y) < y - \tfrac{1}{2(1+y)^2} \cdot y^2.$$
Posons maintenant $y = \frac{1}{x}$, on a
$$\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{x^2} < \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) < \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \tfrac{1}{x^2} = \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2(x+1)^2},$$
d'où les inégalités.

Pour calculer la limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, on prend d'abord un logarithme :
$$\ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x = x \cdot \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right).$$

Par les inégalités on sait

$$1 - \frac{1}{2x} < x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 - \frac{x}{2(x+1)^2}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, les deux cotés ont tous 1 pour limite. Donc on conclut que $\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$, et puis $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.}$

Exercice 16.

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle d'intérieur non vide et soit a un point de I. Déterminer $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

On utilise la formule de Taylor–Young à l'ordre 2

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + f''(a) \cdot \tfrac{1}{2}h^2 + o_0(h^2)$$

et

$$f(a-h) = f(a) + f'(a) \cdot (-h) + f''(a) \cdot \tfrac{1}{2}(-h)^2 + o_0(h^2).$$

En sommant les deux on obtient

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + f''(a) \cdot h^2 + o_0(h^2),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a) + o_0(1).$$

Donc

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a).}$$

Exercice 18.

Notation : J'abrège « développement limité en x_0 à l'ordre n » par $DL_n(x_0)$.

1. Effectuer le développement limité de $\sin x$, $\tan x$ et $\cos x$ à l'ordre 5 en 0.

Pour avoir les développements limités de $\sin x$ et $\cos x$, on utilise la formule de Taylor–Young. Il faut d'abord calculer les dérivées successives. En 0 on a

$$\sin 0 = 0, \sin' 0 = \cos 0 = 1, \sin'' 0 = -\sin 0 = 0, \sin^{(3)} 0 = -\cos 0 = -1, \sin^{(4)} 0 = \sin 0 = 0,$$

et

$$\cos 0 = 1, \cos' 0 = -\sin 0 = 0, \cos'' 0 = -\cos 0 = -1, \cos^{(3)} 0 = \sin 0 = 0, \cos^{(4)} 0 = \cos 0 = 1.$$

Remarquons que pour $\sin x$ et $\cos x$ les dérivées successives sont périodiques : pour $\sin x$ c'est toujours $0, 1, 0, -1$ qui répète, et pour $\cos x$ c'est $1, 0, -1, 0$. On a donc

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + (-1) \cdot \tfrac{1}{6}x^3 + 0 \cdot \tfrac{1}{24}x^4 + 1 \cdot \tfrac{1}{120}x^5 + o_0(x^5) = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + o_0(x^5)$$

et

$$\cos x = 1 + 0\cdot x + (-1)\cdot \tfrac{1}{2}x^2 + 0\cdot \tfrac{1}{6}x^3 + 1\cdot \tfrac{1}{24}x^4 + 0\cdot \tfrac{1}{120}x^5 + o_0(x^5) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o_0(x^5).$$

Pour avoir le développement limité de $\tan x$, soit on calcule les dérivées successives, un calcul qui est assez pénible et que je vais omettre ici ; soit on utilise le fait que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_0(x^5)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^5)}\\
&\text{(on utilise le } DL_2(0) \text{ pour la fonction } \tfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o_0(u^3))\\
&\text{(et on remplace } u \text{ par } -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4)\\
&\text{(en écrivant le DL on omet tous les termes de degré} > 5)\\
&\text{(notons qu'à partir de } u^3 \text{ on n'obtient que des termes de degré} \geq 6)\\
&= \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + o_0(x^5)\big)\cdot\big(1 - (-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4) + (-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4)^2 + o_0(x^5)\big)\\
&= \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + o_0(x^5)\big)\cdot\Big(1 - (-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4) + (\tfrac{1}{4}x^4 + \cancel{2(-\tfrac{1}{2}x^2)\cdot\tfrac{1}{24}x^4 + \cdots}) + o_0(x^5)\Big)\\
&= \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + o_0(x^5)\big)\cdot\big(1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^4 + o_0(x^5)\big)\\
&\text{(on fait la multiplication mais on omet tous les termes de degré} > 5)\\
&= (x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5) + (\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{12}x^5 + \cancel{\cdots}) + (\tfrac{5}{24}x^5 + \cancel{\cdots}) + o_0(x^5)\\
&= x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + o_0(x^5).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o_0(x^5)}$$

2. Effectuer le développement limité de $\frac{x}{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0.

On part d'un $DL_6(0)$ de $\sin x$:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin(x)} &= x\cdot\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o_0(x^6)\right)^{-1}\\
&= \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o_0(x^5)\right)^{-1}\\
&\left(DL_2(0) \text{ de la fonction } \frac{1}{1-u} \text{ avec } u = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o_0(x^5)\right)\\
&= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^2 + o_0(x^5)\\
&= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o_0(x^5)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{x}{\sin(x)} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o_0(x^5)}$$

3. Effectuer le développement limité de $\sin(x + x^3)$ à l'ordre 5 en 0.

Si on pose $u = x + x^3$ alors $u = O_0(x)$ ainsi on part d'un $DL_5(0)$ de sin :

$$\begin{aligned}
\sin(x+x^3) &= u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o_0(u^5) \\
&= (x+x^3) - \frac{(x+x^3)^3}{6} + \frac{x^5(1+x^2)^5}{120} + o_0(x^5) \\
&\text{(nous avons } (1+x^2)^5 = 1 + o_0(1)) \\
&= x + x^3 - \frac{x^3 + 3x^2 \cdot x^3 + 3x \cdot x^6 + x^9}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) \\
&= x + x^3 - \frac{x^3 + 3x^5}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(x+x^3) = x + \frac{5}{6}x^3 - \frac{59}{120}x^5 + o_0(x^5)}$$

4. Effectuer le développement limité de $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ **à l'ordre 4 en 0.**

On effectue tout d'abord un $DL_4(0)$ de $\dfrac{\sin(x)}{x}$, donc nous devons partir d'un $DL_5(0)$ de $\sin(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)$$

d'où

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o_0(x^4)$$

Nous allons utiliser un $DL(0)$ de $\ln(1-u)$ avec $u = \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{120} + o_0(x^4)$. Or dans ce cas $u = O_0(x^2)$ et donc $u^3 = o_0(x^4)$. Ainsi il suffit de faire un $DL_2(0)$ de $\ln(1-u)$:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &= \ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2) \\
&= -\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 (1 + o_0(1))^2 + o_0(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o_0(x^4)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o_0(x^4)}$$

5. Effectuer le développement limité de $\exp\left(\dfrac{4+3x}{2+x}\right)$ **à l'ordre 3 en 0.**

Simplifions tout d'abord l'expression à l'intérieur de l'exponentielle (décomposition en éléments simples) :

$$\frac{4+3x}{2+x} = \frac{6+3x-2}{2+x} = 3 - \frac{2}{2+x} = 3 - \frac{1}{1+(x/2)}$$

On effectue un $DL_3(0)$ de cette expression (on utilise le $DL_3(0)$ de :

$$3 - \frac{1}{1+(x/2)} = 3 - \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + o_0(x^3)\right] = 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o_0(x^3)$$

Nous posons $u = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o_0(x^3)$ de sorte que :

$$\begin{aligned}
u^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{2} + o_0(x)\right)^2 \\
&= \frac{x^2}{4}\left(1 - 2\left(\frac{x}{2} + o_0(x)\right) + \left(\frac{x}{2} + o_0(x)\right)^2\right) \\
&= \frac{x^2}{4}(1 - x + o_0(x)) \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} + o_0(x^3) \\
u^3 &= \left(\frac{x}{2}\right)^3 (1 + o_0(1))^3 \\
&= \frac{x^3}{8}(1 + o_0(1)) \\
&= \frac{x^3}{8} + o_0(x^3)
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{4+3x}{2+x}\right) &= e^2 \cdot \exp(u) = e^2 \cdot (1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o_0(u^3)) \\
&= e^2\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^3}{48} + o_0(x^3)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\exp\left(\frac{4+3x}{2+x}\right) = e^2 + \frac{e^2}{2}x - \frac{e^2}{8}x^2 + \frac{e^2}{48}x^3 + o_0(x^3)}$$

6. Effectuer le développement limité de 3^x à l'ordre 3 en 1.

On peut ramener l'étude du DL en 0 en posant $x = 1 + t$ alors nous cherchons un $DL_3(0)$ de

$$3^{1+t} = 3 \cdot \exp\big(\ln(3)t\big) = 3 + 3\ln(3)t + 3\frac{\big(\ln(3)t\big)^2}{2} + 3\frac{\big(\ln(3)t\big)^3}{6} + o_0(t^3)$$

$$\boxed{3^x = 3 + 3\ln(3)(x-1) + \frac{3\ln(3)^2}{2}(x-1)^2 + \frac{3\ln(3)^3}{6}(x-1)^3 + o_1\left((x-1)^3\right)}$$

7. Effectuer le développement limité de $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$.

Nous ramenons l'étude en 0 en posant $x = \frac{\pi}{4} + t$:

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})\cos(t) + \cos(\frac{\pi}{4})\sin(t)}{\sqrt{\frac{\pi}{4} + t}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(t) + \sin(t))}{\sqrt{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1 + \frac{t}{\pi/4}}}$$

d'un côté :

$$\cos(t) + \sin(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2) + t + o_0(t^2)$$

et de l'autre, en posant $u = \dfrac{t}{\pi/4}$

$$\left(1 + \frac{t}{\pi/4}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2 + o_0(u^2) = 1 - \frac{2}{\pi}t + \frac{6}{\pi^2}t^2 + o_0(t^2)$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(t) + \sin(t)}{\sqrt{1 + \frac{t}{\pi/4}}} &= \left(1 + t - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi}t + \frac{6}{\pi^2}t^2 + o_0(t^2)\right) \\
&= 1 - \frac{2}{\pi}t + \frac{6}{\pi^2}t^2 + o_0(t^2) \\
&+ t - \frac{2}{\pi}t^2 + o_0(t^2) \\
&- \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\pi/4}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)}$$

8. Effectuer le développement limité de $\arcsin x$ à l'ordre 5 en 0.

En dérivant $\arcsin(x)$ on trouve $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, alors on peut faire un $DL_4(0)$ de cette dernière puis l'intégrer, puisque intégrer fait augmenter l'ordre de notre DL. On part de $u = -x^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+u}} &= 1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2 + o_0(u^2) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o_0(x^4)
\end{aligned}$$

Ainsi, vu que $\arcsin(0) = 0$

$$\boxed{\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o_0(x^5)}$$

9. Effectuer le développement limité de $e^{\sqrt{\cos(x)}}$ à l'ordre 5 en 0.

Partons d'un $DL_5(0)$ de $\cos(x)$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^5)$$

Pour trouver un $DL_5(0)$ de $\sqrt{\cos(x)}$ nous allons poser $u = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^5)$:

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{x^4}{4} + o_0(x^5) \\ u^3 &= O_0(x^6) = o_0(x^5) \end{aligned}$$

ainsi un $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+u}$ suffit :

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1+u} &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o_0(x^5) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o_0(x^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + o_0(x^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o_0(x^5) \end{aligned}$$

Concluons en utilisant un $DL_2(1)$ de $\exp(x)$ en ayant posé $v = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o_0(x^5)$

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{\cos(x)}} = \exp(1+v) = e \cdot \exp(v) &= e\left(1 + v + \frac{v^2}{2} + o_0(x^5)\right) \\ &= e\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4} + o_0(x^4)\right)^2 + o_0(x^5)\right) \\ &= e\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + \frac{x^4}{32} + o_0(x^5)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{\sqrt{\cos(x)}} = e - \frac{e}{4}x^2 + \frac{e}{48}x^4 + o_0(x^5)}$$

10. Effectuer le développement limité de $\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 5 en 0.

Nous partons des $DL_5(0)$ suivants :

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o_0(x^5)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o_0(x^5)$$

le premier est la réponse à la question 8, le deuxième est déjà calculé au sein de la question 8 (à l'ordre 4, mais c'est en fait un $DL_5(0)$). Nous en faisons simplement le produit en oubliant tous les termes d'exposant > 5 :

$$\begin{aligned}\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o_0(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+o_0(x^5)\right)\\ &= \left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5\right)+\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{12}\right)+\frac{3}{8}x^5+o_0(x^5)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = x+\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{15}x^5+o_0(x^5)}$$

Exercice 19.

Déterminer a et b pour que la fonction $f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ ait un développement limité nul à l'ordre 5 en 0, c'est-à-dire $f(x) = x^5\epsilon(x)$.

On sait que le développement limité de $\cos x$ en 0 jusqu'à l'ordre 5 est le suivant

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o_0(x^5).$$

Puis pour $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= (1+ax^2)\cdot\frac{1}{1+bx^2}\\ &= (1+ax^2)\cdot\left(1-bx^2+b^2x^4+o_0(x^5)\right)\\ &= (1+ax^2)+(-bx^2-abx^4)+(b^2x^4+\cancel{\cdots})+o_0(x^5)\\ &= 1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+o_0(x^5).\end{aligned}$$

Pour que $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ aie un développement limité nul à l'ordre 5, il suffit que les développements limités de $\cos x$ et $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ coincident jusqu'à l'ordre 5. On peut donc comparer les coefficients : il faut

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} &= a-b\\ \frac{1}{24} &= b^2-ab = b(b-a)\end{aligned}$$

En divisant les deux on obtient $b = \frac{1}{12}$ puis on a $a = b - \frac{1}{2} = -\frac{5}{12}$. Donc $\boxed{a = -\frac{5}{12} \text{ et } b = \frac{1}{12}.}$

Exercice 20.

1. Étudier la limite en 0 de $\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

Au voisinage de 0, on a les développements limités suivants

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^4) \text{ et } \cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o_0(x^4).$$

Dans le développement limité de $\cos x$, on peut remplacer la variable x par le développement limité de $\sin x$ pour obtenir le développement limité de $\cos(\sin x)$:

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 x + \tfrac{1}{24}\sin^4 x + o_0(\sin^4 x) \\
&\quad \text{(comme } x \overset{0}{\sim} \sin x\text{, on peut remplacer } o_0(\sin^4 x) \text{ par } o_0(x^4)\text{)} \\
&\quad \text{(puis on met le DL pour } \sin x\text{)} \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}\big(x - \tfrac{1}{6}x^3\big)^2 + \tfrac{1}{24}\big(x - \tfrac{1}{6}x^3\big)^4 + o_0(x^4) \\
&\quad \text{(on fait la multiplication en oubliant tous les termes de degré} > 4\text{)} \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}\big(x^2 - 2x \cdot \tfrac{1}{6}x^3 + \cancel{\tfrac{1}{36}x^6}\big) + \tfrac{1}{24}\big(x^4 + \cancel{4x^3 \cdot (-\tfrac{1}{6}x^3) + \ldots}\big) + o_0(x^4) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^4 + \tfrac{1}{24}x^4 + o_0(x^4).
\end{aligned}$$

Donc la différence est

$$\cos(\sin x) - \cos x = \tfrac{1}{6}x^4 + o_0(x^4),$$

et

$$\boxed{\text{la limite en 0 de } \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} \text{ est } \frac{1}{6}.}$$

2. Étudier la limite en 1 de $\dfrac{\sqrt{3x-2} - x^{1/4}}{1 - x^{2/3}}$.

Au tour de 1 on peut récrire la variable x comme $1 + y$ avec y au voisinage de 0. Rappelons le développement limité suivant

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o_0(y).$$

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x-2} &= (3x-2)^{1/2} = (3 + 3y - 2)^{1/2} = (1+3y)^{1/2} \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 3y + o_0(y),
\end{aligned}$$

$$x^{1/4} = (1+y)^{1/4} = 1 + \tfrac{1}{4}y + o_0(y),$$

$$1 - x^{2/3} = 1 - (1+y)^{2/3} = 1 - \big(1 + \tfrac{2}{3}y + o_0(y)\big) = -\tfrac{2}{3}y + o_0(y).$$

Donc la fonction s'écrit

$$\frac{\big(1 + \frac{3}{2}y\big) - \big(1 + \frac{1}{4}y\big) + o_0(y)}{-\frac{2}{3}y + o_0(y)} = \frac{\frac{5}{4}y + o_0(y)}{-\frac{2}{3}y + o_0(y)}$$

Lorsque x tend vers 1, ou bien lorsque y tend vers 0, $o_0(y)$ est un terme négligeable devant y. On a

$$\boxed{\text{la limite en 1 de } \frac{\sqrt{3x-2} - x^{1/4}}{1 - x^{2/3}} \text{ est } \frac{5/4}{-2/3} = -\frac{15}{8}.}$$

3. Étudier la limite en 0 de $\big(\tan(\pi/4 + ax)\big)^{1/x}$.

La dérivée de $\tan x$ est $\frac{1}{\cos^2 x}$. On peut donc faire le développement limité pour $\tan x$ en $\pi/4$, en notant

u une variable au voisinage de 0

$$\begin{aligned}\tan(\pi/4+u) &= \tan(\pi/4)+\tan'(\pi/4)\cdot u+o_0(u)\\ &= 1+\frac{1}{\cos^2(\pi/4)}\cdot u+o_0(u)\\ &= 1+\frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2}\cdot u+o_0(u)\\ &= 1+2u+o_0(u).\end{aligned}$$

Donc, en remplaçant u par ax,

$$\big(\tan(\pi/4+ax)\big)^{1/x} = \big(1+2ax+o_0(ax)\big)^{1/x} = \big(1+2ax+o_0(x)\big)^{1/x}.$$

Ici on peut remplacer $o_0(ax)$ par $o_0(x)$ comme a est une constante.

Comme la variable x apparaît dans la puissance, pour obtenir la limite on prend le logarithme

$$\big(\tan(\pi/4+ax)\big)^{1/x} = \big(1+2ax+o_0(x)\big)^{1/x} = e^{\log\big(1+2ax+o_0(x)\big)\cdot 1/x}.$$

En appliquant le développement limité pour la fonction log, qui est

$$\log(1+u) = u+o_0(u) \text{ pour } u \text{ une variable au voisinage de } 0,$$

on obtient

$$\log\big(1+2ax+o_0(x)\big)/x = \big(2ax+o_0(x)\big)/x.$$

La limite pour cette expression lorsque x tend vers 0 est clairement $2a$. Donc

$$\boxed{\text{la limite en 0 de } \big(\tan(\pi/4+ax)\big)^{1/x} \text{ est } e^{2a}.}$$

4. Étudier la limite en 1 de $\dfrac{x^x-x}{(x-1)^2}$.

Comme la variable x apparaît dans la puissance de x^x, on le réécrit en prenant un logarithme

$$x^x-x = x(x^{x-1}-1) = x(e^{\log x\cdot(x-1)}-1).$$

Puis on remplace x par $1+y$ avec y au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned}x^x-x = x(e^{\log x\cdot(x-1)}-1) &= (1+y)(e^{\log(1+y)\cdot y}-1)\\ &\text{(le DL pour } \log(1+y))\\ &= (1+y)\big(e^{\left(y+o_0(y)\right)\cdot y}-1\big)\\ &= (1+y)\big(e^{y^2+o_0(y^2)}-1\big)\\ &\text{(le DL pour l'exponentielle)}\\ &= (1+y)\big(1+y^2+o_0(y^2)-1\big)\\ &= (1+y)\big(y^2+o_0(y^2)\big)\\ &\text{(on omet les termes de degré} > 2)\\ &= y^2+\cancel{y^3}+o_0(y^2).\end{aligned}$$

En même temps, $(x-1)^2 = y^2$. On a

$$\boxed{\text{la limite en 1 de } \frac{x^x - x}{(x-1)^2} \text{ est } 1.}$$

5. Étudier la limite en 0 de $\dfrac{\ln\cos x + \operatorname{sh}^2 x/2}{\sin^4 x}$.

Le dénominateur $\sin^4 x$ est équivalent à x^4 en 0. On calcule donc le développement limité pour le numérateur jusqu'à l'ordre 4

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)\big)\\
&\quad\text{(le DL de } \cos x \text{ en 0)}\\
&= \big(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4\big) - \tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4\big)^2 + o_0(x^4)\\
&\quad\text{(le DL de } \ln(1+u) \text{ en 0, en mettant } u = \cos x - 1 \overset{0}{\sim} -\tfrac{1}{2}x^2)\\
&\quad\text{(notons qu'à partir de } u^3 \text{ on obtient des puissances de } x \text{ d'ordre au moins 6)}\\
&= -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{4}x^4 + \cancel{\cdots}\big) + o_0(x^4)\\
&= -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{12}x^4 + o_0(x^4)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^2 x/2 &= \big(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\big)^2/2\\
&= \tfrac{1}{8}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)\\
&\quad\text{(le DL de l'exponentielle jusqu'à l'ordre 4)}\\
&= \tfrac{1}{8}\big(1 + 2x + \tfrac{1}{2}(2x)^2 + \tfrac{1}{6}(2x)^3 + \tfrac{1}{24}(2x)^4\\
&\qquad + 1 - 2x + \tfrac{1}{2}(-2x)^2 + \tfrac{1}{6}(-2x)^3 + \tfrac{1}{24}(-2x)^4 + o_0(x^4) - 2\big)\\
&= \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^4 + o_0(x^4).
\end{aligned}$$

Donc la somme

$$\ln\cos x + \operatorname{sh}^2 x/2 = \tfrac{1}{12}x^4 + o_0(x^4).$$

$$\boxed{\text{La limite en 0 de } \frac{\ln\cos x + \operatorname{sh}^2 x/2}{\sin^4 x} \text{ est } \tfrac{1}{12}.}$$

6. Étudier la limite en 0 de $\dfrac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}$.

En 0 on a $x \overset{0}{\sim} \tan x$, donc $x \overset{0}{\sim} \arctan x$ est aussi vrai. Puis le développement limité pour cos nous donne $1 - \cos 3x \overset{0}{\sim} \frac{1}{2}(3x)^2 = \frac{9}{2}x^2$. Donc le dénominateur est équivalent à $\frac{9}{2}x^3$ en 0. On calcule donc le développement limité pour le numérateur jusqu'à l'ordre 3

$$2\tan x = 2\big(x + \tfrac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)\big) = 2x + \tfrac{2}{3}x^3 + o_0(x^3)$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} 2x &= (e^{2x} - e^{-2x})/2\\
&= \Big(\big(1 + 2x + \tfrac{1}{2}(2x)^2 + \tfrac{1}{6}(2x)^3 + o_0(x^3)\big) - \big(1 + (-2x) + \tfrac{1}{2}(-2x)^2 + \tfrac{1}{6}(-2x)^3 + o_0(x^3)\big)\Big)/2\\
&= \big(4x + \tfrac{8}{3}x^3 + o_0(x^3)\big)/2\\
&= 2x + \tfrac{4}{3}x^3 + o_0(x^3)
\end{aligned}$$

donc la somme

$$2\tan x - \operatorname{sh} 2x = -\tfrac{2}{3}x^3 + o_0(x^3).$$

$$\boxed{\text{La limite en 0 de } \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x} \text{ est } -\frac{2/3}{9/2} = -\frac{4}{27}.}$$

Exercice 21.

Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = (1+x)^{3/2}\ln(1+x)$. En déduire la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

On calcule les développement limité pour $(1+x)^{3/2}$ et $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0

$$(1+x)^{3/2} = 1 + \tfrac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}\cdot(\frac{3}{2}-1)}{2\cdot 1}x^2 + o_0(x^2) = 1 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 + o_0(x^2)$$

et

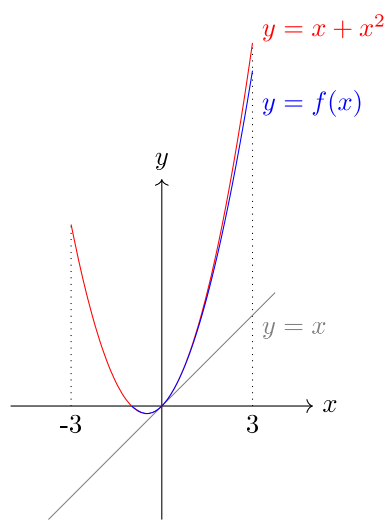
$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + o_0(x^2).$$

Le développement limité pour la produit $f(x) = (1+x)^{3/2}\ln(1+x)$ est donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \big(1 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 + o_0(x^2)\big)\cdot\big(x - \tfrac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)\big) \\ &\quad \text{(on fait la multiplication en omettant les termes de degré} > 2) \\ &= \big(x + \tfrac{3}{2}x^2 + \cancel{\cdots}\big) + \big(-\tfrac{1}{2}x^2 + \cancel{\cdots}\big) + o_0(x^2) \\ &= x + x^2 + o_0(x^2). \end{aligned}$$

On peut en déduire que l'équation pour la tangente en 0 est $y = x$. Comme 2 est paire, x^2 est positif, on voit donc que la courbe représentative de f se situe au dessus de la tangente.

Voici le graphe pour la fonction f sur l'intervalle $[-3, 3]$. Remarquons que f n'est définie que pour $x > -1$. On voit bien que la courbe bleue de $y = f(x)$ peut à peine être distinguée de la courbe rouge pour $y = x + x^2$. Puis la tangente en 0 (la droite grise) se situe bien en dessous de la courbe.



Solution alternative. On peut obtenir le développement limité de $f(x)$ en 0 en calculant directement les dérivées successives en 0 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{3}{2}(1+x)^{1/2}\ln(1+x) + (1+x)^{3/2}\tfrac{1}{1+x} \\ &= \tfrac{3}{2}(1+x)^{1/2}\ln(1+x) + (1+x)^{1/2} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\ln(1+x) + \tfrac{3}{2}(1+x)^{1/2}\tfrac{1}{1+x} + \tfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \\ &= (1+x)^{-1/2}\big(\tfrac{3}{4}\ln(1+x)+2\big). \end{aligned}$$

Donc $f(0)=0$, $f'(0)=1$ et $f''(0)=2$. Par la formule de Taylor–Young, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\cdot\tfrac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) = x + x^2 + o_0(x^2).$$

Exercice 22.

Soit $a\in\mathbf{R}^*$. Étudier, au voisinage de 0, la position relative des courbes représentatives des fonctions $f(x)=\exp(x/a)$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$.

On étudie les développement limité en 0 pour f et g. Pour f, on utilise le développement limité pour l'exponentielle

$$f(x) = \exp(x/a) = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{6a^3} + o_0(x^3).$$

Pour g, on rappelle le développement limité en 0 pour la fonction $(1+u)^\alpha$

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha\cdot u + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2}\cdot u^2 + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}{6}\cdot u^3 + o_0(u^3).$$

Notons que la fonction g n'est définie que sur $]-|a|,|a|[$ (autrement dit $]-a,a[$ si $a>0$ et $]a,-a[$ si $a<0$). On a

$$\begin{aligned} g(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} &= \sqrt{\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}} \\ &= \Big(1+\frac{x}{a}\Big)^{1/2}\cdot\Big(1-\frac{x}{a}\Big)^{-1/2} \\ &= \left(1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^2}+\frac{x^3}{16a^3}+o_0(x^3)\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2a}+\frac{3x^2}{8a^2}+\frac{5x^3}{16a^3}+o_0(x^3)\right) \\ &= \left(1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^2}+\frac{x^3}{16a^3}\right)+\left(\frac{x}{2a}+\frac{x^2}{4a^2}-\frac{x^3}{16a^3}+\cancel{\cdots}\right) \\ &\quad+\left(\frac{3x^2}{8a^2}+\frac{3x^3}{16a^3}+\cancel{\cdots}\right)+\left(\frac{5x^3}{16a^3}+\cancel{\cdots}\right)+o_0(x^3) \\ &= 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{2a^3}+o_0(x^3). \end{aligned}$$

On peut déduire des développement limité de f et g que leurs courbes représentatives ont la même tangente en 0 qui a pour équation $y=1+x/a$. Cela veut dire que les deux courbes sont tangentes entre eux en 0.

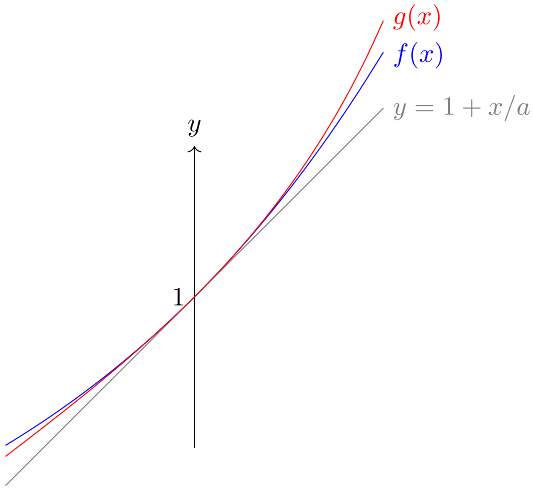
Puis on regarde la différence entre f et g :

$$g(x) = f(x) + \frac{x^3}{3a^3} + o_0(x^3).$$

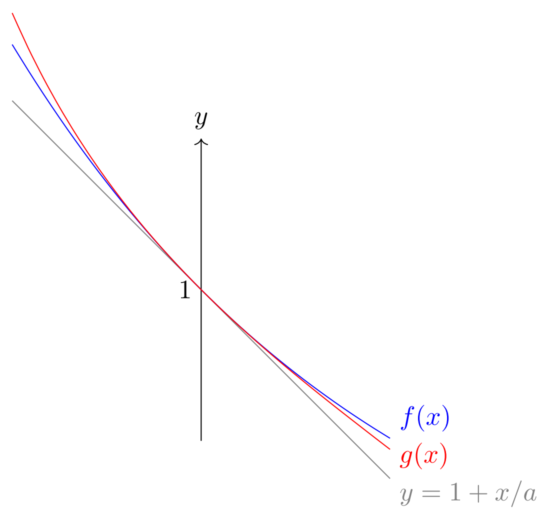
Donc

— Si $a > 0$, au voisinage de 0, on a $f(x) < g(x)$ si $x > 0$ et $f(x) > g(x)$ si $x < 0$;
— Si $a < 0$, au voisinage de 0, on a $f(x) > g(x)$ si $x > 0$ et $f(x) < g(x)$ si $x < 0$.

Voici deux graphes pour les fonctions f et g lorsque a est égal à 1 et -1 respectivement.



$a > 0$
(ici $a = 1$)



$a < 0$
(ici $a = -1$)

Exercice 23.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(\operatorname{ch} x)$**.**

Rappelons que $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Big((\cancel{e^{3x}} + 3e^{2x}e^{-x} + \cancel{3e^x e^{-2x}} + e^{-3x}) \\
&\qquad - (\cancel{e^{3x}} - 3e^{2x}e^{-x} + \cancel{3e^x e^{-2x}} - e^{-3x}) \Big) \\
&= \frac{1}{8}(6e^x + 2e^{-3x}).
\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a clairement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x = +\infty.}$

Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned}
x - \ln(\operatorname{ch} x) &= x - \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \\
&= x - \ln\left(\frac{e^x}{2}(1+e^{-2x})\right) \\
&= x - \big(\ln(e^x) - \ln 2 + \ln(1+e^{-2x})\big) \\
&= \cancel{x} - \cancel{x} + \ln 2 - \ln(1+e^{-2x})
\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0, le deuxième terme tend donc vers $\ln 1 = 0$. On conclut que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x - \ln(\operatorname{ch} x) = \ln 2.}$

Exercice 26.

Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction définie par $f(x) = e^{\cos x}$. En déduire les dérivées successives de f en 0 jusqu'à l'ordre 4.

On utilise les développements limités en 0 pour la fonction e^x et $\cos x$. Lorsque x tend vers 0, $\cos x$ tend vers 1 donc il faut la ramener à 0. On a

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e^{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o_0(x^4)} \quad \text{(le DL de } \cos x \text{ en 0)}\\
&\text{(pour appliquer le DL de } e^u \text{ en 0, on met le 1 devant)}\\
&= e\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o_0(x^4)}\\
&\text{(le DL de } e^u \text{ en 0, avec } u = -\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4)\\
&= e\cdot\Big(1+(-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4)+\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4)^2+o_0(x^4)\Big)\\
&= e\cdot\Big(1+(-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4)+\tfrac{1}{2}((-\tfrac{1}{2}x^2)^2+\cancel{\cdots})+o_0(x^4)\Big)\\
&= e\cdot\Big(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^4+o_0(x^4)\Big)\\
&= e-\tfrac{e}{2}x^2+\tfrac{e}{6}x^4+o_0(x^4).
\end{aligned}$$

Maintenant on utilise la formule de Taylor–Young à l'ordre 4

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \tfrac{1}{2}f''(0)\cdot x^2 + \tfrac{1}{6}f^{(3)}(0)\cdot x^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(0)\cdot x^4 + o_0(x^4).$$

En comparant les coefficients on peut conclure que

$$\boxed{f(0) = e,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -e,\ f^{(3)}(0) = 0 \text{ et } f^{(4)} = 4e.}$$

Exercice 27.

Calculer les dérivées successives en 0 jusqu'à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x+x^2}$.

On utilise la formule de Taylor–Young à l'ordre 4

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \tfrac{1}{2}f''(0)\cdot x^2 + \tfrac{1}{6}f^{(3)}(0)\cdot x^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(0)\cdot x^4 + o_0(x^4).$$

Comme on sait calculer directement le développement limité pour $f(x)$, on peut résoudre les valeurs pour

$f^{(k)}(0)$. Calculons d'abord le développement limité, en utilisant celui de $\cos x$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1+x+x^2} &= \left(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4+o_0(x^4)\right)\cdot\frac{1}{1+x+x^2}\\
&\text{(le DL pour la fonction } \frac{1}{1+u} \text{ en mettant } u=x+x^2\text{)}\\
&= \left(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4+o_0(x^4)\right)\cdot\left(1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4+o_0(x^4)\right)\\
&\text{(on omet les termes de degré} > 4\text{)}\\
&= \left(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4+o_0(x^4)\right)\cdot\left(1-(x+x^2)+(x^2+2x^3+x^4)-(x^3+3x^4+\cancel{\cdots})+(x^4+\cancel{\cdots})+o_0(x^4)\right)\\
&= \left(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4+o_0(x^4)\right)\cdot\left(1-x+x^3-x^4+o_0(x^4)\right)\\
&\text{(on fait la multiplication en omettant les termes de degré} > 4\text{)}\\
&= \left(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4\right)+\left(-x+\tfrac{1}{2}x^3+\cancel{\cdots}\right)+(x^3+\cancel{\cdots})+(-x^4+\cancel{\cdots})+o_0(x^4)\\
&= 1-x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{2}x^3-\tfrac{23}{24}x^4+o_0(x^4).
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de comparer les coefficients et on peut obtenir

$$\boxed{f(0)=1,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=-1,\ f^{(3)}(0)=9,\ f^{(4)}=-23.}$$

Exercice 29.

Soit f la fonction définie par $f(x)=3-x\cdot\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x-1}$.

1. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de f. Que peut-on en déduire en 0 pour f ?

On rappelle les développements limités en 0 pour $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ (qui ressemblent les développements limités pour $\sin x$ et $\cos x$ mais tous les signes sont positifs)

$$\operatorname{sh} x = x+\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5+o_0(x^5)$$

$$\operatorname{ch} x = 1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4+o_0(x^5).$$

Ici on calcule jusqu'à l'ordre 5 parce que il y aura malheureusement des termes qui seront annulés. On peut calculer

$$\begin{aligned}
3-x\cdot\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x-1} &= 3-x\cdot\frac{x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o_0(x^5)}{\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o_0(x^5)\right)-1}\\
&\text{(on simplifie les } x^2\text{)}\\
&= 3-\frac{1+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o_0(x^4)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x^2+o_0(x^3)}\\
&\text{(on simplifie le } \tfrac{1}{2} \text{ et omet le } x^4\text{)}\\
&= 3-\frac{2+\frac{1}{3}x^2+o_0(x^3)}{1+\frac{1}{12}x^2+o_0(x^3)}\\
&\text{(on utilise le DL de } \tfrac{1}{1+u} \text{ avec } u=\tfrac{1}{12}x^2+o_0(x^3)\text{)}\\
&= 3-\left(2+\tfrac{1}{3}x^2+o_0(x^3)\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{12}x^2+o_0(x^3)\right)\\
&= 3-\left((2+\tfrac{1}{3}x^2)+(-\tfrac{1}{6}x^2+\cancel{\cdots})+o_0(x^3)\right)\\
&= 1-\tfrac{1}{6}x^2+o_0(x^3).
\end{aligned}$$

On peut en déduire que la tangente en 0 est la droite horizontale $y = 1$ et la courbe de f se trouve en dessous de cette droite.

Remarque. Une autre manière de faire serait d'abord simplifier selon les définitions de $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3 - x \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} \\
&= 3 - x \cdot \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2 - 1} \\
&\text{(simplifier par } 2e^x\text{)} \\
&= 3 - x \cdot \frac{e^{2x} - 1}{(e^{2x} + 1) - 2e^x} \\
&= 3 - x \cdot \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} \\
&= 3 - x \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\
&= 3 - x \cdot \frac{e^x - 1 + 2}{e^x - 1} \\
&= 3 - x - \frac{2x}{e^x - 1}
\end{aligned}$$

Puis on utilise $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3 - x - \frac{2x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)} \\
&= 3 - x - \frac{2}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o_0(x^3)} \\
&\text{(on utilise le DL de } \tfrac{1}{1+u} \text{ avec } u = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + o_0(x^3)\text{)} \\
&= 3 - x - 2 \cdot \Big(1 - (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3) + (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3)^2 - (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3)^3 + o_0(x^3)\Big) \\
&= 3 - x - 2 \cdot \Big(1 - (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3) + (\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cancel{\cdots}) - (\tfrac{1}{8}x^3 + \cancel{\cdots}) + o_0(x^3)\Big) \\
&= 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + o_0(x^3).
\end{aligned}$$

2. Montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Une droite asymptote signifie que la différence entre la valeur de f et celle pour la droite tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On utilise la simplification trouvée pour f

$$f(x) = 3 - x - \frac{2x}{e^x - 1}.$$

La différence est donc $f(x) - (-x + 3) = -\frac{2x}{e^x - 1}$, qui clairement tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, d'après les croissances comparées. On peut de plus voir que cette différence est toujours négative pour $x > 0$. On conclut donc que $y = -x + 3$ est une asymptote en $+\infty$ et la courbe de f se trouve en dessous de cette asymptote.

3. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ on a $\operatorname{sh}(x) > x$.

Pour tout $x > 0$, on applique la formule des accroissements finis pour l'intervalle $[0, x]$: il existe un $c \in]0, x[$ tel que

$$\mathrm{sh}(x) = \mathrm{sh}(0) + \mathrm{sh}'(c) \cdot (x - 0) = \mathrm{ch}(c) \cdot x.$$

Or la fonction $\mathrm{ch}(x)$ satisfait $\mathrm{ch}(x) > 1$ pour $x > 0$. On conclut donc que $\mathrm{sh}(x) > x$.

4. Donner le tableau de variation de f.

Calculons la dérivée de f

$$f'(x) = -1 - \frac{2(e^x - 1) - 2x(e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{2x \cdot e^x - e^{2x} + 1}{(e^x - 1)^2},$$

soit

$$\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}\left(x - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}(x - \mathrm{sh}\, x).$$

Son signe est donc le même que $x - \mathrm{sh}\, x$ comme $\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$ est toujours positif. D'après la dernière question, pour $x > 0$ on a $x < \mathrm{sh}\, x$ donc $f'(x) < 0$. Comme x et $\mathrm{sh}\, x$ sont les deux des fonctions impaires, $x > \mathrm{sh}\, x$ pour $x < 0$ et donc $f'(x) > 0$ pour $x < 0$. On a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

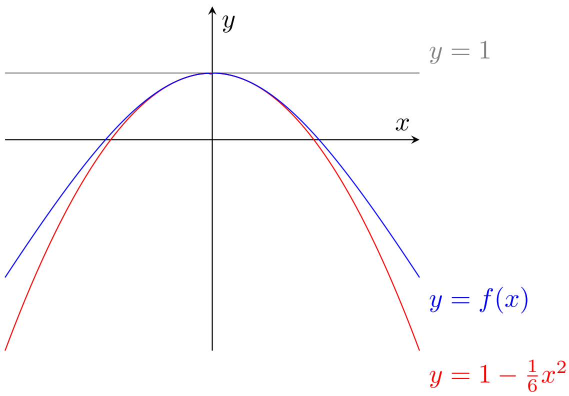
5. Montrer que $f(2)f(3) < 0$. En déduire qu'il existe un réel $c \in]2, 3[$ tel que $f(c) = 0$ et que ce réel est le seul zéro de f sur $\mathbf{R}_+$, i.e. le seul réel positif à vérifier $f(c) = 0$.

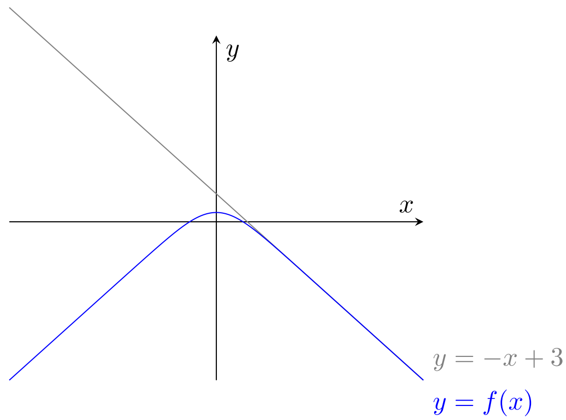
On a $f(2) = 3 - 2 - \frac{4}{e^2-1} = \frac{e^2-5}{e^2-1}$. Comme $e = 2,718\ldots$, on a $e^2 > 2,7^2 = 7,29$, donc $f(2) > 0$.

Pour $f(3)$ on a $f(3) = 3 - 3 - \frac{9}{e^2-1}$ qui est clairement négatif. Donc $f(2)f(3) < 0$. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ et elle admet des signes opposants en 2 et 3 : cela signifie que f change de signe quelque part entre 2 et 3. Mais comme f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$, il ne peut y avoir qu'un seul zéro, qu'on peut noter $c \in]2, 3[$.

6. Tracer la représentation graphique de f.

Voici deux graphes pour la fonction sur l'intervalle $[-5, 5]$ et $[-20, 20]$ respectivement.


y
$y = 1$
x
$y = f(x)$
$y = 1 - \frac{1}{6}x^2$


y
x
$y = -x + 3$
$y = f(x)$