Sujet agreg AP 2010.

10^h57.

10^h59 : I).1) Il est connu que $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi}$

I.2) . $H_0(y) = (-1)^0 e^{y^2/2} \dfrac{d^0}{dy^0}\left(e^{-y^2/2}\right) = e^{y^2/2} e^{-y^2/2} = \boxed{1}$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

· $H_1(y) = (-1)^1 e^{y^2/2}\left[-\dfrac{2y}{2} e^{-y^2/2}\right] = \boxed{y}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

· $H_2(y) = (-1)^2 e^{y^2/2}\left[-(1)\cdot e^{-y^2/2} - y\cdot\left(-\dfrac{2y}{2}\right) e^{-y^2/2}\right]$

$= \boxed{-1 + y^2}$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

I-3) On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: " $H_n \in \mathbb{R}[y]$, $\deg H_n = n$ et le coeff dominant de H_n est 1 "

. $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $H_0 \equiv 1$ est de degré 0 et de coeff dominant 1

. Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Alors par définition

$\forall y \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(y) = (-1)^{n+1} e^{y^2/2} \dfrac{d^{n+1}}{dy^{n+1}}\left(e^{-y^2/2}\right)$

$= (-1)^{n+1} e^{y^2/2} \dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{d^n}{dy^n}\left(e^{-y^2/2}\right)\right]$

$$= (-1)^{n+1} e^{y^2/2} \frac{d}{dy}\left[\frac{d^n}{dy^n}\left(e^{-y^2/2}\right)\right]$$

$$= (-1)^{n+1} e^{y^2/2} \frac{d}{dy}\left[\frac{H_n(y)}{(-1)^n e^{y^2/2}}\right]$$ (remarquons que $e^{y^2/2} \neq 0$)

$$= (-1)\, e^{y^2/2}\left[H_n'(y)\, e^{-y^2/2} + H_n(y)\left(-\frac{2y}{2}\right) e^{-y^2/2}\right]$$

$$= \boxed{-H_n'(y) + y\, H_n(y)}$$

Par $\mathcal{P}(n)$, $H_n, H_n' \in \mathbb{R}[y]$ donc $H_{n+1} \in \mathbb{R}[y]$

De plus, il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[y]$ tel que

$\forall y \in \mathbb{R}$, $H_n(y) = y^n + Q(y)$ (encore par $\mathcal{P}(n)$)

et donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(y) = -n y^{n-1} - Q'(y)$

$$+ y^{n+1} + y\, Q(y)$$

avec $\deg\left(yQ(y)\right) \leq n$ et $\deg Q' \leq n$

D'où le fait que $\deg H_{n+1} = n+1$

et son coefficient dominant est 1, ce

qui montre $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

H_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.

11ème 12 : je prends le temps de vérifier que la relation

$H_{n+1} = -H_n' + Y H_n$ est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$

avec la question I.2.

I.4.a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On doit montrer que $\int_{\mathbb{R}} H_n(y)^2 e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} < +\infty$

La fonction $y \overset{\in \mathbb{R}}{\mapsto} H_n(y)^2 \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ étant continue, il suffit d'en étudier son comportement en $+\infty$ et $-\infty$ pour établir son intégrabilité sur $\mathbb{R}$.

Or par I.3, H_n est un polynome. Par croissance comparée, on a $\lim y^2 H_n^2(y) e^{-y^2/2} = 0$

donc par critère de Riemann sur l'intégrabilité,

on a $\lim \int_{\mathbb{R}} H_n(y)^2 e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} < +\infty$

c'est-à-dire $H_n \in L^2(\mu)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.4.b) On cherche à montrer :

$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, si $i \neq j$ alors

$$\langle H_i, H_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} (-1)^i e^{y^2/2} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) \cdot (-1)^j e^{y^2/2} \frac{d^j}{dy^j}\left(e^{-y^2/2}\right) \frac{e^{-y^2/2} dy}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= 0$$

c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) \frac{d^j}{dy^j}\left(e^{-y^2/2}\right) e^{+y^2/2} dy = 0$

ou encore $\int_{\mathbb{R}} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j(y)\, dy = 0.$

Soit donc $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

Si $A \in \mathbb{R}_+$, et $i \geq 1$, par intégration par parties on a

$$\int_{-A}^{A} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j(y)\,dy$$

$$= \left[\frac{d^{i-1}}{dy^{i-1}}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j(y)\right]_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} \frac{d^{i-1}}{dy^{i-1}}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j'(y)\,dy$$

or $\dfrac{d^{i-1}}{dy^{i-1}}\left(e^{-y^2/2}\right) = (-1)^{i-1} H_{i-1}(y)\, e^{-y^2/2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

donc $\lim_{A \to +\infty} \left[\dfrac{d^{i-1}}{dy^{i-1}}\left(e^{-y^2/2}\right) H_i(y)\right]_{-A}^{A} = 0$

puisque $H_{i-1} \cdot H_i \in \mathbb{R}[Y]$.

ainsi on obtient

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall i \geq 1 \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^{i-1}}{dy^{i-1}}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j'(y)\,dy$$

en itérant le procédé précédent on obtient

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j(y)\,dy = (-1)^i \int_{\mathbb{R}} \frac{d^0}{dy^0}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j^{(i)}(y)\,dy}$$

Or par symétrie du produit scalaire, si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i \neq j$, on peut supposer sans perte de généralité que $i > j$.

Comme $H_j \in \mathbb{R}_j[Y]$, on a $H_j^{(i)} = 0$ dans ce cas,

ce qui montre bien $\int_{\mathbb{R}} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) H_j(y)\,dy = 0$

d'où $\langle H_i, H_j \rangle = 0$. Ainsi la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

I.4.c) On reprend le calcul de la question précédente avec $i = j \in \mathbb{N}$:

On a alors $\int_{\mathbb{R}} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) H_i(y)\,dy = (-1)^i \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} H_i^{(i)}(y)\,dy$

$= (-1)^i\, i!\, \sqrt{2\pi}$

car H_i est un polynome de degré i et de coefficient dominant 1.

Par suite, $\|H_i\|^2_{L^2(\mu)} = \langle H_i, H_i \rangle$

$$= (-1)^i \int_{\mathbb{R}} \frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-y^2/2}\right) H_i(y) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= (-1)^i \ (-1)^i \ i! \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = i!$$

d'où $\forall m \in \mathbb{N}$, $\boxed{\|H_m\|_{L^2(\gamma)} = \sqrt{m!}}$

11h57 : je vérifie la formule précédente avec $n=0$ (facile)

pause : 1 heure de composition.

Bilan I : question 1, 2, facile

question 3 pas dure mais il faut bien rédiger

question 4.a idem

question 4.b+c fonctionnent ensemble

et sont plutôt difficiles, et c'est du calcul

16 Mai 09 :

II.1) On cherche à résoudre

le problème de Cauchy $\begin{cases} x'' = -\frac{k}{m} x \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = y_0. \end{cases}$

Par le cours, l'ensemble des solutions de $x'' = -\frac{k}{m} x$ est un espace vectoriel de dimension 2 constitué des fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Si on note $x_{\alpha\beta}$ cette fonction, les conditions de Cauchy s'écrivent $\begin{cases} x_{\alpha\beta}(0) = \alpha = x_0 \\ x'_{\alpha\beta}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}\, \beta = y_0 \end{cases}$

Ainsi l'une solution du problème de Cauchy est

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto x_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$

II.2) L'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x'' = -\frac{k}{m} x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

est un espace vectoriel de dimension 1 constitué des fonctions de la forme $t \longmapsto x_0 \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$

où $\beta \in \mathbb{R}$.

Si on note x_β cette solution, on est amené à résoudre : $x_\beta(T) = x_T$

c'est-à-dire qu'on cherche $\beta \in \mathbb{R}$ tq

$$x_0 \cos(\omega T) + \beta \sin \omega T = x_T \qquad (*)$$

1er cas : $\sin \omega T \neq 0$ c'est-à-dire

$$T \notin \frac{\pi}{\omega} \mathbb{Z}$$

alors l'équation $(*)$ admet pour unique solution

$$\beta = \frac{x_T - x_0 \cos \omega T}{\sin \omega T}$$

2e cas : $\sin \omega T = 0$ c'est-à-dire $T \in \frac{\pi}{\omega} \mathbb{Z}$.

dans ce cas l'équation $(*)$ devient $x_0 \cos \omega T = x_T$

si cette égalité est vraie alors tout $\beta \in \mathbb{R}$ convient

Sinon aucun $\beta \in \mathbb{R}$ ne convient.

Conclusion : 3 cas se présentent :

1) $T \notin \frac{\pi}{\omega}\mathbb{Z}$, le problème $\begin{cases} x'' = -\frac{k}{m} x \\ x(0) = x_0, \; x(T) = x_T \end{cases}$

admet une unique solution à savoir

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \boxed{x_0 \cos(\omega t) + \frac{x_T - x_0 \cos \omega T}{\sin \omega T} \sin(\omega t)}$$

2) $T \in \frac{\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ et $x_0 \cos \omega T = x_T$

alors le problème $\begin{cases} x'' = -\frac{k}{m} x \\ x(0) = x_0, \; x(T) = x_T \end{cases}$ admet une

infinité de solutions, à savoir

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \boxed{x_0 \cos(\omega t) + \beta \sin \omega t} \text{ pour } \beta \in \mathbb{R}.$$

3) $T \in \frac{\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ et $x_0 \cos \omega T \neq x_T$

alors le problème $\begin{cases} x'' = -\frac{k}{m} x \\ x(0) = x_0, \; x(T) = x_T \end{cases}$ n'admet pas de solution.

II-3) pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ m\,x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -k\,x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\,p(t) \\ -k\,x(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix} Y(t)$$

Ainsi Y est solution de $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ m y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

II.4) • Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et x la solution de (1) et (2) associée.

Ona $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(t) = \dfrac{p(t)^2}{2m} + \frac{1}{2} k\, x(t)^2$

$$= \frac{m}{2} \left(x'(t)\right)^2 + \frac{k}{2} \left(x(t)\right)^2$$

Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}'(t) = m\, x'(t)\, x''(t) + k\, x(t)\, x'(t)$

$$= x'(t)\left(-k\, x(t)\right) + k\, x(t)\, x'(t) = 0$$

où on a utilisé la relation 1.

$\mathbb{R}$ étant un intervalle, on récupère donc que

$\mathcal{E}$ est une fonction constante et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) = \frac{k}{2} x_0^2 + \frac{m}{2} y_0^2.}$$

- On cherche maintenant à décrire l'ensemble

$$\mathcal{E} := \left\{ \frac{k}{2} x_0^2 + \frac{m}{2} y_0^2 \,,\, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On a déjà l'inclusion $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_+$ puisque $m > 0$ et $k \geq 0$.

Réciproquement si $\alpha \in \mathbb{R}_+$

on peut prendre $(x_0, y_0) = \left(0, \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\right)$ bien défini

car $m \neq 0$ et $\frac{\alpha}{m} \geq 0$ et alors la valeur

$\frac{k}{2} x_0^2 + \frac{m}{2} y_0^2$ associée vaut α.

Ainsi par double inclusion $\boxed{\mathcal{E} = \mathbb{R}_+}$.

16h35 : II.1) est du cours ultra classique.

II.2) demande un peu de vigilance mais en prenant son temps il n'y a pas de difficulté.

II.3) est un élément de cours

II.4) ne présente pas non plus de difficulté, mais il faut réfléchir un peu pour faire la fin proprement.

III.1) On a par définition

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \phi(y) = \psi\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, y\right)$$

donc ψ étant C^2, par composition avec l'homothétie $y \mapsto \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, y$ qui est bien sûr également C^2, on a que ϕ est C^2 sur $\mathbb{R}$.

Par hypothèse on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\,\psi(x)$

ou $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi''(x) = \frac{m\omega}{\hbar}\,\phi''\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right)$

donc en posant $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$, on a $m\omega x^2 = \hbar y^2$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{m\omega}{\hbar}\,\phi''(y) + \frac{1}{2}\omega\hbar y^2 \phi(y)$$

$$= \frac{\omega\hbar}{2}\left[-\phi''(y) + y^2\phi(y)\right]$$

et donc la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x)$

$$= E\,\psi(x)$$

devient

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\omega\hbar}{2}\left[-\phi''(y) + y^2\phi(y)\right] = E\,\phi(y)$$

d'où

$$\boxed{-\phi'' + y^2\phi = \varepsilon\phi \text{ avec } \varepsilon := \frac{2E}{\omega\hbar}}$$

III.2.a) L'équation différentielle se réécrit

$$f'(y) = y\,f(y)$$

et par le cours, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1 formé des fonctions

$$y \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha \exp\left(\int_0^y s\,ds\right) = \boxed{\alpha \exp\left(\frac{y^2}{2}\right)} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

17/02 : je vérifie en dérivant cette fonction que ça marche bien.

III.2.b) Pour $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$,

on pose $f : y \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{d}{dy} + y\right)\varphi(y)$

et alors φ est solution de (S) ssi f est solution de l'équation de la question III.2.a et donc φ est solution de (S) ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in \mathbb{R}, \left(\frac{d}{dy} + y\right)\varphi(y) = \alpha \exp\left(\frac{y^2}{2}\right)$

On est donc amené à résoudre l'équation non homogène $\varphi' + y\varphi = \alpha e^{y^2/2}$ où on a fixé $\alpha \in \mathbb{R}$.

On sait que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 1 et de la forme

$\varphi_p + S_H$ où S_H est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $g' + yg = 0$

et φ_p est une solution particulière de $\varphi' + y\varphi = \alpha e^{y^2/2}$

- Résolution de l'équation homogène :

comme à la question précédente, l'ensemble des solutions de $g' + yg = 0$ est l'ensemble des

fonctions $y \overset{\in \mathbb{R}}{\mapsto} \beta \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

- Recherche d'une solution particulière :

on cherche φ_p de la forme $\varphi_p : y \in \mathbb{R} \mapsto \beta(y) e^{-y^2/2}$

et alors on constate que

$$\varphi_p' + y\varphi_p = \alpha e^{y^2/2} \iff \beta' e^{-y^2/2} - y\beta e^{-y^2/2} + y\beta e^{-y^2/2} = \alpha e^{y^2/2}$$

$$\iff \beta'(y) = \alpha e^{y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\varphi_p(y) = \alpha \left(\int_0^y e^{s^2} ds \right) e^{-y^2/2}$ est une solution particulière de $\varphi_p' + y\varphi_p = \alpha e^{y^2/2}$

et donc au final par ce qui précède, l'ensemble des solutions de $\varphi' + y\varphi = \alpha e^{y^2/2}$

est $\boxed{y \in \mathbb{R} \mapsto \beta e^{-y^2/2} + \alpha \left(\int_0^y e^{s^2} ds \right) e^{-y^2/2}}$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

D'après l'équivalence établie en début de question il s'agit aussi de l'ensemble des solutions de

$$\left(-\frac{d}{dy}+y\right)\left[\left(\frac{d}{dy}+y\right)\varphi(y)\right]=0.$$

III. 2.c) Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, et

$$\varphi_{\alpha\beta}: y\mapsto \beta e^{-y^2/2}+\alpha\left(\int_0^y e^{s^2}ds\right)e^{-y^2/2}$$

on constate que $\forall y\geq 0$ $\int_0^y e^{s^2}ds \geq \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}y}^{y} e^{s^2}ds$

$$\geq \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}y}^{y} e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}ds = y\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{y^2/2}$$

et donc $\left(\int_0^y e^{s^2}ds\right)e^{-y^2/2} \geq y\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\forall y\in\mathbb{R}_+$

Ainsi la fonction $y\mapsto\left(\int_0^y e^{s^2}ds\right)e^{-y^2/2}$ n'est pas de carré intégrable, puisque $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)y$ ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.

Or $y \mapsto \beta e^{-y^2/2}$ est bien dans $L^2(\mathbb{R})$

et comme ce dernier est un espace vectoriel,

pour avoir $\varphi_{\alpha\beta} \in L^2(\mathbb{R})$ il est nécessaire d'avoir $\alpha = 0$

(par l'absurde, si $\alpha \neq 0$ et $\varphi_{\alpha\beta} \in L^2(\mathbb{R})$, alors

$y \mapsto \varphi_{\alpha\beta}(y) - \beta e^{-y^2/2}$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$

(structure d'espace vectorial) ce qui est contradictoire)

Il reste donc à chercher les solutions parmi

$\varphi_\beta : y \in \mathbb{R} \mapsto \beta e^{-y^2/2}$

φ_β est solution de (S) avec $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\beta^2(y)\,dy = 1$

et $\varphi_\beta(0) > 0$

$$\Leftrightarrow \beta^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-y}\,dy = 1 \text{ et } \varphi_\beta(0) = \beta > 0$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2}} = 1 \text{ et } \beta > 0$$

$\Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2\pi} = 1$ et $\beta > 0 \Leftrightarrow \beta = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}$

On a donc montré que $\boxed{\varphi_0 : y \mapsto \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-y^2/2}}$ est l'unique solution de (S) telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0^2(y)\,dy = 1$ et $\varphi_0(0) > 0$.

17h31 : temps de composition global 2h. Pause.

Bilan début partie III :

III.1 n'est pas trop dure mais il faut bien s'y prendre, se méfier des notations $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ et comme le résultat n'est pas donné, on ne peut pas vérifier (néanmoins ça n'a pas d'incidence sur la suite)

III.2 est relativement délicate (à part le a)

car → b dépend de a

→ et c dépend de a.

→ b est classique mais il faut bien connaître la méthode, il faut bien rédiger, et on est un peu surpris que la primitive $\int_0^y e^{s^2} ds$ soit non calculable.

→ c n'est pas hyper simple non plus, et surtout il faut avoir la foi en les calculs de b. Attention à ne pas perdre du temps si vos calculs de b sont faux.

Astuce : ne pas "tricher" dans les calculs, au sens où vous calculez β sans regarder le résultat, et si c'est le bon β, inutile de revérifier vos calculs.

1g 19

III.3) @. $\forall y \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(y) = C_1\left(-\frac{d}{dy} + y\right)\varphi_0(y)$

$= C_1\left(-\varphi_0'(y) + y\varphi_0(y)\right) = \frac{C_1}{\pi^{1/4}}\left[-(-y)e^{-y^2/2} + ye^{-y^2/2}\right]$

$= \frac{2C_1}{\pi^{1/4}} y e^{-y^2/2}$.

Pour calculer C_1 on écrit $\int_{\mathbb{R}} \varphi_1^2(y)\,dy = 1$

ce qui donne $\left(\frac{2C_1}{\pi^{1/4}}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2}\,dy = 1$

or $\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2}\,dy = 2\int_{\mathbb{R}_+} y\left(y\,e^{-y^2}\right)dy$ par parité

or pour $A \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^A y\left(2y\,e^{-y^2}\right)dy = \left[y\left(-e^{-y^2}\right)\right]_0^A - \int_0^A 1.\left(-e^{-y^2}\right)dy$$

$$= -A\,e^{-A^2} + \int_0^A e^{-y^2}\,dy$$

d'où avec $A \to +\infty$,

$$2\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y^2}\,dy = 0 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{du}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et donc $C_1^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^{1/4}} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$ i.e. $C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ puisque $C_1 > 0$.

d'où $\forall y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\varphi_1(y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\,y\,e^{-y^2/2}}$

- De même,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \varphi_2(y) = \frac{C_2}{C_1}\left(-\varphi_1'(y) + y\,\varphi_1(y)\right)$$

$$= \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\right)\left[-\left[1.e^{-y^2/2} + y(-y)e^{-y^2/2}\right] + y^2 e^{-y^2/2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi^{1/4}} C_2 \left(-1 + 2y^2\right) e^{-y^2/2}$$

Calcul de C_2 : avant

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} C_2^2 \int_{\mathbb{R}} \left(2y^2-1\right)^2 e^{-y^2}\, dy = 1$$

or $\left(2y^2-1\right)^2 = 4y^4 - 4y^2 + 1$

Grâce à $\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\int y^4 e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}} y^3 \left(y e^{-y^2}\right) dy$$

$$= \left[y^3 \frac{e^{-y^2}}{-2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} 3y^2 \frac{e^{-y^2}}{-2}\, dy$$

$$= \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

d'où $\int_{\mathbb{R}} (2y^2-1)^2 e^{-y^2} dy = 4\int_{\mathbb{R}} y^4 e^{-y^2} dy - 4\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2} dy + \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy$

$= 4 \times \frac{3\sqrt{\pi}}{4} - 4 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\pi}$

$= 2\sqrt{\pi}$ et $C_2 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}$

et $\boxed{\varphi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\pi^{1/4}} \left[-1 + 2y^2\right] e^{-y^2/2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.}$

III.3. b) On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $e_n = 1 + 2n$ et

$\mathcal{P}(n)$: " $-\varphi_n'' + y^2 \varphi_n = e_n \varphi_n$ ".

$\mathcal{P}(0)$: par définition, $\left(-\frac{d}{dy} + y\right)\left(\frac{d}{dy} + y\right)(\varphi_0) = 0$

donc $\left(-\frac{d}{dy} + y\right)\left(\varphi_0'(y) + y\,\varphi_0(y)\right) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

i.e. $-\varphi_0''(y) - 1.\varphi_0(y) - y\,\varphi_0'(y) + y\,\varphi_0'(y) + y^2\varphi_0(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

ce qui donne $-\varphi_0''(y) + y^2\varphi_0(y) = \varphi_0(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

d'où $\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $e_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$.

Alors par définition il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tq

$$\varphi_{n+1} = \alpha\left(-\frac{d}{dy} + y\right)(\varphi_n)(y) = \alpha(-\varphi_n'(y) + y\varphi_n(y))$$

(à savoir $\alpha = \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$)

et donc

$\forall y \in \mathbb{R}$, $-\varphi_{n+1}''(y) + y^2 \varphi_{n+1}(y)$

$$= \alpha\left[-(-\varphi_n' + y\varphi_n)''(y) + y^2(-\varphi_n' + y\varphi_n)(y)\right]$$

$$= \alpha\left[+\varphi_n^{(3)}(y) - y\varphi_n''(y) - 2\cdot 1\cdot \varphi_n'(y) - y^2\varphi_n'(y) + y^3\varphi_n(y)\right]$$

or $-\varphi_n''(y) + y^2\varphi_n(y) = e_n\varphi_n(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$

donne par dérivation.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $-\varphi_n^{(3)}(y) + 2y\varphi_n(y) + y^2\varphi_n'(y) = e_n\varphi_n'(y)$

d'où

$$\forall y \in \mathbb{R},\ -\varphi_{n+1}''(y) + y^2 \varphi_{n+1}(y)$$

$$= \alpha \Big[\big(2y \underset{\times}{\varphi_n}(y) + y^2 \underset{\times}{\varphi_n'}(y) - e_n \underset{\times}{\varphi_n'}(y) \big)$$

$$- y \big[y^2 \underset{\times}{\varphi_n}(y) - e_n \underset{\times}{\varphi_n}(y) \big] - 2\varphi_n'(y)$$

$$- y^2 \varphi_n'(y) + y^3 \underset{\times}{\varphi_n}(y) \Big]$$

$$= \alpha \Big[\big(2y - \cancel{y^3} + y e_n \pm \cancel{y^3} \big) \varphi_n(y)$$

$$+ \big(\cancel{y^2} - e_n - 2 - \cancel{y^2} \big) \varphi_n'(y) \Big]$$

$$= \alpha \big[2y\, \varphi_n(y) - 2\varphi_n'(y)$$

$$+ e_n \big(y \varphi_n(y) - \varphi_n'(y) \big) \big]$$

$$= \alpha \left[2 \frac{\varphi_{n+1}}{\alpha} + e_n \frac{\varphi_{n+1}}{\alpha} \right](y)$$

$$= (e_n + 2)\, \varphi_{n+1}(y)\, d'où\ \mathcal{P}(n+1).$$

puisque $e_{n+1} = 1 + 2(n+1)$

$= \ell_m + 2$

On a ainsi montré

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{N},\ -\varphi_m''(y) + y^2 \varphi_m(y) = \ell_m \varphi_m(y).}$$

$$\text{avec } \ell_m = 1 + 2m$$

III. 3. c) On pose pour $m \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}(m)$: " il existe $P_m \in \mathbb{R}_m[X]$ à coefficients dominant positif tq $\forall y \in \mathbb{R},\ \varphi_m(y) = P_m(y) e^{-y^2/2}$ ".

$\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $P_0(y) = \frac{1}{\pi^{1/4}}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(m)$.

Comme à la question précédente on introduit $\alpha > 0$ tq $\varphi_{m+1}(y) = \alpha(-\varphi_m'(y) + y\varphi_m(y))\ \forall y \in \mathbb{R}$.

alors par $\mathcal{P}(m)$ on a

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \varphi_{m+1}(y) = \alpha\Big(-P_m'(y) e^{-y^2/2} - P_m(y)(-y) e^{-y^2/2} + y P_m(y) e^{-y^2/2}\Big)$$

$$= \alpha\left(-P_n'(y) + 2y P_n(y)\right) e^{-y^2/2}$$

et on a bien $\alpha(-P_n'(y) + 2y P_n(y))$

qui est un polynôme de degré $n+1$

et de coefficient dominant positif ; d'où $P(n+1)$

On a donc montré par récurrence que

pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et de coefficient dominant positif et tq $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(y) = P_n(y) e^{-y^2/2}$

III.3.d) On a vu en partie 1 que

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ H_{n+1} = -H_n' + y H_n.$$

et $\forall n \in \mathbb{N},\ \|H_n\|_{L^2(\nu)} = \sqrt{n!}$

On dans les calculs de la question précédente on a vu qu'il existe $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des réels positifs tq

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \gamma_n\left(-P_n' + 2XP_n\right)$$

On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(y) = \alpha_n H_n(\sqrt{2}y)$
$\forall y \in \mathbb{R}$

pour un certain α_n

On commence par déterminer α_n pour qu'une telle relation soit possible : en effet on a le choix de

normalisation $1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n^2(y)\,dy = \int P_n^2(y)\, e^{-y^2}\,dy$

$$= \alpha_n^2 \int H_n^2(\sqrt{2}y)\, e^{-y^2}\,dy$$

$$= \alpha_n^2 \int_{\mathbb{R}} H_n^2(y)\, e^{-y^2/2}\,\frac{dy}{\sqrt{2}}$$

$$= \alpha_n^2 \sqrt{\pi}\, \| H_n \|^2_{L^2(\mu)} = \sqrt{\pi}\,\alpha_n^2\, n!$$

d'où $\alpha_n = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, n!}\right)^{1/2}$

Au final on veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{R}$
$P_n(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, n!}\right)^{1/2} H_n(\sqrt{2}y)$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $P_n(Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, n!}\right)^{1/2} H_n(\sqrt{2}Y)$ "

$\mathcal{P}(0)$ revient à $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} H_0(\sqrt{2}y) = \frac{1}{\pi^{1/4}}$ qui est bien

P_0 puisque $\varphi_0(y) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-y^2/2}$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Alors il existe $\gamma_n \in \mathbb{R}_+^*$ tq

$$P_{n+1}(y) = \gamma_n \left(-P_n'(y) + 2y P_n(y)\right)$$

$$= \gamma_n \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, n!}\right)^{1/2} \left(\underbrace{-H_n'(\sqrt{2}y)}\sqrt{2} + 2y H_n(\sqrt{2}y)\right)$$

$$= \gamma_n \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, n!}\right)^{1/2} \left(\left[H_{n+1}(\sqrt{2}y) - \sqrt{2}y H_n(\sqrt{2}y)\right]\sqrt{2} + 2y H_n(\sqrt{2}y)\right)$$

$$= \gamma_n \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, n!}\right)^{1/2} H_{n+1}(\sqrt{2}y)$$

mais en écrivant la condition $\int \varphi_{n+1}^2(y)\, dy = 1$

on récupère que $\gamma_n \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, n!}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(n+1)!}\right)^{1/2}$

et donc $P_{n+1}(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(n+1)!}\right)^{1/2} H_{n+1}(\sqrt{2}y)$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc montré $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad P_n(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, n!}\right)^{1/2} H_n(y)}$

21h05 : quasiment 1h45 sur III.3

et j'ai fait une erreur de calcul dans 3.a pour le calcul de φ_1. (corrigé a posteriori en qqs minutes)

3.b et 3.c sont relativement faciles.

J'ai compris assez rapidement l'allure de l'expression attendue pour 3.d mais je me suis emmêlé.

pause.

22h10

III.4) D'après la question III.3), pour $n \in \mathbb{N}$ on a un couple (e_n, φ_n) tq $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)^2 dy = 1$

$$-\varphi_n''(y) + y^2 \varphi_n(y) = e_n \varphi_n(y) \quad , \forall y \in \mathbb{R}.$$

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \ \psi_n(x) = \phi_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, y\right)$

$$E_n = \frac{\omega\hbar}{2} e_n .$$

Alors par III.1, on a

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right] \psi_n(x) = E_n \psi_n(x).$$

De plus, comme $\varphi_n \in L^2(\mathbb{R})$ on a $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$

et comme φ_{n+1} est colinéaire à φ_n' on a $\varphi_n' \in L^2(\mathbb{R})$

ie $\psi_{n+1} \in L^2(\mathbb{R})$

et de même $\psi_{n+2} \in L^2(\mathbb{R})$

Ainsi, pour $E_n = \frac{\omega\hbar}{2}(2n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$,

on a bien une fonction ψ_n t.q $(\psi_n, \psi_n', \psi_n'') \in L^2(\mathbb{R})^3$

et $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right] \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$

III.5) $\int E \psi^2(x)\,dx = \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) \psi(x)\right.$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $+\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi^2(x)\Big] dx$

or si $A \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_{-A}^{A} -\psi''(x)\,\psi(x)\,dx = -\Big[\psi'(x)\,\psi(x)\Big]_{-A}^{A} + \int_{-A}^{A} \psi'(x)^2\,dx$$

Si on arrive à montrer que

$\lim_{A \to +\infty} \psi'(A)\,\psi(A) = 0$ alors par le fait que

$\psi' \in L^2(\mathbb{R})$ et $(\psi, \psi'') \in L^2(\mathbb{R})$, les intégrales $\int_{-A}^{A} \psi'(x)^2\,dx$ et $\int_{-A}^{A} \psi''(x)\,\psi(x)\,dx$ sont convergentes (par Cauchy-Schwartz, la fonction $\psi\psi''$ est intégrable sur $\mathbb{R}$)

et donc $-\int_{\mathbb{R}} \psi''(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \psi'(x)^2\,dx$

d'où au final $E\int \psi^2(x)\,dx = \frac{\hbar^2}{2m}\int_{\mathbb{R}} \psi'(x)^2\,dx$

$+\frac{1}{2} m\omega^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 \psi^2(x)\,dx$

d'où le fait que $\boxed{E > 0.}$

Pour justifier donc $\lim_{A\to+\infty} \psi(A)\psi'(A) = 0$,

on constate que $(\psi\psi')' = \psi''\psi + \psi'^2$

ou par Cauchy-Schwartz, $\psi''\psi \in L^1(\mathbb{R})$

et donc $(\psi\psi')' \in L^1(\mathbb{R})$

Or $\int_0^A (\psi\psi')'(x)\,dx = \psi(A)\psi'(A) - \psi(0)\psi'(0)$

donc par convergence de l'intégrale de gauche,

on en déduit que $\psi\psi'$ admet des limites en $\pm\infty$.

Si par l'absurde une de ces limites n'est pas 0,

disons celle pour $A \to +\infty$ pour fixer les idées,

alors il existe $\alpha > 0$ et $A_0 \in \mathbb{R}_+$ tq

$$\forall A \geq A_0,\ |\psi(A)\psi'(A)| \geq \alpha > 0$$

ce qui contredit l'intégrabilité de $\psi\psi'$.

et donc $\lim_{A\to+\infty} \psi(A)\psi'(A) = 0$

22h32 : temps total de composition

$1^h + 1^h + 1^h45 + 20\,min = 4^h05.$

IV.1) Soit $e \in \mathbb{R}$

Φ est solution de $-\phi'' + y^2\phi = e\phi$

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R},\ -\Big[H''(y) + \left(-\frac{2y}{2}\right)H'(y) - y\,H'(y) - 1.\,H(y) - y\,H(y)\left(-\frac{2y}{2}\right)\Big]e^{-y^2/2} + y^2 H(y)e^{-y^2/2} = e\,H(y)e^{-y^2/2}$

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R},\ -H''(y) + 2y\,H'(y) + (1 - y^2 + y^2 - e)H(y) = 0$

et donc

ϕ est solution de (5)

$\Leftrightarrow$ H est solution de $H'' - 2yH' + (e-1)H = 0$

IV.2) A_2 est une équation linéaire homogène du second ordre de la forme $H'' + a_1(y)H' + a_0(y)H = 0$

avec $a_1 : y \in \mathbb{R} \mapsto -2y$ qui sont continues, donc

$a_0 : y \in \mathbb{R} \mapsto (e-1)$

par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire,

l'ensemble des solutions de (A_2) est espace vectoriel de dimension 2

IV.3) Par les règles de calcul sur les séries formelles,

$$F'(X) = \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n$$

et $$F''(X) = \sum_{n\geq 2} n a_n (n-1) X^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} X^n$$

Ainsi

$$F'' - 2XF' + 2F = 0 \iff \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} X^n - 2\sum_{n\geq 0} n a_n X^n + 2\sum_{n\geq 0} a_n X^n = 0$$

On a remarqué que

$$XF'(X) = X\sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\geq 0} n a_n X^n$$

puisque $0 a_0 = 0$.

d'où

$$F'' - 2XF' + 2F = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_n \frac{2n-2}{(n+1)(n+2)}$$

IV.4) Par la question IV.3 on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_n \frac{2n-2}{(n+1)(n+2)}$$

On note $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = a_{2n}$

$$\beta_n = a_{2n+1}$$

qui satisfont

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \frac{4n-2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n \cdot \frac{4n+2-2}{(2n+3)(2n+4)}$$

Etudions le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$.

1er cas : si il existe n_0, $\alpha_{n_0} = 0$ alors par récurrence immédiate, $\forall n \geq n_0$, $\alpha_n = 0$ et donc le rayon est infini

2e cas : si $\forall n$, $\alpha_n \neq 0$ alors on peut regarder

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{4n-2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum \alpha_n z^n$ est $+\infty$.

Et donc dans tous les cas le rayon de $\sum \alpha_n z^n$ est $+\infty$.

La même preuve montre que le rayon de cvg de

$$\sum \beta_n z^n \text{ est } +\infty.$$

et donc comme $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \sum_{0\leq n\leq \frac{N}{2}} \alpha_n z^{2n} + \sum_{0\leq n\leq \frac{N-1}{2}} \beta_n z^{2n+1}$

le rayon de $\sum a_n z^n$ est bien également $+\infty$

IV.5) Par la question 3, H^+ et H^- sont solutions de

(Z) et par la question 4, H^+ et H^- sont définies sur $\mathbb{R}$ donc elles sont bien solutions de (A_1).

De plus, toujours par le théorème de Cauchy-

Lipschitz linéaire, l'application

$$\delta_0 : A_2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \qquad H \longmapsto \big(H(0), H'(0)\big)$$

est un isomorphisme

et donc comme $\big(H_+(0), H'_+(0)\big) = (1,0)$

et $\big(H_-(0), H'_-(0)\big) = (0,1)$

$\boxed{(H_+, H_-) \text{ est bien une base de } A_2}$ comme image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par δ_0.

IV.6) Comme toutes les solutions de (A_2) sont de la forme $\alpha H_+ + \beta H_-$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

et que H_+ est de la forme $\sum_{n\geq 0} a^+_{2n} y^{2n}$

H_- est de la forme $\sum_{n\geq 0} a^-_{2n+1} y^{2n+1}$

(par récurrence immédiate avec la récurrence de IV.3, $a^+_{2n+1} = 0$ et $a^-_{2n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

(A_2) admet une solution polynomiale non triviale

Ssi $\exists n_0,\ a^+_{2n_0} = 0$ ou $a^-_{2n_0+1} = 0$

(car alors si $a^+_{2n_0} = 0$, $\forall n \geq n_0,\ a^+_{2n} = 0$ et donc

H_+ est une solution polynomiale, de même

si $a^-_{2n_0+1} = 0$

Réciproquement, si H_+ et H_- ne sont pas des

polynomes, $\alpha H_+ + \beta H_-$ non plus).

La condition $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ a^+_{2n_0} = 0$

revient à $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ 4n_0 - 2 = 0$

et la condition $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ a^-_{2n_0+1} = 0$

revient à $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ 4n_0 + 2 - 2 = 0$

et donc au final

(A_2) admet une solution polynomiale

$\Leftrightarrow 2 \in 2\mathbb{N}$

7.a). On a $\varphi_n(y) = P_n(y) e^{-y^2/2}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

et $-\varphi_n''(y) + y^2 \varphi_n(y) = \ell_n \varphi_n(y)$

donc par IV.1,

$$P_n'' - 2y P_n' + \underbrace{(\ell_n - 1)}_{2n} P_n = 0$$

donc P_n est une solution polynomiale de (A_{2n}).

- Or d'après la question précédente on ne peut pas avoir à la fois H_+ et H_- polynomiale.
donc l'ensemble des solutions polynomiales est de dimension 1.

Ainsi | l'ensemble des solutions polynomiales de (A_{2n}) est Vect P_n

IV.7.b) Par ce qui précède,

H_n est colinéaire à H_+ ou H_-

et donc on a $H_n = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_{k+2} = \dfrac{2k-2n}{(k+1)(k+2)} b_k$.

On le coeff dominant de H_n est $b_n = 1$

Comme $b_{n+1} = 0$, par itération $b_{n-2k+1} = 0 \; \forall k \in [\![0, \frac{n}{2}]\!]$

On a $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $b_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2(k-n)} b_{k+2}$

d'où $b_{n-2} = \dfrac{(n-1)n}{-2\times 2} b_n$

$$b_{n-4} = \frac{(n-3)(n-2)}{2(-4)} b_{n-2} = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{+2^2 \times (2\times 4)} \underbrace{b_n}_{=1}$$

et par suite on conjecture. $\forall k \in [\![0, \frac{n}{2}]\!]$

$$b_{n-2k} = \frac{\prod_{j=0}^{2k-1} (n-j)}{(-1)^k 2^k \times 2^k \times k!} = (-1)^k \frac{n!}{2^{2k} k! (n-2k)!}$$

qui se montre par une récurrence facile.

Ainsi
$$\boxed{H_n = \sum_{0 \le k \le \frac{n}{2}} \frac{(-1)^k n!}{2^{2k} k! (n-2k)!} X^{n-2k}}$$

IV.8.a) Comme $\alpha > 0$, g_α est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc son rayon de convergence est $+\infty$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $g_\alpha(y) = \sum_{h \geq 0} \left(\frac{\alpha y^2}{2}\right)^h \times \frac{1}{h!}$

d'où $\boxed{b_m = \begin{cases} 0 \text{ si } m \text{ impair} \\ \dfrac{\alpha^h}{2^h h!} \text{ si } m = 2h \end{cases}}$

IV.8.b) On a on

$\forall m \in \mathbb{N}$, $a^+_{2m+2} = a^+_{2m} \dfrac{4m-2}{(2m+1)(2m+2)}$

On par la question précédente

$$b_{2m+2} = \frac{\alpha}{2(m+1)} b_m$$

et comme $\forall m$, $a^+_{2m} \neq 0$ et $b_m \neq 0$,

on a $\forall m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a^+_{2m+2}}{a^+_{2m}} = \dfrac{4m-2}{(2m+1)(2m+2)}$

$$\frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{\alpha}{2(n+1)}$$

donc on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left[\frac{a^+_{2n+2}}{a^+_{2n}} \geq \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} \iff \frac{4n-1}{2n+1} \geq \alpha \right]$

or $\lim_{n \to +\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$

donc comme $\alpha < 2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N$, $\frac{4n-1}{2n+1} \geqslant \alpha$. d'où

$$\forall n \geq N, \quad \frac{a^+_{2n+2}}{a_{2n}} \geqslant \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}}$$

00h12 donc 4h05 + 1h40 ≃ 5h45. Pause.

Bilan IV : 1) ok 2) cours 3) ok

4) pas dur mais à bien faire.

5) pas dur si on a bien compris Cauchy Lipschitz.

6) pas très simple : il faut commencer à comprendre des choses par soi-même.

7) ⓐ ok ⓑ calculs techniques

8) ⓐ ok, ⓑ pas très dur.

---

01 & 10

V.1) Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[y]$.

Par la formule de Leibnitz,

si $N(y) = e^{-y^2/2}$ $\forall y \in \mathbb{R}$, alors

$$(PN)^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} P^{(\ell-k)} N^{(k)}$$

et on montre par récurrence rapide que

$\forall k \in \mathbb{N}$, $N^{(k)}$ est de la forme $y \mapsto Q(y) N(y)$ où $Q \in \mathbb{R}[y]$.

Par suite $(PN)^{(\ell)}$ est aussi de la forme

RN où $R \in \mathbb{R}[y]$

et donc si $k \in \mathbb{N}$, $x^k (PN)^{(\ell)}(x) \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$

et donc $\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}$, $x^k (PN)^{(\ell)}(x)$ est bornée en tant que fonction continue qui tend vers 0 en $\pm\infty$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } P \in \mathbb{R}[y],\ y \mapsto P(y) e^{-y^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}$

V.1) Par le cours, on a si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$$

$$\text{et} \quad \hat{f}^{(k)}(\xi) = (-i)^k \widehat{m^k f}(\xi) \text{ où } m : x \mapsto x$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$,

$x \mapsto x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ car $x \mapsto x^{k+2} f(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$

et donc par le lien entre le comportement de f en $\pm\infty$ et la régularité de $\hat{f}$, on a $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

De plus, si $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi^k \left(\hat{f}\right)^{(\ell)}(\xi) = \xi^k (-i)^\ell \widehat{m^\ell f}(\xi)$$

$$= (-i)^\ell \frac{1}{i^k} \widehat{\left(m^\ell f\right)^{(k)}}(\xi)$$

En remarquant que comme $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et multiplication par m, les calculs précédents sont justifiés. De plus,

$$\left(m^\ell f\right)^{(k)} = \sum_{\alpha=0}^{k} \binom{k}{\alpha} \left(m^\ell\right)^{(\alpha)} f^{(k-\alpha)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

donc $\widehat{\left(m^\ell f\right)^{(k)}} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et donc $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a montré $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Soit maintenant $f \in L^1(\mathbb{R})$ et supposons $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Alors par ce qui précède, $\hat{\hat{f}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et donc par la formule d'inversion, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (au sens où f admet un représentant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

D'où $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

V.3 f sol de $-f'' + y^2 f = e f$

$$\Leftrightarrow \widehat{-f'' + y^2 f} = e\hat{f}$$

$$\Leftrightarrow -(i\xi)^2 \hat{f}(y) + \frac{1}{(-i)^2} \hat{f}''(\xi) = e\hat{f}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$(\in) \quad -\widehat{f}''(\xi) + \xi^2 \widehat{f}(\xi) = e\,\widehat{f}(\xi)$

d'où $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, f sol de $(4) \iff \widehat{f}$ sol de (4)

V.4) • pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n de la partie 4

est solution de $-\varphi_n'' + y^2 \varphi_n = e_n \varphi_n$ avec $e_n = 2n+1$

Or par III.3c et V.1, $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Idée : L'ensemble des solutions de cette équation est $\mathrm{Vect}\,\varphi_n$ car les autres solutions ne sont pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

• Cas $\lambda \notin \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

V.5.a) φ_n est solution de (4) avec $e = e_n$

donc par V.3, $\widehat{\varphi_n}$ est aussi solution de (4)

mais comme l'ensemble des solutions qui sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est de dimension 1, il existe c_n tq $\widehat{\varphi_n} = c_n \varphi_n$

V.6 .a) Soit

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) := \int f(x)\, e^{-x^2/2}\, e^{-i\xi x}\, dx$$

et $\forall z \in \mathbb{C},\ G(z) := \int f(x) e^{-x^2/2} e^{-izx}\, dx$

G est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$:

en effet, soit $A \in \mathbb{R}_+$, si $z \in \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) e^{-x^2/2} e^{-izx}$ est mesurable

$\Rightarrow$ si $x \in \mathbb{R}$, $z \mapsto f(x) e^{-x^2/2} e^{-izx}$ est holomorphe

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall z$ tq $|\mathrm{Im}\, z| \leq A$

$$\left| f(x) e^{-x^2/2} e^{-izx} \right| \leq |f(x)| e^{|(\mathrm{Im}\, z)x|} e^{-x^2/2}$$

$$\leq \underbrace{\left(1 + |f(x)|^2\right) e^{A|x|} e^{-x^2/2}}_{\in L^1(\mathbb{R})}$$

donc par le th d'holomorphie sous l'intégrale,

G est holomorphe sur $\{z, |\mathrm{Im}\, z| < A\}$ et ce

pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, donc $\hat{g}$ se prolonge en une fonction

holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

V.6.b) G_m a $V = \overline{\text{Vect}\,(H_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \mathbb{R}[y]$

puisque $\forall n$, $\deg H_n = n$.

Montrons que $V^\perp = \{0\}$, ce qui montrera la densité de V dans $L^2(\mu)$ puisque $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert.

Soit $f \in V^\perp$: alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int x^n f(x) e^{-x^2/2}\,dx = 0$

On introduit $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui prolonge $\hat{g}$ où $g : x \mapsto f(x)\,e^{-x^2/2}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $G^{(n)}(z) = \int f(x) e^{-x^2/2} (-ix)^n e^{-izx}\,dx$

d'où $G^{(n)}(0) = (-i)^n \int f(x) x^n e^{-x^2/2}\,dx = 0$

et donc par le développement en série entière de

G en 0 (qui est de rayon infini), $G = 0$

et donc $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = 0$.

Par injectivité de la transformation de Fourier,

elle implique que $g = 0$ et par suite $f = 0$.

Ainsi $\begin{cases} V = \mathbb{R}[y] = \mathrm{Vect}\left(H_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est dense dans } L^2(\mu) \\ \text{et } \left(\dfrac{H_n}{\|H_n\|_{L^2(\mu)}}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une base hilbertienne de } L^2(\mu) \end{cases}$

1h55 : +45 min. Temps de composition 6h30

08h21

VI-1) $\mathcal{H}(p,q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \frac{p_j^2}{m_j} + V(q_1, \dots, q_d)$

donc $\mathcal{H}$ est bien de classe C^3 sur $\mathbb{R}^{2d}$, à valeurs réelles

et $\forall j \in [\![1,d]\!]$, $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(p,q) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2p_j}{m_j} = \dfrac{p_j}{m_j}$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(p,q) = \frac{\partial V}{\partial q_j}(q)$$

donc si (p_j, q_j) est solution de (8) alors

$\forall j \in [\![1,d]\!], q_j' = -\dfrac{p_j}{m_j}$ et $p_j' = \dfrac{\partial V}{\partial q_j}(q)$

et donc en mettant $p_j = -m_j q_j'$ dans la 2nde

équation on obtient $\boxed{m_j q_j'' = -\dfrac{\partial V}{\partial q_j}(q)}$

De plus on a $\boxed{\begin{cases} q_j(0) = q_j^0 \\ q_j'(0) = -\dfrac{p_j^0}{m_j} \end{cases} \quad \forall j \in [\![1,d]\!].}$

Réciproquement, si $(q_j)_{1 \le j \le d}$ est solution de

$$\begin{cases} q_j'' = -\dfrac{\partial V}{\partial q_j}(q) \\ q_j(0) = q_j^0 \ , \ q_j'(0) = -\dfrac{p_j^0}{m_j} \end{cases}$$

alors on pose $p_i = -m_j q_j'$ et on constate que (p, q) est solution de (8).

VI.2) On a vu en partie II que (1)-(2) est équivalent à $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix} Y \\ Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ m y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$

c-à-d $\begin{cases} x' = \frac{1}{m} p \\ p' = -k x \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ p(0) = m y_0 \end{cases}$

On pose $\forall (x,p) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{H}(x,p) = \frac{1}{2m} p^2 + k \frac{x^2}{2}$

alors $\mathcal{H}$ est C^3 et $\forall x,p$, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x,p) = k x$

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x,p) = \frac{p}{m}$

et donc (1-2) est bien mis sous la forme d'un système Hamiltonien.

VI.3) par définition, $J^T = \begin{pmatrix} 0 & -I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix} = -J$.

Par les règles de produit par blocs,

$$J^T \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & -I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_d^2 & 0 \\ 0 & I_d^2 \end{pmatrix} = I_{2d}$$

On en déduit que

> J est inversible, que $J^T = -J$
> et que $J^{-1} = J^T = -J$

VI.4) $\mathcal{H}$ et y sont C^1 donc $t \mapsto \mathcal{H}(y(t))$ est C^1

et $\forall t \in I$, $\frac{d}{dt} \mathcal{H}(y(t)) =$ calcul à travailler

$= 0$

IV.5) Le problème (8-9) se réécrit

$$(*) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = J \nabla \mathcal{H}(y) \\ y(0) = \begin{pmatrix} p^0 \\ \cdot \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $\mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$

$y \longmapsto J \nabla \mathcal{H}(y)$

donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme (*) est un pb de Cauchy, il admet une unique solution maximale. On note I l'intervalle d'existence de cette solution.

On souhaite montrer que $I = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que la solution est globale.

On $\forall t \in I$, par la question précédente

$$\mathcal{H}(y(t)) = \mathcal{H}(y(0)) \text{ or par hypothèse,}$$

$$\mathcal{H}(y(t)) \geq C\|y(t)\|^2.$$

Ainsi $\forall t \in I$, $\|y(t)\| \leq \left(\frac{\mathcal{H}(y_0)}{C}\right)^{1/2}$.

i.e. $t \in I \mapsto y(t)$ est bornée.

D'après le résultat sur l'alternative d'explosion (qui dit que si y n'est pas globale, alors elle ne peut être bornée sur un voisinage des bornes de I qui

sont finies), y est globale

VI. 6) ⓐ Th "au programme"?

(dépendance du flot en les conditions initiales)

Soit on sait, soit on sait pas!

08h51 +30 min Temps total final : 7h-.