- $y' = a(x)\cdot y + b(x)$ $\quad$ $y(x)$ sera une fonction en x de classe C^1

  $y'(x) = a(x)\cdot y(x) + b(x)$ $\quad$ où a, b sont des fonctions continues

- $y'' = a y' + b y + c(x)$. $\quad$ où $a, b \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ et c une fonction continue.

- $y' = a(x)\cdot y + b(x)$
  - $b(x) = 0$ $\quad$ on a une equation $y' = a(x)\cdot y$ $\quad$ linéaire : $\cancel{y \cdot y'}$ $\quad$ d'ordre 1 : $\cancel{y''}$

    homogène : $b(x) = 0$

$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = a(x)$. $\quad$ l'intégrale $\Rightarrow$ $\int (\ln y)'\,dx = \int a(x)\,dx$

$\left((\ln(y(x)))' = \left(\frac{1}{y(x)}\right)\cdot y'(x) = \frac{y'}{y} \right)$

$\int (\ln y)'\,dx = \ln y$ $\quad$ $\int a(x)\,dx = A(x)$ c'est une primitive pour $a(x)$

$\ln y = A(x) + C$ $\quad$ C est une constante

$y = e^{A(x)+C}$

$y = e^C \cdot e^{A(x)} = \lambda\, e^{A(x)}$

où $\lambda = e^C$ est une const.

$e^C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$

$y = \lambda \cdot e^{A(x)}$ $\quad$ λ n'est pas necessairement positive

$y'(x) = \lambda \cdot e^{A(x)} \cdot A'(x)$

$= \boxed{\lambda \cdot e^{A(x)}}\, a(x) = y(x)\cdot a(x)$

En fait pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad$ $y = \lambda \cdot e^{A(x)}$ est une solution

si $\lambda = 0$ $\quad$ $y = 0$

Ex 1 $\quad$ Q 1 $\quad$ $y' - 3x^2 y = 0$.

$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = 3x^2$

$\ln y = \int (\ln y)'\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + C$

$\Rightarrow y = e^{x^3 + C} = \lambda \cdot e^{x^3}$

$a(x) = 3x^2 \quad b(x) = 0$.

$A(x) = x^3 + c$.

$y = \lambda \cdot e^{x^3}$ $\quad$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 y$.

$y = 0 \Rightarrow y' = 0$

$y = 1 \Rightarrow y' = 3x^2$

Q2 $\quad$ $y' + y\cdot\cos x = 0$. $\quad$ $y' = -\cos x \cdot y$ $\quad$ $a(x) = -\cos x$ $\quad$ $A(x) = -\sin x$

$b(x) = 0$.

$y = \lambda \cdot e^{A(x)} = \lambda \cdot e^{-\sin x}$

Q3 $\quad$ $y' + \alpha y = 0$ $\quad$ $y' = -\alpha y$ $\quad$ $a(x) = -\alpha$ $\quad$ $A(x) = -\alpha x$

$y = \lambda \cdot e^{-\alpha x}$

$\boxed{\text{si } \alpha = -1 \quad y' - y = 0 \quad y' = y \quad y = \lambda \cdot e^x}$

Q4 $\quad$ $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $a(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'est definie que pour $1-x^2 > 0$

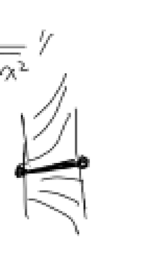
$\Leftrightarrow x \in]-1, 1[$

$A(x) = \arcsin x + c$

$y = \lambda \cdot e^{\arcsin x}$ $\quad$ $(x \in]-1,1[)$

" $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$ " $\quad$ " $\sqrt{1-x^2}\, y' = y$ " $\quad$ $x \in]-1,1[\Rightarrow$ " $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$ "

$x \in \{-1, 1\}$ $\quad$ $0 \cdot y' = y$



$y = 0 \quad x \in]-1,1[$ $\quad$ $y = 0 \quad x \in [-1,1]$ $\quad$ $0 = 0$.

On a des solutions :

$\lambda \in ?$ $\quad$ $y = \lambda \cdot e^{\arcsin x}$ $\quad$ $x \in]-1,1[$

$\lambda = 0$ $\quad$ $y = 0$ $\quad$ $x \in [-1,1]$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

$\frac{1}{x}$ est definie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ $\quad$ $\ln(x)$

$\int \frac{1}{x}\,dx$ existe sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ $\quad$ $\ln|x|$

Q5 $\quad$ $y' + \frac{x}{1-x^2}\, y = 0$.

$y' = -\frac{x}{1-x^2}\, y$

$a(x) = \frac{-x}{1-x^2} = -\frac{x}{(1-x)(1+x)} = c \cdot \boxed{\frac{1}{1-x}} + d \cdot \boxed{\frac{1}{1+x}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$

$= \frac{c + cx + d - dx}{(1-x)(1+x)}$

$c + d = 0$ $\Rightarrow$ $c = -\frac{1}{2}$

$c - d = -1$ $\quad$ $d = \frac{1}{2}$

$A(x) = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| + \ln|x+1|\right)$

$= \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1|$

$y = \lambda \cdot e^{A(x)} = \lambda\, e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-1|} = \lambda\, |x^2-1|^{\frac{1}{2}} = \lambda \sqrt{|x^2-1|}$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ $\quad$ parce que en $x = \pm 1$ $\sqrt{|x^2-1|}$ n'est pas derivable.

$\sqrt{|x|}$

$(cx+d)\cdot\frac{1}{1+x}$

$(c(x+1) + d - c)\,\frac{1}{1+x}$

$= c + (d-c)\cdot\frac{1}{1+x}$

$\frac{cx+d}{1+x^2}$

$\frac{cx+d}{1+x} = c + \frac{d-c}{1+x}$

Q6 $\quad$ $y' = y \cdot \tan x$ $\quad$ $a(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

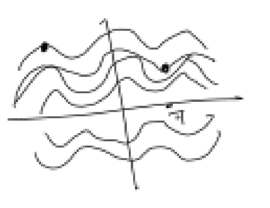
$A(x) = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

$y = \lambda \cdot e^{A(x)} = \lambda \cdot e^{-\ln|\cos x|} = \lambda \cdot |\cos x|^{-1} = \lambda \cdot \frac{1}{|\cos x|}$

$\tan x$ n'est pas définie pour $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$; lorsque x prend ces valeurs $|\cos x| = 0 \Rightarrow y \to +\infty$.

- l'equation n'est définie que pour $x \in]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$
- donc les solutions aussi

Ex 2 $\quad$ $y' + y\cdot\cos x = 0$ $\quad$ avec $\boxed{y(\pi) = 1}$ $\quad$ $(\pi, 1)$



$y = \lambda \cdot e^{-\sin x}$

$y = 1 \quad x = \pi$ $\quad$ $1 = \lambda \cdot e^{-\sin \pi} = \lambda \Rightarrow \lambda = 1$ $\quad$ $\boxed{y = e^{-\sin x}}$

$\boxed{\text{avec } y(\pi/2) = 4}$

$y = 4 \quad x = \pi/2$ $\quad$ $4 = \lambda \cdot e^{-\sin \pi/2} = \lambda \cdot e^{-1} = \frac{\lambda}{e} \Rightarrow \lambda = 4e$ $\quad$ $\boxed{y = 4e \cdot e^{-\sin x}}$

$y' = 3x^2 y$ $\quad$ avec $y(3) = 5$

$y = \lambda \cdot e^{x^3}$ $\leftarrow$ $x = 3,\ y = 5 \rightsquigarrow \lambda$

$\cancel{y \cdot y'}\ \cancel{y''}$

- $y' = a(x)\cdot y + b(x)$ $\quad$ linéaire $\quad$ d'ordre 1 $\quad$ non homogène

supposons qu'on a déjà trouvé une solution y_0 $\quad$ $y_0' = a(x)\cdot y_0 + b(x)$

On en prend une autre y_1 $\quad$ $y_1' = a(x)\cdot y_1 + b(x)$

$(y_1 - y_0)' = y_1' - y_0' = a(x)\cdot(y_1 - y_0)$

si on note $y_2 = y_1 - y_0$ $\quad$ $y_2' = a(x)\cdot y_2$ $\Rightarrow y_2$ est une solution pour l'equation homogène $\boxed{y' = a(x)\cdot y}$

$y_2 = \lambda \cdot e^{A(x)}$ $\quad$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad$ $A(x) = \int a(x)$

$y_1 - y_0 = \lambda \cdot e^{A(x)}$

$y_1 = y_0 + \lambda \cdot e^{A(x)}$

- une fois qu'on a trouvé une solution y_0

  toutes les autres sont de la forme $y_0 + \underbrace{\lambda \cdot e^{A(x)}}_{\text{solution pour l'eq. homogène}}$

- il reste à en trouver une

  " $y = \lambda \cdot e^{A(x)}$ " est la solution pour l'eq homogène.

  on va remplacer λ par une fonction $\lambda(x)$, et regarder

  $\boxed{y = \lambda(x)\, e^{A(x)}}$ $\quad$ $A(x) = \int a(x)\,dx \Rightarrow A'(x) = a(x)$

  $y' = \lambda'(x)\cdot e^{A(x)} + \lambda(x)\cdot e^{A(x)} \cdot \underbrace{A'(x)}_{a(x)} = \lambda'(x)\cdot e^{A(x)} + \underbrace{\lambda(x)\cdot e^{A(x)}}_{y(x)} \cdot a(x)$

  $= \boxed{\lambda'(x)\, e^{A(x)}} + y\cdot a(x)$

  il suffit de trouver une fonction

  $\lambda(x)$ tq. $\quad$ $b(x) = \lambda'(x)\cdot e^{A(x)} \Leftrightarrow \lambda'(x) = b(x)\, e^{-A(x)}$

  $\lambda(x) = \int (\lambda'(x))\,dx = \int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx$

- $\boxed{y_0(x) = \underbrace{\left(\int b(x)\cdot e^{-A(x)}\,dx\right)}_{\lambda(x)} \cdot e^{A(x)}}$ est une solution pour l'equation $y' = a(x)\, y + b(x)$

- toutes les solutions sont $y_0(x) + \lambda \cdot e^{A(x)}$ pour $y' = a(x)\, y + b(x)$.

Ex 3

(E_1) $\quad$ $y' = 3xy + x$ $\quad$ $a(x) = 3x \quad b(x) = x$.

$A(x) = \frac{3}{2}x^2$

les solutions pour l'equation homogène $y' = 3xy$

sont $y = \lambda \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$

on fait la variation de constante

$y = \lambda(x)\cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$

$y' = \lambda'(x)\, e^{\frac{3}{2}x^2} + \underbrace{\lambda(x)\cdot e^{\frac{3}{2}x^2}}_{y} \cdot \underbrace{3x}_{a(x)} = \lambda'(x)\cdot e^{\frac{3}{2}x^2} + a\cdot y$

il faut donc $\quad$ $\lambda'(x)\, e^{\frac{3}{2}x^2} = b(x) = x$

$\lambda'(x) = x \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2} \Rightarrow \lambda(x) = \int x \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2}\,dx$

$= \int e^{-\frac{3}{2}x^2}\, \frac{1}{2}\, d(x^2)$

$= \int e^{-\frac{3}{2}x^2} \cdot \frac{1}{-3} \cdot \frac{-3}{2}\, dx^2$

$= -\frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}x^2} + C$

$y = \lambda(x)\, e^{\frac{3}{2}x^2}$

$= \left(-\frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}x^2} \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}\right)$

$= -\frac{1}{3}$

$y_0 = -\frac{1}{3}$ est une solution pour $y' = 3x\cdot y + x$

$\Rightarrow$ toutes les solutions sont donc $y = y_0 + \lambda \cdot e^{\frac{3}{2}x^2} = -\frac{1}{3} + \lambda \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$

$y' = 3x\cdot y + x = x(3y+1) \Rightarrow \frac{y'}{3y+1} = x$

$\frac{1}{3}(\ln(3y+1))' = x \Rightarrow \int \frac{1}{3} (\ln(3y+1))'\,dx = \int x\,dx$ $\quad$ où $\lambda = \frac{e^c}{3}$

$\frac{1}{3}(\ln(3y+1))' = \frac{1}{3}\frac{(3y+1)'}{3y+1} = \frac{y'}{3y+1}$

$\frac{1}{3}\ln(3y+1) = \frac{1}{2}x^2 + C$ $\quad$ $-\frac{1}{3} + \lambda \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$

$\ln(3y+1) = \frac{3}{2}x^2 + C$ $\quad$ $\|$

$3y + 1 = e^{\frac{3}{2}x^2 + c} \Rightarrow y = \frac{e^{\frac{3}{2}x^2 + c} - 1}{3}$

(E_2) $\quad$ $y' = 3\cdot\frac{y}{x} + x$ $\quad$ $a(x) = \frac{3}{x}$ $\quad$ $b(x) = x$.

$= \frac{3}{x}\cdot y + x$ $\quad$ $A(x) = 3\cdot\ln|x|$

les solutions pour $y' = \frac{3}{x}\, y$ sont donc $y = \lambda\, e^{A(x)} = \boxed{\lambda \cdot |x|^3}$

mais comme $\lambda|x|^3$ n'est pas derivable en 0

pour $x > 0$ $\quad$ $y = \lambda x^3$ $\quad$ $y' = 3\lambda x^2 = \frac{3y}{x}$

pour $x < 0$ $\quad$ $y = \lambda(-x)^3 = -\lambda x^3$

$y' = -3\lambda x^2 = \frac{3y}{x}$

$y(x) = \begin{cases} \lambda|x|^3 = \lambda x^3 & \text{pour } x > 0 \\ (-\lambda)|x|^3 = (-\lambda)\cdot(-x)^3 = \lambda x^3 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y(x) = \lambda x^3$ est une solution sur $\mathbb{R}$ entièrement.

les solutions pour $y' = \frac{3y}{x}$ sont donc $y = \lambda \cdot x^3$

la variation de constante $\quad$ $y = \lambda(x)\cdot x^3$ $\quad$ $\frac{3y}{x} = 3\lambda(x)\cdot x^2$

$y' = \lambda'(x)\, x^3 + \lambda(x)\cdot 3x^2 = \lambda'(x)\cdot x^3 + \underbrace{\frac{3y}{x}}_{a(x)\cdot y}$

il faut $\lambda'(x)\cdot x^3 = b(x) = x \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{x^2}$

$\lambda(x) = \int \lambda'(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$

$y = \lambda(x)\cdot x^3 = -x^2$

donc $-x^2$ est une solution pour $y' = a(x)\, y + b(x) = \frac{3y}{x} + x$

$-2x = (-x^2)' = \frac{3\cdot(-x^2)}{x} + x = -3x + x = -2x$

donc toutes les solutions sont $-x^2 + \lambda \cdot x^3$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

$y' = \frac{3y}{x} + x$ $\quad$ $y' = \frac{3y}{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{y'}{3y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{3}\ln y = \ln x + C$

$\boxed{\lambda \cdot x^3}$ $\quad$ $y = e^{3\ln x + C} = \lambda \cdot x^3$

$\Rightarrow -x^2 + \lambda x^3$

$y_0 = \lambda(x)\cdot x^3 \Rightarrow y' = \frac{3y}{x} + x$ $\quad$ $\lambda'(x)\cdot x^3 = x$

$y_0 = \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x^3 = \boxed{-x^2}$ $\quad$ $\lambda(x) = -\frac{1}{x}$