Notions Fondamentales L1/L2

Université Paris-Dauphine, 2016/2017, L3 Maths, J. Lamboley

Liste (prévisionnelle) des notions

(La plupart des notions ci-dessous seront rappelées ou traitées en cours, mais même celles qui ne le seront pas sont exigibles. Les éléments en gras sont potentiellement des nouveautés et feront nécessairement partie des éléments traités en cours)

1. Logique, raisonnements, ensembles

   (a) Implication/équivalence, négation, contraposée, raisonnement par double implication, par équivalence, par l'absurde, rédaction par Analyse/Synthèse, preuve d'unicité.

   (b) Raisonnement par récurrence simple, double, forte.

   (c) Variable muette. Introduction de variables (par Soit, Posons, Il existe), quantificateurs.

   (d) Eléments de théorie des ensembles, injection/surjection/bijection, **dénombrabilité, relation d'équivalence, ensemble quotient**.

2. Espaces métriques, analyse réelle

   (a) Analyse des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continuité, théorème de Rolle, des valeurs intermédiaires, étude de l'injectivité/surjectivité des fonctions continues, dérivabilité, étude des variations d'une fonction, étude des fonctions classiques (exponentielle/logarithme, puissance, trigonométrique).

   (b) **Espace métrique,** topologie (ouvert, fermé, intérieur, adhérence), espace vectoriel normé, compacité, théorème de Bolzano Weierstrass,

   (c) Limite de suites, **limsup, liminf**, limites pour les fonctions, continuité, uniforme continuité, application lipschitzienne.

   (d) Suite de Cauchy, **complétude**, exemple de $\mathbb{R}^n$ et $C^0(K)$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$, **théorème de point fixe**.

   (e) Séries réelles : convergence absolue, théorèmes de comparaison, exemple des séries de Riemann, critère spécial des séries alternées.

   (f) Suites et séries de fonctions : convergence simple, uniforme, théorème d'interversion de limites, d'interversion limite/intégrale, d'interversion limite/dérivée, convergence normale d'une série. Etude des séries entières.

3. Algèbre linéaire

   (a) Espace vectoriel, s.e.v., somme d'espaces vectoriels, application linéaire.

   (b) Famille libre, génératrice **(également pour des familles infinies)**, base, dimension (finie) d'un espace vectoriel.

   (c) Caractérisation d'une application linéaire sur les éléments d'une base, représentation matricielle d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire, formules de changement de base.

   (d) Déterminant **(différentes définitions)**, formule de Cramer.

   (e) Réduction d'endomorphisme : valeur propre, vecteur propre, espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice. Polynôme caractéritique, **multiplicité algébrique et multiplicité géométrique**. Théorème de trigonalisation.

   (f) **Polynôme d'endomorphisme, notion de polynôme annulateur**, **théorème de décomposition des noyaux**, caractérisations de la diagonabilisité, **notion de polynôme minimal**, théorème de Cayley-Hamilton.

   (g) Algèbre bilinéaire, notion de produit scalaire, exemples classiques, base orthonormée, procédé d'orthonormalisation de Schmidt, endomorphisme/matrice orthogonal(e), forme bilinéaire, forme quadratique, réprésentation matricielle de forme quadratique, théorème de diagonalisation des matrices symétriques.

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 1

Révisions générales, raisonnements, quantificateurs

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^*,\ \ x < y \ \ \Rightarrow \ \ \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ \ x < \sqrt{x}$.
3. $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \geq N$.

Pour le numéro 1, calculer la dérivée de la fonction inverse, et comprendre l'erreur qu'on aurait pu commettre en étudiant les variations de cette fonction en fonction du signe de sa dérivée.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.
2. f possède un minimum.
3. f s'annule au plus une fois.

Exercice 3. (*) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ possède un point fixe.

Exercice 4 (Analyse fonctionnelle 2015)**.** Soit $f_1, f_2 \in C^0([0,1])$ telles que

$$\forall \varphi \in C^0([0,1]),\ \ \int_0^1 f_1(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f_2(x)\varphi(x)dx.$$

Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 5. (*) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un groupe de n personnes qui se serrent la main (ou pas) pour se dire bonjour. Montrer qu'au moins 2 personnes serrent le même nombre de mains.

Exercice 6. (*) Montrer par analyse-synthèse que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et que cette décomposition est unique.

Exercice 7.

1. Déterminer, par analyse-synthèse toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R},\ \ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. (**Ultra-Classique) Résoudre la même question mais en cherchant les fonctions seulement supposées continues.

Exercice 8. (**) A l'aide du nombre $\sqrt{2}$ (dont on admet qu'il est irrationnel), montrer que

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \ x^y \in \mathbb{Q}.$$

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 2
Les suites

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1 (Mines 2015)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, |u_p| < \varepsilon.$$

Que signifie cette propriété ? Donner sa négation.

Exercice 2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.
3. (*) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
2. (**) Comment aurait-on pu calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on ne nous avait pas donné le résultat ?

Exercice 4. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, positive, et qui converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers un réel $\ell > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

1. (*) Théorème de Césaro : on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. Montrer que le résultat précédent est valable si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
3. Trouver un contre-exemple à la réciproque du théorème de Césaro.
4. (*) Réciproque partielle du théorème de Césaro : Montrer que si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, et que (u_n) est supposée monotone, alors (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 6 (Limite sup/inf)**.** Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on pose dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$v_n := \inf_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_p, \qquad w_n := \sup_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_p.$$

1. Etudier la monotonie de v et w, et montrer que v et w ont une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, qu'on note respectivement ℓ_1 et ℓ_2. Justifiez également que

$$\ell_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_p, \qquad \ell_2 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_p.$$

2. Calculer ℓ_1, ℓ_2 dans le cas $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.

3. Montrer que

$$\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}} \iff \ell_1 = \ell_2,$$

   et qu'alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la valeur commune $\ell_1 = \ell_2$.

4. Montrer plus généralement que ℓ_1 est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite dont la limite est ℓ_1, et que si ℓ est la limite d'une suite extraite de (u_n), alors $\ell \geq \ell_1$.)* De même, ℓ_2 est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).

Feuille 3
Autour de la dénombrabilité

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

On rappelle qu'on appelle ensemble dénombrable un ensemble qui peut s'injecter dans $\mathbb{N}$.
On rappelle qu'on peut démontrer qu'un ensemble infini dénombrable est en bijection avec $\mathbb{N}$.

1. (**) Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (faire un dessin et comprendre comment on peut deviner le candidat $f(m,n) = n + \sum_{i=0}^{m+n} i$).
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.
3. En déduire que le produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. (*) Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-ensembles dénombrables d'un ensemble fixe E. En utilisant la question 1., montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.
6. (*) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
7. (*) Montrer que l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
8. (*) Montrer que les ensembles $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ et $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ sont en bijection *(on pourra donner 2 arguments : un premier utilisant la propriété rappelée en préambule, un second exhibant explicitement une telle bijection)*

On admet que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels n'est pas dénombrable.

9. Montrer que l'ensemble des irrationnels est non dénombrable.

Definition. Un nombre réel x est dit algébrique s'il existe un polynôme non nul, à coefficients entiers ($P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$) tel que $P(x) = 0$. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

10. Montrer que les nombres rationnels sont algébriques.
11. (*) Montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont des nombres algébriques.
12. (*) Montrer que l'ensemble des nombres transcendants est non vide *(pensez à utiliser la notion de dénombrabilité !)*.

Hypothèse du continu : c'est la question de savoir si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dénombrable est nécessairement en bijection avec $\mathbb{R}$ (comparer avec la propriété rappelée en préambule : un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui n'est pas fini est en bijection avec $\mathbb{N}$).
Il se trouve qu'on ne peut pas montrer que c'est vrai, et on ne peut pas montrer que c'est faux (dans l'axiomatique dite ZFC) : on dit que cette proposition est indécidable. Ce caractère indécidable de la proposition, lui, se démontre ! En d'autres termes, on peut *décider* que cette propriété est vraie ou fausse, au choix, et en faire un nouvel axiome, qui aura lui-même de nouvelles conséquences.

Feuille 4
Analyse réelle

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.

Exercice 2. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est bornée, et qu'elle atteint ses bornes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C_n \in \mathbb{R}_+$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|^n \leq C_n e^{2|x|}.$$

Exercice 3 (Mines 2015)**.** Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe.

1. Montrer que f atteint son maximum en a ou en b.
2. Même question sans supposer que f est dérivable.

Exercice 4. (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$
Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Feuille 5

Suites et séries de fonctions

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f (sur $\mathbb{R}$).

1. Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; |P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 1.$$
2. Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_{n_0}$ quand $n \geq n_0$?
3. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice 2. Soit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\; f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe C^1.

Exercice 3. On pose
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la fonction ζ est bien définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
2. Etudier la monotonie et la convexité de la fonction ζ.
3. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
4. (*) Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+.
5. (**) Etablir que $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 6

Topologie de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

Exercice 2. (*) Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $[0,1[$ et $\mathbb{R}$. Qu'en est-il de l'existence d'une bijection continue entre $[0,1]$ et $\mathbb{R}$? Et entre $]0,1[$ et $\mathbb{R}$?

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie naturelle. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappelez la définition d'une partie convexe. Donnez des exemples de parties convexes, et de parties non convexes.
2. Montrer que $\overline{C}$, l'adhérence de C, est convexe.
3. (*) Montrer que $\mathring{C}$, l'intérieur de C, est convexe.

Exercice 4.

1. Quelle est la dimension de l'espace des matrices carrées $M_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) ? En déduire que $M_n(\mathbb{R})$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, à $\mathbb{R}^p$ pour un entier p que l'on précisera.
2. En déduire un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, exprimé soit en fonction des coefficients des matrices, soit sous forme matricielle.
3. Décrire en fonction des coefficients la signification de A_k converge vers A quand $k \to +\infty$ où $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
4. (*) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{R})$ *(On pourra utiliser pour la partie densité qu'une matrice a nécessairement un nombre fini de valeurs propres, tout en en rappelant la démonstration).*

Exercice 5. On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie naturelle.

1. (a) Montrer qu'un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dense si et seulement si U rencontre tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.
   (b) (*) Etant donné U et V deux ouverts denses de $\mathbb{R}^n$, montrer que $U \cap V$ est aussi un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$. Est-ce encore vrai si U et V ne sont plus nécessairement ouverts ?
2. On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est σ-compact s'il existe une suite croissante de parties compactes $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_k$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est σ-compact.
   (b) Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, distinct de $\mathbb{R}^n$, et a un point de U.
   Montrer que $\left\{x \in \mathbb{R}^n \ /\ \|x-a\|_2 \le k+1 \ \text{ et } d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \ge \frac{1}{k+1}\right\}$ est compact ($k \in \mathbb{N}$).
   (On rappelle et on pourra utiliser sans démonstration que pour toute partie A non vide la fonction $x \mapsto d(x,A) := \inf\{\|x-\alpha\|_2, \alpha \in A\}$ est continue).
   En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est σ-compact.
   (c) La notion de σ-compacité dépend-elle de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$?

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 7

Espaces vectoriels, Applications linéaires

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, et F, G deux s.e.v. de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que $F \cup G$ soit un s.e.v. de E.

Exercice 2.

1. Montrer que $C^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans l'espace $C^0(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $C^0(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Exercice 3. On définit :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes (c'est-à-dire des applications linéaires définies et à valeurs dans un même espace vectoriel).
2. Etudiez l'injectivité et la surjectivité de f et de g.
3. Comparez avec la situation des endomorphismes en dimension finie.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient f et g deux endomorphismes de E, tels que $f \circ g = Id_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5. Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. En supposant que E est de dimension finie, montrer que le résultat précédent reste valable si $\lambda = 0$.
3. En étudiant les endomorphismes "dérivée" et "primitive nulle en 0" sur $\mathbb{R}[X]$, montrer que le résultat n'est plus valable si $\lambda = 0$ et $E = \mathbb{R}[X]$.

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 8

Algèbre linéaire, Calcul Matriciel

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Dans toute cette feuille, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (Déterminant de Vandermonde)**.** Etant donnés $(a_1, \ldots, a_n)$ des réels, montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_n) = v$ où v est un vecteur donné de E. Donner le rang de f, et discuter le caractère diagonalisable de f.

Exercice 4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto AM$.

1. Déterminer le noyau de $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base.
2. f est-il surjectif ?
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 (Mines 2015)**.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = I_2$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, dire si M est diagonalisable, dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$. Interpréter géométriquement.

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_{2n}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. On sait alors qu'il existe P un polynôme annulateur de B, scindé à racines simples (sur $\mathbb{K}$).

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B^p = \begin{pmatrix} A^p & pA^p \\ 0 & A^p \end{pmatrix}$
3. En déduire une expression de $P(B)$, et montrer que 0 est la seule valeur propre de A.
4. Conclure.

Université Paris-Dauphine 2014/2015
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Sujet blanc

On désigne par I l'intervalle $[1,+\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I et à valeurs réelles, et on note $C^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I et à valeurs réelles.

Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif.

Pour f un élément de E, on dit qu'une fonction $y \in C^1(I)$ est une solution du problème (E_f) si

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0.$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E, on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I, puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

1 Etude de l'équation (E_f)

On rappelle qu'aucun prérequis n'est exigé sur la notion d'équation différentielle. On considère $f \in E$.

1. Soit $y \in C^1(I)$. Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Montrer que y est solution de (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in I, \; y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at}f(t)dt\right).$$
2. Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I, celle-ci est unique.
3. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ est convergente.
4. Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur I.

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question 4.

2 Quelques propriétés de U

1. Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.
2. Montrer que U est un endomorphisme de E (c'est-à-dire que $U : E \to E$ est bien définie et linéaire).
3. U est-il injectif ?
4. On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U^{n+1} = U^n \circ U$ (définition récurrente). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U^{n+1}(f)$ est la fonction
$$x \mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt.$$

3 Cas des fonctions exponentielles

1. Pour $k \in \mathbb{R}_+$ on pose $f_k : x \mapsto e^{-kx}$. Expliciter $U(f_k)$.
2. En déduire que pour tout réel $\lambda \in]0, 1/a]$, $Ker(U - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.
3. Pour tout entier naturel n, expliciter $U^n(f_k)$. Pour tout $x \in I$, préciser
$$\lim_{n\to+\infty} \left[U^n(f_k)\right](x).$$

4 Cas des fonctions sinus et cosinus

Dans cette partie et seulement dans cette partie, on supposera $a = 1$

1. Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.

2. Montrer que le sous-espace P de E engendré par les fonctions sin et cos est stable par U et que $(\sin, \cos)$ en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme $U_P : P \to P$ qui est la restriction de U à P (pour espace de départ et d'arrivée).

3. Calculer M^2, M^3, M^4. Expliciter M^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis préciser la limite de M^n quand $n \to +\infty$.

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Notions fondamentales L1/L2

Sujet Novembre 2014
Durée : 2 heures

Les différentes parties du sujet ne sont pas indépendantes ; néanmoins chaque partie peut être abordée en admettant les résultats des parties précédentes.
Le sujet est long, il n'est pas attendu que vous traitiez tout le sujet ; la qualité de la rédaction sera un élément déterminant dans la notation.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes, et pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

1 Etude d'un endomorphisme sur $\mathbb{R}[X]$

On introduit l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d strictement positif, montrer que $\Delta(P)$ est de degré $d-1$. Déterminer également le degré de $\Delta(P)$ dans le cas où P est de degré 0 ou $-\infty$.
   (c) Montrer que le noyau de Δ est $\mathbb{R}_0[X]$.

2. On fixe $d \in \mathbb{N}^*$, et on considère $\Delta_d : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X]$ la restriction de Δ à $\mathbb{R}_d[X]$ (pour espace de départ et d'arrivée).
   (a) Montrer que Δ_d est bien définie. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
   (b) Enoncer le théorème du rang. Identifier le noyau de Δ_d, et en déduire que $\mathrm{Im}(\Delta_d) = \mathbb{R}_{d-1}[X]$.

3. On pose E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes qui s'annulent en 0. Montrer que la restriction de Δ à E (c'est-à-dire l'application $\widetilde{\Delta} : P \in E \mapsto \Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$) est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

2 Polynômes de Newton

D'après la question 3 de la partie 1, on peut définir par récurrence la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$N_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta(N_{n+1}) = N_n \text{ avec } N_{n+1}(0) = 0.$$

(en effet, étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $N_n \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $N_{n+1} \in E$ antécédent de N_n par $\widetilde{\Delta}$, c'est-à-dire qui satisfait $N_{n+1} \in E$ et $\Delta(N_{n+1}) = N_n$)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$N_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k).$$

2. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, la famille $(N_n)_{n\in[\![0,d]\!]}$ forme une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

3. Etant donné $d \in \mathbb{N}$, écrire la matrice de Δ_d dans la base $(N_n)_{n\in[\![0,d]\!]}$. Δ_d est-il diagonalisable ?

3 Equivalent de $|N_n(x)|$ lorsque $n \to \infty$

Soit $x \in \mathbb{R}$: si $x \in \mathbb{N}$, il est clair que $(N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire à 0. On suppose donc $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ et alors $(N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas. Enfin, étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^\alpha|N_n(x)|$.

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$, et en déduire que
$$v_n = \frac{\alpha - x - 1}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
2. Déterminer selon la valeur de α, la nature de la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (ainsi que son signe quand celle-ci diverge), et en déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer qu'il existe un réel strictement positif noté $C(x)$ tel que
$$N_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}.$$

4 Etude de $\sum_{n=0}^{\infty} t^n N_n(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in]-1, 1[$, la série de terme général $(t^n N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. On pose $f : t \in]-1, 1[\mapsto (1 + t)^x$. Montrer que f est C^∞, et calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ en fonction de $N_k(x)$.

3. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral, et en l'appliquant à f, en déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n N_n(x).$$
(on montrera soigneusement que le reste intégral converge vers 0 ; on pourra pour cela montrer et utiliser l'inégalité
$$\forall s \in [0, t],\ \ 0 \leq \frac{t - s}{1 + s} \leq t.)$$

5 Résolution de $P(X + 1) - P(X) = Q(X)$, où Q est donné

On adopte la notation usuelle définie par récurrence : $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$.
Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. On cherche à trouver l'ensemble des polynômes P tels que
$$P(X + 1) - P(X) = Q(X),$$
autrement dit on cherche l'ensemble des antécédents de Q par Δ.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} Q(k)$ faisant intervenir P solution de $\Delta(P) = Q$.

2. Montrer que
$$Q = \sum_{n=0}^{d} \Delta^n(Q)(0)N_n.$$
3. En déduire, en fonction de $(\Delta^n(Q)(0))_{n\in[\![0,d]\!]}$, l'ensemble des polynômes P vérifiant la relation $\Delta(P) = Q$.

4. **Exemple :** on considère $Q = X^2$. Trouver P solution de $\Delta(P) = Q$, et en déduire une expression de $\sum_{k=0}^{n} k^2$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Notions fondamentales L1/L2

Sujet Octobre 2015, Examen. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés.

La qualité de la rédaction sera un élément déterminant dans la notation. Sauf précision contraire, on demande une justification de toute assertion.
Les fautes graves pourront être sanctionnées par des points négatifs.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes, et pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $C^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^n sur $\mathbb{R}$. En particulier, $C^0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, on associe la fonction $\phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt.$$

1 Préliminaires

Les questions de cette partie sont indépendantes. Certains résultats pourront servir dans la suite du sujet.

1. On définit
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$
   (a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et étudier le signe de φ' sur $\mathbb{R}^*$. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Calculer les limites de φ en $+\infty$ et en $-\infty$, et montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

2. Rappeler la formule du binôme de Newton *(développement de* $(a+b)^n$ *où* $(a,b) \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*)*. Etant donné $k \in \mathbb{N}$, écrire le polynôme $P_k = X^{k+1} - (X-1)^{k+1}$ sous forme développée, et montrer en particulier que c'est un polynôme de degré k.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$, n'ayant qu'une seule valeur propre. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A est proportionnelle à la matrice identité.

2 Généralités sur ϕ

1. Montrer que ϕ est bien défini, et est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$.

2. On fixe $f \in C^0(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(f)(x) = \int_0^1 f(x+u-1)du.$$

(b) On suppose f paire. Exprimer $\phi(f)(-x)$ en fonction de $\phi(f)(x+1)$. Donner une interprétation graphique.

(c) On suppose f croissante. Peut-on en déduire que $\phi(f)$ est croissante ? Donner une interprétation graphique.

3 Injectivité/Surjectivité de ϕ

1. Montrer que pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, $\phi(f)$ est une fonction de classe C^1, et donner sa dérivée. Plus généralement, et sans justification, donner des conditions sur les entiers naturels k et j pour avoir $\phi(C^k(\mathbb{R})) \subset C^j(\mathbb{R})$?

2. Montrer que le noyau de ϕ est constitué des fonctions continues 1-périodiques dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle.

3. Montrer très rigoureusement que l'endomorphisme ϕ n'est ni injectif, ni surjectif.

4 Restriction à $\mathbb{R}_n[X]$

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace stable par ϕ. Ainsi on peut noter $\phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ *(on montrera en particulier que la matrice est triangulaire supérieure, et que les termes de la diagonale sont égaux à une valeur fixe que l'on précisera).*

3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_n. L'endormorphisme ϕ_n est-il diagonalisable ?

5 Eléments propres de ϕ

Montrer que si $\lambda > 0$, alors il existe une fonction de type exponentielle (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto e^{ax}$ où a est un réel) qui est vecteur propre de ϕ, associée à λ.

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille Bonus 1
Autour de la cardinalité, plus difficile

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

On dit que deux ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection entre E et F.

1. (*) Rappelez la notion de développement décimal d'un nombre, et décrire les réels admettant deux développements décimaux.
2. (**) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.
3. (** **Cantor**) Montrer que si E est un ensemble, alors E n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(E)$.
4. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
5. (** **Cantor-Bernstein**) Soit E et F deux ensembles. Montrer que si E est équipotent à un sous-ensemble de F et que F est équipotent à un sous-ensemble de E, alors E est équipotent à F.
6. (*) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est ni dénombrable, ni équipotent à $\mathbb{R}$.

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille Bonus 2

Structures algébriques, Ensembles quotients

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Definition.
- Une loi de composition interne $*$ sur un ensemble X est une application $* : X \times X \to X$. Pour $x \in X$ et $y \in X$, on note $x * y$ plutôt que $*(x, y)$.
- Si $(X, *)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne, on dit que $e \in X$ est un élément neutre (pour $*$) si $\forall x \in X, x * e = x$ **et** $e * x = x$.
  Dans le cas où il existe un élément neutre, si $x \in X$, on appelle inverse de x un élément $y \in X$ tel que $x * y = e$ **et** $y * x = e$ (on montre dans l'exercice 1 que l'élément neutre est unique ; sinon la notion d'inverse dépendrait de l'élément neutre considéré...).

Exercice 1. Soit $(X, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

1. Montrer qu'un élément neutre est nécessairement unique.
2. Supposons que $*$ est associative ($\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = x * (y * z)$), et qu'il existe un élément neutre $e \in X$ ($(X, *)$ est alors appelé un monoïde). Montrer qu'il y a unicité de l'inverse, c'est-à-dire que tout élément de X a au plus un inverse dans X. On note alors $\overset{-1}{*}x$ cet inverse, ou s'il n'y a pas d'ambiguité x^{-1}.
3. Sous les conditions de la question précédente, montrer que si x a un inverse, alors x^{-1} également, et que $(x^{-1})^{-1} = x$. Montrer que si x et y ont chacun un inverse, alors $x*y$ aussi et $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$.
4. Exemple : $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la loi de multiplication. Montrer qu'il existe un élément neutre, et caractériser les éléments ayant un inverse.

Definition.
- Soit $(G, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne. On dit que $(G, *)$ est un groupe si:
  - $*$ est associative,
  - $*$ a un élément neutre dans G,
  - chaque élément de G a un inverse dans G pour la loi $*$.
- Si $(G, *)$ est un groupe et que $*$ est commutative ($\forall x, y \in G^2, x * y = y * x$), on dit que G est un groupe commutatif, ou encore un groupe abélien.
- Si $(G, *)$ est un groupe, on dit que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si
  - $H \subset G$,
  - $(H, *)$ est un groupe.

Exercice 2 (Caractérisation des sous-groupes)**.** Montrer que si $(G, *)$ est un groupe dont le neutre est noté e, alors

$$(H, *) \text{ est un sous-groupe de } (G, *) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H \subset G \\ e \in H \\ \forall x \in H, \forall y \in H, x * y^{-1} \in H \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e, tel que $\forall x \in G, x * x = e$. Montrer que G est abélien.

Definition. Etant donné un ensemble X, une loi de composition interne $*$ sur X, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On dit que $*$ passe au quotient par $\mathcal{R}$ si

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad (x\mathcal{R}x' \ \text{ et } \ y\mathcal{R}y' \ ) \Longrightarrow (x * y)\mathcal{R}(x' * y').$$

On peut alors définir une loi de composition interne $\overline{*}$ sur $X/\mathcal{R}$ par la formule

$$\forall x, y \in X, \quad \overline{x} \,\overline{*}\, \overline{y} = \overline{x * y}.$$

Definition. Soit $(A, +, *)$ un ensemble muni de deux lois de composition internes. On dit que $(A, +, *)$ est un anneau si

1. $(A, +)$ est un groupe abélien,
2. la loi $*$ a un élément neutre et est associative,
3. $\forall x, y, z \in A^3, (x + y) * z = x * z + y * z, \quad \text{et} \quad z * (x + y) = z * x + z * y.$

Dans ce cas, il est fréquent de noter 0 l'élément neutre de la loi $+$ et 1 l'élément neutre de la loi $*$. L'anneau est dit commutatif si $*$ est commutative.

Exemple. $(\mathbb{Z}, +, *)$, $(\mathbb{R}[X], +, *)$ et $(M_n(\mathbb{R}), +, *)$ sont des anneaux.

Exercice 4. Soit $(A, +, *)$ un anneau. Montrer que l'ensemble des inversibles pour la loi $*$, muni de cette même loi, est un groupe. On l'appelle groupe des inversibles de A. Identifier ces groupes dans les exemples ci-dessus.

Exercice 5. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les lois $+$ et $*$ sur $\mathbb{Z}$ passent au quotient pour la relation d'équivalence

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \; \mathcal{R}_n \; y \Longleftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}.$$

Montrer que l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par cette relation, muni des lois $\overline{+}$ et $\overline{*}$ est un anneau.

Exercice 6 (Passage au quotient par un sous-groupe)**.** Soit $(G, *)$ un groupe, et $(H, *)$ un sous-groupe de $(G, *)$. On dit que $(H, *)$ est distingué dans $(G, *)$ si

$$\forall g \in G, \forall h \in H, g * h * g^{-1} \in H.$$

(on note parfois $H \lhd G$).

1. Montrer que si $(G, *)$ est abélien, alors tous ses sous-groupes sont distingués.
2. On définit la relation binaire

$$\forall x, y \in G^2, x\mathcal{R}_H y \Longleftrightarrow x * y^{-1} \in H.$$

   Montrer que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence.

3. Montrer que si H est distingué, alors la loi $*$ passe au quotient par la relation $\mathcal{R}_H$. Montrer que l'ensemble $G/\mathcal{R}_H$ muni de la loi $\overline{*}$ est un groupe. On le note plutôt G/H et on l'appelle groupe quotient de G par H.

Exercice 7. Soit $(A, +, *)$ un anneau commutatif (cette dernière hypothèse est là pour simplifier ; il existe la notion d'idéal à gauche, à droite, et bilatère, qui sont communes dans le cas commutatif). On dit que $I \subset A$ est un idéal de A si

$$\begin{cases} (I, +) \text{ est un sous-groupe de } (A, +) \\ \forall a \in A, \forall i \in I, \;\; a * i \in I. \end{cases}$$

1. Montrer que si I est un idéal de $(A, +, *)$, alors les lois $+$ et $*$ passent au quotient par la relation d'équivalence
$$\forall x, y \in A^2, x\mathcal{R}_I y \Longleftrightarrow x - y \in I,$$
et que l'ensemble quotient $(A/\mathcal{R}_I, \overline{+}, \overline{*})$ est un anneau. On le note plutôt A/I et on l'appelle anneau quotient de A par I.

2. Montrer que $n\mathbb{Z}$ (où $n \in \mathbb{N}$) est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, *)$ (on retrouve avec la question précédente le résultat de l'exercice 5). Montrer que ce sont les seuls (autrement dit, tout idéal de $\mathbb{Z}$ s'écrit $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$; en fait on montre mieux : tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et il se trouve que ce sont en plus des idéaux).

3. Montrer que les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ sont de la forme $P\mathbb{R}[X] = \{PQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ (on note plutôt $(P) = \{PQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}$, c'est l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par P).

Definition. Soit $(K, +, *)$ un ensemble muni de deux lois de composition internes. On dit que $(K, +, *)$ est un corps si

- $(K, +, *)$ est un anneau commutatif non nul (i.e. $K \neq \{0\}$),
- tous les éléments de $K^* := K \setminus \{0\}$ ont un inverse dans K pour la loi $*$.

Exercice 8. On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation

$$\forall (p, q), (p', q'), \;\; (p, q)\mathcal{R}(p', q') \iff pq' = p'q.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

2. On définit sur l'ensemble quotient $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{R}$ les lois
$$\forall (p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \overline{(p, q)} + \overline{(p', q')} = \overline{(pq' + p'q, qq')}, \quad \overline{(p, q)} * \overline{(p', q')} = \overline{(pp', qq')}.$$
Montrer que ces lois sont bien définies (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du choix du représentant de $\overline{(p, q)}$ et $\overline{(p', q')}$.

3. Montrer que $((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{R}, +, *)$ est un corps.

4. (*) Identifiez ce corps à un corps bien connu. *(le mot "Identifiez" est un peu ambiguë, on aurait dû dire "Montrer qu'il existe un isomorphisme entre ce corps et un corps bien connu", le mot "isomorphisme de corps" signifiant une bijection qui respecte les structures de corps des ensembles d'arrivée et de départ ; dans le cas présent, le corps qu'on vient de construire peut en fait être considéré comme une définition (une construction) de ce corps bien connu)*

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'un polynôme est irréductible s'il ne peut pas être écrit comme produit de deux polynômes non constants (c'est l'équivalent de la notion de nombre premier dans $\mathbb{Z}$). On rappelle également que deux polynômes sont dits premiers entre eux s'ils n'ont aucun polynôme non constant qui les divise tous les deux.

1. Rappeler le théorème de Bezout.

2. (*) Montrer que si P est irréductible, alors $(\mathbb{R}[X]/(P), +, *)$ (par abus, on omet les barres sur $+$ et $*$) est un corps.

3. Montrer que $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

4. (*) On en déduit que $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ est un corps. Identifiez ce corps bien connu.

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille Bonus 3
Analyse

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. On sait que
$$e = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}.$$

2. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 2.
1. Rappelez la définition de la continuité uniforme d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
2. Trouver une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. (*) Enoncer et démontrer le théorème de Heine.
4. (*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq ax + b.$$
5. (**) Montrer que la réciproque du résultat précédent est faux, même si on suppose f continue, positive, et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n], \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (autrement dit, calculer la limite simple, et établir si la convergence est uniforme ou non).

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$g_n : x \mapsto n\left[f(x + 1/n) - f(x)\right].$$

1. On suppose f deux fois dérivables de dérivée seconde bornée. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' (sur $\mathbb{R}$).
2. (*) On suppose f de classe C^1. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = a_n x^n (1-x).$$

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
2. Montrer que cette série converge normalement si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
3. (*) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6. Théorème de projection. On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire. Soit S une partie fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappeler la définition du produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que tout point admet une projection sur S, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe p tel que
$$\|x-p\|_2 = \inf_{y\in S} \|x-y\|_2.$$
3. Montrer que si S est de plus convexe, alors il y a unicité d'un tel projeté. Dans ce cas, on parle *du* projeté de $x \in \mathbb{R}^n$ sur S, et on le note $P_S(x)$. L'application $x \mapsto P_S(x)$ s'appelle alors la projection sur S.
4. Donnez un exemple où il n'y a pas unicité du projeté.
5. Dans le cas où S est convexe et $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que le projeté $p = P_S(x)$ est caractérisé par les propriétés :
$$\begin{cases} p \in C \\ \forall y \in C, \langle x-p, y-p\rangle \leq 0 \end{cases}$$
6. Supposons que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que S est convexe, et que l'application P_S alors bien définie est linéaire.

Exercice 7 (**). Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie naturelle. Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$: on dit qu'un point $x \in \mathbb{R}^n$ est isolé dans A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$. On dit que la partie A est discrète si tous ses points sont isolés.
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappelez la définition et la caractérisation d'un sous-groupe.
2. Donnez des exemples de sous-groupes de $\mathbb{R}^n$ (un qui est discret (mais distinct de $\{0\}$), un qui est dense (mais distinct de $\mathbb{R}^n$), et dans le cas $n \geq 2$, un qui n'est ni discret, ni dense).
3. On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que G est discret. En déduire que G est fermé.
4. (*) **Cas** $n = 1$. Montrer que si 0 n'est pas isolé dans G, alors G est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un réel a, soit dense dans $\mathbb{R}$.
5. **Application à la notion de période :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose
$$\mathcal{P}_f = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_f$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

   On dit que f est périodique si $\mathcal{P}_f \neq \{0\}$.

   (b) Donner des exemples de fonctions f telles que
   $$\mathcal{P}_f = \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}_f = \{0\}, \quad \mathcal{P}_f = \mathbb{Z}, \quad \mathcal{P}_f = \mathbb{Q}.$$
   (c) Montrer que si f est continue, périodique et non constante, alors il existe $T_0 \in]0,\infty[$ tel que $\mathcal{P}_f = T_0\mathbb{Z}$.

Feuille Bonus 4
Algèbre linéaire

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si f est inversible, alors f^{-1} est un polynôme en f.
2. (*) On définit
$$\exp(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^n.$$
Justifier que cette somme est bien définie et que $\exp(f) \in \mathcal{L}(E)$. Montrer également que $\exp(f)$ est un polynôme en f.

Exercice 2. (**) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $e^A = A$ *(voir l'exercice précédent pour une définition de l'exponentielle matricielle).* Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.
2. (*) Montrer que si f et g sont diagonalisables, alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g *(on dit que f et g sont codiagonalisables).*
3. (*) Montrer que si f et g sont trigonalisables, alors il existe une base commune de trigonalisation de f et g *(on pourra commencer par montrer que f et g ont un vecteur propre commun).*