UPMC 2017-2018
M2 Mathématiques de la modélisation J. Lamboley
Cours de base : Optimisation

Feuille 1 : Topologie, analyse fonctionnelle

Exercice 1 (Limite sup/inf)**.** Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on pose dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$v_n := \inf_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_p, \qquad w_n := \sup_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_p.$$

1. Montrer que v et w ont une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, qu'on note respectivement ℓ_1 et ℓ_2. Justifiez également que
$$\ell_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_p, \qquad \ell_2 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_p.$$
2. Calculer ℓ_1, ℓ_2 dans le cas $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.
3. Montrer que
$$\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad \ell_1 = \ell_2,$$
et qu'alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la valeur commune $\ell_1 = \ell_2$.
4. Montrer plus généralement que ℓ_1 est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite dont la limite est ℓ_1, et que si ℓ est la limite d'une suite extraite de (u_n), alors $\ell \geq \ell_1$.)* De même, ℓ_2 est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que f est sci (sur X) si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R},\ \ f^{-1}(]-\infty, a])$ est fermé (dans X).

Exercice 3. Soit $E = C^0([0,1])$ muni de la norme uniforme.

1. Soit $F = \{f \in E,\ f \geq 0 \text{ sur } [0,1]\}$. Montrer que F est fermé. Décrire le complémentaire de F.
2. Soit $O = \{f \in E,\ f > 0 \text{ sur } [0,1]\}$. Montrer que O est ouvert (on pourra faire deux preuves, une directe, une qui consiste à montrer que O^c est fermé).
3. On remplace E par $E = C^0_b(\mathbb{R}_+)$ (espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}_+$), et on considère cette fois-ci $O = \{f \in E,\ f > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+\}$. Cet ensemble est-il ouvert ?

Exercice 4.

1. Quelles sont les métriques "usuelles" qui rendent les espaces suivants complets ?
$$C^0([0,1]),\quad C^k([0,1]),\quad C^0(\mathbb{R}),\quad C^0(]0,1[),\quad C^\infty([0,1]),\quad C^\infty(]0,1[),\quad \mathcal{D}(]0,1[) = C^\infty_c(]0,1[),$$
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ C^\infty \text{ à décroissance rapide ainsi que ses dérivées}\},\ (\textit{espace de Schwartz})$$
$$\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{holomorphe}\},$$
(Ω désigne ici un ouvert de $\mathbb{C}$).
2. Les espaces suivants sont-ils complets ? Si non, proposer un complété.
   (a) $C^0([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.
   (b) $C^1([0,1])$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_2 + \|f'\|_2$.
   (c) $C^1([0,1])$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_2 + |f'(0)|$.
   (d) E' le dual (topologique) de E où E est un e.v.n.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique.

1. (a) Montrer qu'un ensemble $U \subset X$ est dense si et seulement si U rencontre tout ouvert non vide de X.

   (b) Etant donné U et V deux ouverts denses de X, montrer que $U \cap V$ est aussi un ouvert dense de X. Est-ce encore vrai si U et V ne sont plus nécessairement ouverts ?

On suppose désormais l'espace (X, d) complet.

2. *[Théorème des fermés emboîtés]* Soit (F_n) une suite de fermés non vides de X. On suppose que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, et que le diamètre de F_n converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Montrer que l'intersection des $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non vide, réduite à un singleton.
3. *[Théorème de Baire]* Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
4. *[Formulation équivalente]* En déduire qu'une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
5. *[Une application classique]* Montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Soit E un espace de Banach et F un e.v.n.

6. *[Théorème de Banach-Steinhaus]* Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ (applications linéaires continues de E dans F). Montrer que si la famille est ponctuellement/simplement bornée, c'est-à-dire
$$\forall x \in E, \ \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < \infty$$
alors elle est uniformément bornée sur la boule unité de E, c'est-à-dire
$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

Exercice 6. Soit d une métrique sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$C_n = B\left(0, \frac{1}{n}\right)^c = \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]}, \ d(f, 0) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

1. Montrer qu'il existe n_0 tel que C_{n_0} contient une infinité de fonctions qui sont indicatrices d'un singleton.
2. Montrer qu'on peut choisir une suite dans C_{n_0} qui converge simplement vers 0.
3. En déduire qu'il n'existe pas de métrique sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$ telle que la convergence pour cette métrique soit équivalente à la convergence simple sur $[0, 1]$.

Exercice 7. On considère l'espace $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On pose
$$\forall f, g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ d(f, g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, \|f - g\|_{\infty,[-n,n]}).$$
Montrer que d est une métrique, et que la convergence pour d équivaut à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, d(\lambda f, 0) < \varepsilon$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de norme sur $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que la convergence pour cette norme soit équivalente à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

UPMC 2017-2018
M2 Mathématiques de la modélisation J. Lamboley
Cours de base : Optimisation

Feuille 2 : Compacité, Convexité

Exercice 1. Montrer que si (K, d) est un espace métrique compact, alors K est séparable.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert.

1. Montrer "à la main" que si H est de dimension infinie alors sa boule unité fermée est non compacte (Théorème de Riesz).
2. Montrer le Théorème de Hahn-Banach de séparation stricte entre un point et un convexe fermé.
3. Montrer que si H est séparable de dimension infinie, alors il existe une suite faiblement convergente non fortement convergente.

   Remarque. *Attention (voir par exemple Brézis) :*

   (a) dans tout espace de dimension infinie, les topologies faible et forte sont distinctes,

   (b) mais il existe des espaces de dimension infinie (par exemple $\ell^1(\mathbb{N})$) où les suites faiblement convergentes sont les mêmes que les suites fortement convergentes.

Exercice 3 (Espace de Sobolev périodique)**.** On travaille dans

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \text{ tel que } \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n^2 < \infty \right\}$$

que l'on munit de son produit scalaire usuel. On pose

$$h^1(\mathbb{Z}) := \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \text{ tel que } \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 u_n^2 < \infty \right\}.$$

On note

$$\forall\, (a,b) \in h^1(\mathbb{Z})^2, \quad \langle a, b\rangle_{h^1(\mathbb{Z})} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1+|n|^2) a_n b_n.$$

1. Montrer que l'espace $h^1(\mathbb{Z})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h^1(\mathbb{Z})}$ est un espace de Hilbert.
2. Montrer que $\overline{B}_{h^1(\mathbb{Z})}(0,1)$ est un compact de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

   Remarque. *On peut considérer $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ l'opérateur isométrique de coefficients de Fourier (ici $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et les fonctions définies sur $\mathbb{T}$ sont 2π-périodique, et la norme $L^2(\mathbb{T})$ est calculée sur une période) et définir*

   $$H^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}),\ \mathcal{F}(f) \in h^1(\mathbb{Z})\}.$$

   L'injection $H^1(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ est donc compacte.

Exercice 4 (Un autre théorème d'existence)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $C \subset E$ un convexe fermé non vide, et $J : C \to \mathbb{R}$ convexe et s.c.i.

1. Montrer qu'il existe $f \in E'$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

   $$J \geq f + \beta \ \text{ sur } C$$

2. On suppose désormais J α-convexe pour $\alpha > 0$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in E^2, \quad J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|x-y\|^2.$$

   (a) Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ et $\delta \in \mathbb{R}$ tel que

$$J \geq \gamma \|\cdot\|^2 + \delta \ \text{ sur } C$$

   et donc en particulier J est minorée.

   (b) Montrer que J a un minimum unique sur C.

3. Si H est un espace de Hilbert, étudier pour quelles valeurs de α la fonction $J : x \in H \mapsto \|x\|^2$ est α-convexe. Quel théorème classique peut-on en déduire en appliquant la question précédente ?

Exercice 5. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Soit K sous-ensemble compact de Ω. Montrer que si f est supposée bornée sur un voisinage $\mathcal{V}$ de K, alors f est lipschitzienne sur K, avec une constante de lipschitz qu'on contrôlera en fonction de $\|f\|_{\infty,\mathcal{V}}$ et $dist(K, \partial\Omega)$.
2. Soit $x_0 \in \Omega$.
   (a) Montrer qu'il existe g une fonction affine qui minore f et telle que $f(x_0) = g(x_0)$.
   (b) En déduire qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est bornée.
3. Conclure que f est localement lipschitzienne sur Ω.
4. Montrer que l'ensemble $\{f : D \to [a,b] \text{ convexe }\}$ est compact pour la convergence uniforme sur tout compact de D.
5. Discuter les questions précédentes dans le cas où l'espace de départ de f est de dimension infinie.

Exercice 6. On pose pour $A \subset \mathbb{R}^d$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad d_A(x) := \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

la fonction de distance à A.

1. Montrer que $d_A = d_{\overline{A}}$ si $A \subset \mathbb{R}^d$.
2. Etant donnés K_1, K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^d$, on pose

$$d^H(K_1, K_2) = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty$$

   la distance de Hausdorff entre K_1 et K_2. On fixe D un compact de $\mathbb{R}^d$.
   (a) Montrer que d^H est une distance sur $\mathcal{K}(D) = \{K \text{ sous-ensemble compact non vide de } D\}$.
   (b) Montrer que $(\mathcal{K}(D), d^H)$ est compact.
   (c) La fonction volume est elle continue, s.c.s, s.c.i sur $\mathcal{K}(D)$?

UPMC 2017-2018
M2 Mathématiques de la modélisation J. Lamboley
Cours de base : Optimisation

Feuille 3 : Calcul différentiel

Exercice 1. Montrer que la fonction

$$f(t) = \begin{cases} t^3 \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 2. Soit E un e.v.n et $f : E \to \mathbb{R}$.

1. On suppose f différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(y) \geq f(x) + f'(x).(y-x),$$

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \left(f'(y) - f'(x)\right).(y-x) \geq 0.$$

2. On suppose f deux fois différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall h \in E, \quad f''(x).(h,h) \geq 0$$

3. On rappelle que f est dite α-convexe si

$$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in E^2, \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|x-y\|^2.$$

Donner une caractérisation similaire aux questions précédentes du caractère α-convexe.

Exercice 3. Soit H un espace pré-hilbertien. Calculer les différentielles d'ordre 1 et 2 de l'application $\|\cdot\|^2$. Retrouver avec l'exercice 2 pour quelles valeurs de α cette application est α-convexe.

Exercice 4. Soit E, F deux e.v.n. et $a : E \times E \to F$ une application bilinéaire, $\ell : E \to F$ une application linéaire, et $J : E \to F$ définie par

$$\forall x \in E, \quad J(x) = \frac{1}{2} a(x,x) - \ell(x).$$

1. Montrer que a est continue si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in E \times E, \ \|a(x,y)\|_F \leq M \|x\|_E \|y\|_E.$$

2. **On suppose dans la suite de l'exercice que a et ℓ sont continues**. Montrer que J est de classe C^2 et calculer J' et J''.
3. On suppose $E = H$ est un espace de Hilbert, $F = \mathbb{R}$, et que a est symétrique et coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in H, \quad a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

   (a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème :

$$\inf \left\{ \frac{1}{2} a(x,x) - \ell(x), \quad x \in H \right\}. \tag{1}$$

(b) Montrer que x_0 est solution de (1) si et seulement si

$$\forall y \in H, \quad a(x_0, y) = \ell(y).$$

(c) Faire le lien avec le théorème de représentation de Riesz pour un espace de Hilbert.

(d) Discuter l'hypothèse E est un espace de Hilbert dans ce qui précède.

Exercice 5. On pose $F = C^1([0,1])$ et $E = \{f \in F, f(0) = 0\}$. On munit F de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et E de la norme $\|u\|_E = \|u'\|_\infty$.

1. Vérifier que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un e.v.n.
2. Calculer la dérivée directionnelle de $f : E \to F$ définie par $\forall u \in E, f(u) = u' + u^2$.
3. Montrer que f est Fréchet-différentiable sur E, puis de classe C^1 sur E.

Exercice 6. Soit $a < b$ deux réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. (a) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & C^0([a,b]) & \to & C^0([a,b]) \\ & u & \mapsto & f \circ u \end{array}$$

est bien définie, Fréchet-différentiable et identifier φ'.

(b) En déduire que l'application

$$\begin{array}{rccc} J : & C^0([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \int_a^b f(u(x))dx \end{array}$$

est bien définie, Fréchet-différentiable et identifier J'.

2. On suppose de plus que f satisfait

$$\exists C > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \ |f'(t)| \leq C(1 + |t|^{p-1})$$

où $p \geq 1$.

(a) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & L^p(a,b) & \to & L^1(a,b) \\ & u & \mapsto & f \circ u \end{array}$$

est bien définie et Fréchet-différentiable, et identifier φ'.

(b) En déduire que l'application

$$\begin{array}{rccc} I : & L^p(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \int_a^b f(u(x))dx \end{array}$$

est bien définie, Fréchet-différentiable et identifier I'.

UPMC 2017-2018
M2 Mathématiques de la modélisation J. Lamboley
Cours de base : Optimisation

Feuille 4 : Equations d'Euler-Lagrange

Exercice 1 (Intégrale première)**.** On pose $X = \{u \in C^1([a,b]),\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$. Soit $u \in C^2([a,b]) \cap X$ solution de

$$\min \left\{ \int_a^b L(v(x), v'(x))dx, v \in X \right\}$$

où $L : (u, \xi) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2. Montrer que

$$\frac{d}{dx}\left[L(u,u') - u'\frac{\partial L}{\partial \xi}(u,u') \right] = 0.$$

On dit que l'équation $L(u,u') - u'\frac{\partial L}{\partial \xi}(u,u') = Constante$ est l'intégrale première de l'équation d'Euler-Lagrange.

Exercice 2 (Conditions au bord)**.** Ecrire les conditions d'optimalité satisfaite par $u \in C^2([a,b])$ solution de

$$\min \left\{ \int_a^b L(x, v(x), v'(x))dx, v \in C^1([a,b]) \right\},$$

où $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 *(tirer notamment parti du fait qu'on n'a pas de contrainte au bord sur v)*. Préciser le cas où $L(x,u,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 - f(x)u$.

Exercice 3 (Equation d'Euler-Lagrange en dimension supérieure)**.** Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Si $u \in C^2(\Omega)$ et $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, on pose pour $x \in \Omega$:

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)_{i \in [\![1,d]\!]}, \qquad \Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x), \qquad \mathrm{div}(\Phi) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x)$$

1. Montrer que $\mathrm{div}(\nabla u) = \Delta u$.
2. On admet la formule de la divergence : pour $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$,

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\Phi(x))\ dx = \int_{\partial\Omega} \Phi(x).n(x)\ d\sigma(x)$$

où n est la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω, et $d\sigma$ est la mesure $(d-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

(a) Montrer que si $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ et $u \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega u\ \mathrm{div}(\Phi)\ dx = \int_{\partial\Omega} u\ (\Phi.n)\ d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \Phi\ dx$$

(b) Montrer que si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\ d\sigma - \int_\Omega u\Delta v\ dx$$

où $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n$ désigne la dérivée normale (extérieure) de v.

(c) Montrer que si $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\ dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right)\ d\sigma(x)$$

3. $g \in C^0(\partial\Omega)$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

   (a) Ecrire les conditions d'optimalité pour $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ solution du problème

$$\min \left\{ \int_\Omega L(x, v(x), \nabla v(x))\ dx, v \in C^1(\overline{\Omega}),\ \ v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

   Préciser le cas où $L(x, v, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 - f(x)v$ avec $f \in C^0(\overline{\Omega})$.

   (b) Même question en minimisant cette fois sans condition au bord, soit dans $C^1(\overline{\Omega})$ comme dans l'exercice 2.

Exercice 4 (Equation de la Brachistochrone)**.** On pose $X = \{u \in C^0([0, b]) \cap C^1(]0, b]), u(0) = 0, u(b) = \beta, u > 0 \text{ sur }]0, b]\}$ et on s'intéresse au problème (la bille roule sur la courbe $\{(x, -u(x)), x \in [0, b]\}$)

$$\inf \left\{ \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{u(x)}} dx, u \in X \right\}.$$

1. Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange du problème, et son intégrale première.
2. En déduire que si u est solution, alors

$$u(1 + (u')^2) = 2\mu \ \text{ sur }]0, b[$$

   où μ est une constante strictement positive.
3. On pose $\theta(t) = \mu(t - \sin(t))$. Vérifiez que $u(x) = \mu(1 - \cos(\theta^{-1}(x))$ est bien définie et solution de l'équation précédente, et expliquer comment déterminer μ.

Exercice 5. Soit A une matrice réelle symétrique de taille $d \times d$.

1. Montrer que le problème

$$\min \{\langle Ax, x\rangle,\ \ \|x\| = 1\} \tag{2}$$

   admet une solution.
2. Montrer que si x_0 est solution de (2) alors x_0 est un vecteur propre de A.
3. Conclure par récurrence que A est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 6 (Problème isopérimétrique)**.** Soit $a < b$, et $\alpha > 0$. Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange du problème

$$\min \left\{ \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2} dx,\ \ u(a) = u(b) = 0,\ \ \int_a^b u(x) dx = \alpha \right\},$$

et interpréter géométriquement.

UPMC 2017-2018
M2 Mathématiques de la modélisation J. Lamboley
Cours de base : Optimisation

Examen 1 (21/09/17) : 30 min

(Sauf avis contraire, toutes vos réponses doivent être accompagnées d'une preuve)

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Rappeler la définition d'une application $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur X.
2. Montrer que si $(f_i)_{i\in I}$ (I un ensemble quelconque) est une famille de fonctions s.c.i., alors la fonction
$$\forall x \in X, \quad \varphi(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$$
est également s.c.i. sur X.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il valable si on remplace s.c.i. par continue (dans les hypothèses et dans la conclusion) ?

Exercice 2. On pose pour $f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R})$:
$$J(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)|dt.$$
On pose $\mathcal{A} = \left\{f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R}), f(-1) = f(1) = 1\right\}$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. L'espace $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_\infty)$ est-il complet ?
2. L'application J est-elle continue ?
3. L'application J est-elle coercive ?
4. Etudier le problème
$$\inf\Big\{J(f),\ f \in \mathcal{A}\Big\},$$
en particulier on calculera la valeur de cet infimum et on déterminera s'il est atteint ou non.
5. On pose pour $k \in \mathbb{R}_+$,
$$m_k = \inf\Big\{J(f),\ f \in \mathcal{A} \text{ et } k\text{-lipschitzienne}\Big\}.$$
   (a) Deviner suivant la valeur de k une solution de ce problème d'optimisation.
   (b) Faire une démonstration.

UPMC 2017-2018
M2 Mathématiques de la modélisation J. Lamboley
Cours de base : Optimisation

1st Exam (21/09/17) : 30 min

(Except if stated otherwise, you should give a proof for every answer)

Exercice 1. Let (X, d) be a metric space.

1. Recall the definition of the lower semi-continuity (l.s.c.) on X of a function $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Show that if $(f_i)_{i\in I}$ (I is any set) is a family of l.s.c. functions, then the function
$$\forall x \in X, \quad \varphi(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$$
is also l.s.c. on X.
3. Is the result of the previous question still valid if we replace l.s.c. by continuous (in the hypotheses and in the conclusion) ?

Exercice 2. We define for $f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R})$:
$$J(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)|dt.$$
We also define $\mathcal{A} = \left\{f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R}), f(-1) = f(1) = 1\right\}$ endowed with the norm $\|\cdot\|_\infty$.

1. Is the space $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_\infty)$ complete ?
2. Is J continuous ?
3. Is J coercive ?
4. Study the problem
$$\inf\left\{J(f),\ f \in \mathcal{A}\right\},$$
in particular you will give the value of the infimum and determine if it is achieved or not.
5. We now define for $k \in \mathbb{R}_+$,
$$m_k = \inf\left\{J(f),\ f \in \mathcal{A} \text{ and } k\text{-lipschitz continuous}\right\}.$$
   (a) Guess (depending on k) a solution of this optimization problem.
   (b) Make a proof.

UPMC 2017-2018
M2 Mathématiques de la modélisation J. Lamboley
Cours de base : Optimisation

Examen 2 (05/10/17) : 30 min

(Sauf avis contraire, toutes vos réponses doivent être accompagnées d'une preuve)

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers $x \in E$.

1. Donner la définition de la convergence faible de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E' qui converge vers $f \in E'$ (pour la norme habituelle (subordonnée) de E'). Montrer que
$$\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, x\rangle_{E',E}$$
3. Montrer que
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
4. On suppose que $E = H$ est un espace de Hilbert (et donc sa norme est issue d'un produit scalaire), et que
$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
Montrer que (x_n) converge fortement vers x (i.e. pour la norme de E).

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille équicontinue de fonctions de $C^0(E, F)$ où E, F sont des espaces vectoriels normés.

1. Ecrire la définition de l'équicontinuité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'ensemble A des éléments x de E tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans F) est un ensemble fermé.

Exercice 3. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\ell^\infty(\mathbb{N})'$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{(\ell^\infty(\mathbb{N}))'} = 1$ mais qui n'a aucune sous-suite qui converge faible-$\star$. Que peut-on en déduire sur l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$?

UPMC 2017-2018
M2 Mathématiques de la modélisation J. Lamboley
Cours de base : Optimisation

2nd Exam (05/10/17) : 30 min

(Except if stated otherwise, you should give a proof for every answer)

Exercice 1. Let $(E, \|\cdot\|)$ a (real) Banach space. Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of elements in E converging weakly to $x \in E$.

1. Recall the definition of weak convergence of $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to x.
2. Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of E' converging to $f \in E'$ (for the usual norm in E'). Prove that
$$\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, x\rangle_{E',E}$$
3. Prove that
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
4. We assume $E = H$ is a Hilbert space (and therefore its norm is induced by a scalar product), and that
$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
Show that (x_n) converges strongly to x (i.e. for the norm of E).

Exercice 2. Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an equi-continuous family of $C^0(E, F)$ where E, F are normed vector spaces.

1. Recall the definition of equicontinuity of $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Show that the set A of elements x in E such that the sequence $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence (in F) is a closed set.

Exercice 3. Show that there exists a sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of elements in $\ell^\infty(\mathbb{N})'$ such that for every $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{(\ell^\infty(\mathbb{N}))'} = 1$ but such that there is no sub-sequence converging weakly-$\star$. What can we deduce about the space $\ell^\infty(\mathbb{N})$?