$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\dots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

$(1+x)^{(-1)}$

$(1+x)^{\alpha}$ avec $\alpha=-1$ $\qquad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1}$

on met $\alpha=-1$ $\qquad a_n = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)}{n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1} = \frac{(-1)^n n!}{n!} = (-1)^n$

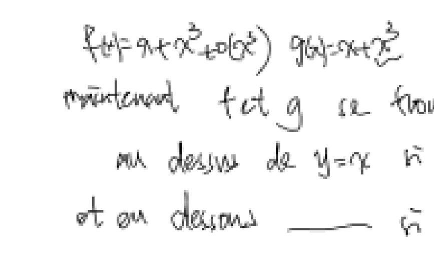
$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n)$

Ex 21 $\qquad f(x) = (1+x)^{3/2}\cdot\ln(1+x) = x+x^2+o(x^2)$

$\underline{(0+x+x^2+o(x^2))}$

$f(0)=0 \quad f'(0)=1$

cx^2 $\begin{cases} c>0 \Rightarrow f \text{ se situe au dessus de la droite tangente} \\ c<0 \Rightarrow f \text{ — en dessous} \\ c=0 \quad a_3x^3 \ \{\ a_3>0 \end{cases}$



x $\quad x>0 \quad x<0$

x^2 $\quad x^2 \geq 0$

x^3 $\quad x^3>0$ si $x>0$ $\quad x^3<0$ si $x<0$

$f(x)$ se comporte comme la fonction $g(x)=x+x^2$

Notamment f et g ont la même droite tangente qui est $y=x$

aussi f et g se trouvent au dessus de $y=x$

$f(x)=x+x^3+o(x^3)$ $\quad g(x)=x+x^3$

maintenant f et g se trouvent au dessus de $y=x$ si $x>0$

et en dessous — si $x<0$

$f(x)=a_0+a_1x+\underbrace{a_4x^4}+o(x^4)$

Ex 22 $\qquad f(x)=\exp(x/a) \qquad g(x)=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \qquad$ avec $a\in\mathbb{R}^*$

$f(x)=e^{\frac{x}{a}} = 1+\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^3+o(x^3) = 1+\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}x^2+\frac{1}{6a^3}x^3+o(x^3)$

pour que $g(x)$ soit bien définie il faut $\frac{a+x}{a-x}>0 \Leftrightarrow -|a|<x<|a|$

$\boxed{\text{On suppose } a>0}$ $\quad$ pour g elle est définie pour $-a<x<a$

$a+x>0\ ,\ a-x>0$

$g(x) = (a+x)^{1/2}(a-x)^{-1/2}$

$= \left(a^{1/2}(1+\frac{x}{a})^{1/2}\right)\cdot\left(a^{-1/2}(1-\frac{x}{a})^{-1/2}\right) = (1+\frac{x}{a})^{1/2}(1-\frac{x}{a})^{-1/2}$

$= \left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{\frac12(\frac12-1)}{2\times1}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{\frac12(\frac12-1)(\frac12-2)}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^3+o(x^3)\right)$

$\left(1+(-\tfrac12)\cdot(-\tfrac{x}{a})+\frac{(-\frac12)(-\frac12-1)}{2\times1}(-\tfrac{x}{a})^2+\frac{(-\frac12)(-\frac12-1)(-\frac12-2)}{6}(-\tfrac{x}{a})^3+o(x^3)\right)$

$= \left(1+\frac{1}{2a}x-\frac{1}{8a^2}x^2+\frac{1}{16a^3}x^3+o(x^3)\right)$

$\left(1+\frac{1}{2a}x+\frac{3}{8a^2}x^2+\frac{5}{16a^3}x^3+o(x^3)\right)$

$= 1+\frac{1}{2a}x-\frac{1}{8a^2}x^2+\frac{1}{16a^3}x^3 \qquad = 1+\frac{1}{a}x+\frac{1}{2a^2}x^2+\frac{1}{2a^3}x^3+o(x^3)$

$\frac{1}{2a}x+\frac{1}{4a^2}x^2-\frac{1}{16a^3}x^3+\dots$

$+\frac{3}{8a^2}x^2+\frac{3}{16a^3}x^3+\dots$

$+\frac{5}{16a^3}x^3+\dots+o(x^3)$

$f(x)=\underline{1+\frac{1}{a}x+\frac{1}{2a^2}x^2}+\frac{1}{6a^3}x^3+o(x^3) \qquad f(x)-g(x)=\frac{1}{6a^3}x^3-\frac{1}{2a^3}x^3+o(x^3)$

$g(x)=\underline{1+\frac{1}{a}x+\frac{1}{2a^2}x^2}+\frac{1}{2a^3}x^3+o(x^3) \qquad = -\frac{1}{3a^3}x^3+o(x^3)$

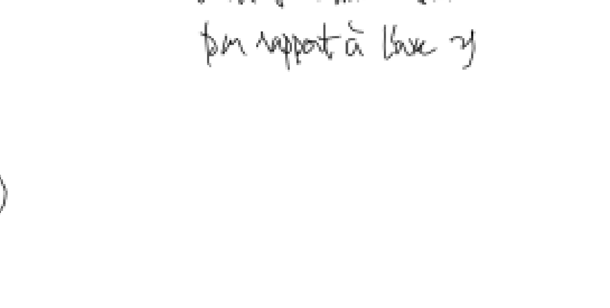
si $x>0$ $\quad f(x)-g(x)<0$

si $x<0$ $\quad f(x)-g(x)>0$

par exemple si je mets $a=1$

$f(x)=e^x = 1+x+\frac12x^2+\frac16x^3+o(x^3)$

$g(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1+x+\frac12x^2+\frac12x^3+o(x^3)$



on a traité le cas où $a>0$

si $\underline{a<0}$ $\quad$ on peut faire un changement de variable $x\mapsto -x$

$y=-x \rightsquigarrow f(x)=\exp(x/a)=\exp(-y/a)=\exp(y/(-a))$ $\quad$ → on se ramène au cas de $a>0$

$g(x)=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{a-y}{a+y}}=\sqrt{\frac{(-a)+y}{(-a)-y}}$ $\quad$ on a fait une réflexion par rapport à l'axe y

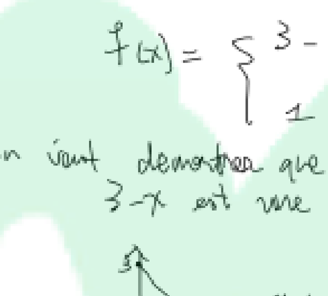
Ex 29 $\qquad f(x)=3-x\cdot\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}$ $\quad \sim x \quad \operatorname{ch}x-1\sim\frac12x^2$

$DL_3(0)$ $\qquad \operatorname{sh}x = x+\frac16x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$

$\operatorname{ch}x = 1+\frac12x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)$

$f(x)=3-x\cdot\frac{\operatorname{sh}x}{\frac12x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)} = 3-x\cdot\operatorname{sh}x\cdot\frac{1}{\frac12x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{12}x^2+o(x^3)} = \underline{3-x\cdot\operatorname{sh}x\cdot\frac{1}{\frac12x^2}(1-\frac{1}{12}x^2+o(x^3))}$

$= \underline{1-\frac16x^2}+o(x^3)$



$A^2-1=(A+1)(A-1)$

$A^2+1-2A=(A-1)^2$

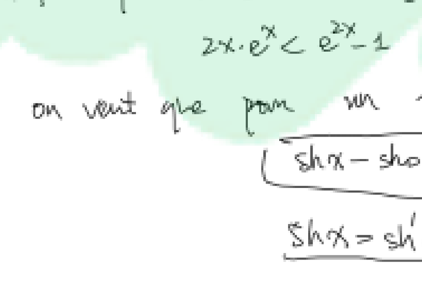
2. $\quad f(x)=3-x\cdot\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}=3-x\frac{\frac12(e^x-e^{-x})}{\frac12(e^x+e^{-x})-1}\frac{2e^x}{2e^x}=3-x\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1-2e^x}=3-x\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{(e^x-1)^2}$ $\quad x\neq0$

$1 \quad x=0$

si $x\neq0$ $\quad e^x-1\neq0 \Rightarrow 3-x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}$

$f(x)=\begin{cases}3-x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1} & \text{si } x\neq0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

on veut démontrer que $3-x$ est une asymptote en $+\infty$, c'est à dire $\lim_{x\to+\infty}\underline{f(x)-(3-x)}=0$



$f(x)-(3-x)=\left(3-x\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)-(3-x)=x\left(-\frac{e^x+1}{e^x-1}+1\right)=x\cdot\frac{-(e^x+1)+e^x-1}{e^x-1}$

$=x\cdot\frac{-2}{e^x-1}\to0$

$=-\frac{2x}{e^x-1}$

$f(x)=(3-x)+\left(-\frac{2x}{e^x-1}\right)$

Demontrer que $f(x)$ est bien décroissante sur $[0,+\infty[$

$f'(x)=\left(3-x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)'=\left(3-x-\frac{2x}{e^x-1}\right)'=-1-\left(\frac{2x}{e^x-1}\right)'=-1-\frac{2(e^x-1)-2x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=\frac{2x\cdot e^x-e^{2x}+1}{(e^x-1)^2}<0$

il faut que $2x\cdot e^x-e^{2x}+1<0$

$2x\cdot e^x<e^{2x}-1 \iff x<\frac{e^{2x}-1}{2e^x}=\frac12(e^x-e^{-x})=\operatorname{sh}x$

on veut que pour un $x>0$ $\operatorname{sh}x>x$

$\boxed{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}0=\operatorname{sh}'(c)\,(x-0)}$ ← par le théorème des accroissements finis $\exists c\in]0,x[$ tq.

$\underline{\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}'c\cdot x>x}$ $\quad \operatorname{sh}'c>1$ mais comme $\operatorname{sh}'c=\operatorname{ch}c=\frac{e^c+e^{-c}}{2}>1$

3. $\quad \operatorname{sh}x>x$ pour $x>0$

théorème des accroissements finis $\Rightarrow$ $\operatorname{sh}x$ $\exists c\in]0,x[$ tq. $\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}0=\operatorname{sh}'c\cdot(x-0)$

$\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}'c\cdot x=\operatorname{ch}c\cdot x$

mais $\operatorname{ch}c=\frac{e^c+e^{-c}}{2}\geq1$

si $c>0$ $\operatorname{ch}x>1 \Rightarrow \operatorname{sh}x>x$

4. $\quad f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-e^{2x}+1}{(e^x-1)^2}$

$f'(x)<0 \iff 2x\cdot e^x-e^{2x}+1<0 \iff x<\frac12(e^x-e^{-x})=\operatorname{sh}x$

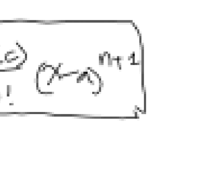
$\Rightarrow$ on a $f'(x)<0$ pour $x>0$.

5 $\quad$ a montre que $f(2)\cdot f(3)<0$ $\qquad$ on sait que $f(2)>0$, $f(3)<0$

$f(x)=3-x-\frac{2x}{e^x-1}$ $\qquad 3-2-\frac{4}{e^2-1}$ $\qquad 3-3-\frac{6}{e^3-1}$

$1-\frac{4}{e^2-1}=\frac{e^2-5}{e^2-1}$

$e^2\approx7\dots$



$\Rightarrow$ il existe un seul zéro dans $]2,3[$

Théorème de Taylor-Lagrange.

en a

$f(x)=f(a)+\underline{o(1)}$ $\qquad$ TAC $\quad f(x)=f(a)+\boxed{f'(c)\,(x-a)}$ $\quad$ pour $c\in]a,x[$

TY

$f(x)=a_0+a_1\cdot(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n\boxed{+o((x-a)^n)}$

TL

$f(x)=a_0+a_1(x-a)+\dots+a_n(x-a)^n\boxed{+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$ $\quad$ pour $c\in]a,x[$

TY : argument avec o, c'est local

TL : on se donne a et x → on peut trouver c ⇒ c'est un argument "global"

Ex 13 $\qquad \underline{\forall x\in\mathbb{R} \quad 1-\frac12x^2\leq\cos x\leq1-\frac12x^2+\frac{1}{24}x^4}$ $\qquad [-2,2]$ $\qquad x^4 \quad x\to+\infty$

$\cos x=1-\frac12x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$

Par le théorème de TL $\exists c\in]0,x[$ $\qquad \cos x=1+0\cdot x+o(x)$

$\cos x=1+0\cdot x+\frac{\cos^{(2)}(c)}{2!}(x-0)^2=1+\frac{\cos^{(2)}c}{2}\cdot x^2=\underbrace{1-\frac{\cos c}{2}x^2}\geq1-\frac12x^2$

$\cos c \Rightarrow -\sin c \Rightarrow -\cos c$

$\cos x=1+0\cdot x-\frac12x^2+0\cdot x^3+\frac{\cos^{(4)}(c)}{4!}(x-0)^4=1-\frac12x^2+\frac{\cos^{(4)}(c)}{24}x^4=1-\frac12x^2+\frac{\cos c}{24}x^4\leq1-\frac12x^2+\frac{1}{24}x^4$

Ex 14 $\quad \forall x>0 \qquad \frac1x-\frac{1}{2x^2}<\underline{\ln(1+x)-\ln x}<\frac1x-\frac{1}{2(x+1)^2}$

$\ln(1+x)-\ln x=\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\ln\left(1+\frac1x\right) \qquad f(y)=\ln(1+y)$ avec $\underline{y=\frac1x}$

(TL) $\qquad \ln(1+y)=f(0)+f'(0)\cdot y+\frac{f''(c)}{2}\cdot y^2 \qquad$ pour $c\in]0,y[$

$=0+1\cdot y+\frac{-\frac{1}{(1+c)^2}}{2}y^2 \qquad f'(y)=\frac{1}{1+y} \quad f''(y)=-\frac{1}{(1+y)^2}$

$=y-\frac{1}{2(1+c)^2}y^2=\frac1x-\underbrace{\frac{1}{2(1+c)^2}\frac{1}{x^2}}$ avec $c\in]0,\frac1x[$ $\qquad f''(c)=-\frac{1}{(1+c)^2}$

il suffit que $\qquad \underbrace{-\frac{1}{2x^2}<-\frac{1}{2(1+c)^2}\frac{1}{x^2}}<-\frac{1}{2(1+x)^2}$

comme $c>0 \qquad 2(1+c)^2x^2>2\cdot1^2\cdot x^2=2x^2 \Rightarrow -\frac{1}{2x^2}<-\frac{1}{2(1+c)^2x^2}$

comme $c<\frac1x \qquad 2(1+c)^2x^2<2(1+\frac1x)^2\cdot x^2=2(1+x)^2 \Rightarrow 0<-\frac{1}{2(1+x)^2}$

$x\cdot\left(\frac1x-\frac{1}{2x^2}<\ln(1+\frac1x)<\frac1x-\frac{1}{2(1+x)^2}\right)$

$1-\frac{1}{2x}<x\cdot\ln(1+\frac1x)<1-\frac{x}{2(1+x)^2}$

$x\to+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\underline{x\cdot\ln(1+\frac1x)}=1$

$\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln(1+\frac1x)}=e$

$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac1x)^x$

Ex 20 $\quad \bullet \quad \frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{x^2} \qquad x\to+\infty$ $\quad$ "$0-0\sim0$"

$\ln(x+1)=\ln x+\ln(1+\frac1x) \qquad \left((x+1)=x\cdot(1+\frac1x)\right)$

$\frac{\ln x+\ln(1+\frac1x)}{x}-\frac{\ln x}{(x+1)}=\underbrace{\ln x\cdot\left(\frac1x-\frac{1}{x+1}\right)}+\frac{\ln(1+\frac1x)}{x}$

$=\ln x\cdot\frac{1}{x(x+1)}+\underbrace{\frac{\ln(1+\frac1x)}{x}}$ $\qquad \ln(1+\frac1x)\underset{+\infty}{\sim}\frac1x \qquad \ln(1+\frac1x)=\frac1x+\underset{+\infty}{o}(\frac1x)$

$\ln(1+u)\overset{0}{\sim}u$

$=\ln x\cdot\frac{1}{x(x+1)}+\frac1x\left(\frac1x+\underset{+\infty}{o}(\frac1x)\right)$

$=\ln x\cdot\frac{1}{x(x+1)}+\boxed{\frac{1}{x^2}+\underset{+\infty}{o}(\frac{1}{x^2})}$ $\qquad$ comme $1=\underset{+\infty}{o}(\ln x)$

$=\boxed{\ln x\cdot\frac{1}{x(x+1)}}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$ $\qquad \frac{1}{x^2}=\underset{+\infty}{o}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$

$=\frac{\ln x}{x^2}+o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x(x+1)}}{\frac{\ln x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$

2 $\qquad x^{\frac{1}{x+1}}-(x+1)^{\frac1x}\underset{+\infty}{\sim}-\frac{\ln x}{x^2} \qquad e^A-e^B=e^B(e^{A-B}-1)$

$(e^{\ln x})^{\frac{1}{x+1}}-e^{\ln(x+1)\frac1x}=e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\left(e^{\left(\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)}-1\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=0 \qquad \underset{+\infty}{\sim}e^{\boxed{\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}}}-1 \qquad \boxed{e^u-1}\overset{0}{\sim}u$

$\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}=1 \qquad \underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x} \qquad u=\underline{\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}}\to0$

$\underset{+\infty}{\sim}-\frac{\ln x}{x^2}$ $\quad$ (par Q1)