Université Paris-Diderot Année 2017-2018
Licence 1, informatique - Algèbre et analyse élémentaires

Algèbre linéaire

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \}.$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non colinéaires, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2, 3)$ et $w = (2, -4, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) On suppose que w n'est pas multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a $P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \}$, où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 3. Comparaison de deux sous-espaces.

(a) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 3, 2),\ v_2 = (3, -1, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, -6, -3),\ v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3, v_4). Déterminer la dimension de F et en donner une base. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

(b) Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de G.

(c) Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 4.

(a) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille composée des vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$.
La famille $\{u, v\}$ est-elle libre ? La famille $\{u, v\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? La famille $\{u, v\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(b) Soient u, v les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (0, 3, 4)$ et $v = (1, 0, 5)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(c) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -1)$ et $w = (9, 8, 1)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(d) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par $u = (1, 1)$, $v = (-1, 1)$ et $w = (3, 3)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

(e) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (-1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (-2, 5, 5)$.
Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? Ces vecteurs engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Ces vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(f) Soient $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ et $v_4 = (2, 1, 1)$.
Cette famille est-elle libre ? Cette famille est-elle génératrice ? Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(g) Compléter si possible la famille $\{(1, 0, -1), (0, 2, 3)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

(h) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

(i) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5. Pour quelles valeurs du paramètre réel a les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 0, 2) \quad v_2 = (1, 0, 1, 2) \quad v_3 = (1, 3, 5, 7) \quad v_4 = (0, 2, 3, a)$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

(a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer un système d'équations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) En supposant que w *n'est pas* multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

(a) $u = (3, 2, 1)$ et $v = (4, 2, 0)$;

(b) $u = (3, 1, 2)$, $v = (5, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 4)$;

(c) $u = (-2, 4, 1)$, $v = (1, -2, 0)$ et $w = (3, m, -1)$ (discuter suivant les valeurs de m).

Exercice 9. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (2, 3, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, 7)$.

Exercice 10. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F.

Exercice 11. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$;

(b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$;

(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$;

(d) $N = \{(u, 3v, v - u) \,|\, u, v \in \mathbb{R}\}$;

Exercice 12. Déterminer une base et la dimension, des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ où $a_1 = (3, 3, 10)$, $a_2 = (0, 3, 4)$ et $a_3 = (1, 0, 2)$;

(b) $B = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ où $b_1 = (1, 0, 0)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$;

(c) $C = \{(2t + u, -u, -2t) \,|\, t, u \in \mathbb{R}\}$;

(d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 0\}$;

(e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \;\text{ et }\; 3x - y + z = 0\}$.

Exercice 13.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, trois paramètres réels. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ donné par

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ 2x & + & 2y & - & z & = & b \\ -x & + & 3y & - & 3z & = & c \end{array}\right.$$

1. Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c le système $(\mathcal{S})$ admet-il au moins une solution ?
2. Considérons les trois vecteurs $u_1 = (3, 2, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 3)$ et $u_3 = (2, -1, -3)$; forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 14.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\,\}$ et les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 3, 2)$.
On note $G = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F puis sa dimension.
3. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Justifier votre réponse.
4. En déduire la dimension de G.
5. On forme la famille $\mathcal{E}$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}$ à ceux de la famille (u_1, u_2, u_3).
   $\mathcal{E}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
6. La famille $\mathcal{B}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
7. En déduire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 15.

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs suivants

$$u_1 = (1, -1, 2), \qquad u_2 = (1, 3, -1), \qquad u_3 = (3, 1, 3).$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2 et u_3.

1. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Quelle information peut-on en déduire pour $\dim F$?
2. Le sous-espace vectoriel F est-il de dimension 0 ? de dimension 1 ?
3. En déduire la dimension de F. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F. Exprimer le vecteur u_3 comme une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2.

Considérons le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -5x + 3y + 4z = 0\}.$$

4. Le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
5. Donner une base $\mathcal{B}$ de G et la dimension de G.
6. Compléter la base $\mathcal{B}$ de G en une base de $\mathbb{R}^3$.
7. A-t-on $F = G$?

Exercice 16.

1. **Sous-espaces vectoriels**
   (a) Le sous-ensemble $E = \{(3a, a+b, b+2) \,|\, a,\, b \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Le sous-ensemble $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ z - 2x = 0 \end{array} \right. \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2. **Famille libre, famille génératrice, base**
   Considérons les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, -1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ et $u_4 = (3, 3, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) La famille (u_1, u_2) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?
   (b) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
   (c) La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. **Dimension et système d'équations cartésiennes**
   Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, -1, 0)$ et $v_2 = (3, 0, 1)$.
   (a) Donner la définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Quelle est la dimension de G ?
   (c) Donner une équation cartésienne de G.

Exercice 17.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y + 3z = 0\}$, les vecteurs $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (3, 0, -2)$, $u_3 = (1, 2, -1)$ et la droite D engendrée par u_3.

1. Déterminer un système d'équations de D dans la base canonique.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F.
4. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit v un vecteur de coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans la base $\mathcal{B}$, à quelle condition sur a_1, a_2 et a_3 a-t-on $v \in F$? Autrement dit, déterminer une équation de F dans la base $\mathcal{B}$.
6. Déterminer de même un système d'équations de D dans la base $\mathcal{B}$.
7. Soit v un vecteur de coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans la base $\mathcal{B}$, peut-on trouver un vecteur w de coordonnées (b_1, b_2, b_3) dans la base $\mathcal{B}$ qui vérifie :

   $$v + w \in F \text{ et } v - w \in D$$

   Justifier la réponse et déterminer, le cas échéant, le ou les vecteurs w satisfaisant cette propriété.

Exercice 18.

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0 \,\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F, puis calculer la dimension de F.

Etude d'un sous-espace vectoriel G

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 5, 1),\; u_2 = (3, 1, 3) \text{ et } u_3 = (1, -1, 1).$$

On note $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1, u_2, u_3.

3. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ? Justifier la réponse.
4. Calculer la dimension de G. Justifier la réponse.
5. Donner un système d'équations cartésiennes caractérisant G.

Etude du sous-espace vectoriel engendré par F et G

6. On forme la famille $\mathcal{E}$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}$ et la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$.
   Quel est le cardinal de $\mathcal{E}$? Est-ce que $\mathcal{E}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
7. La famille $\mathcal{E}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier la réponse.