Algèbre et analyse élémentaires II
Algèbre linéaire
Systèmes linéaires

Nous allons commencer par indiquer une méthode générale de résolution des systèmes (d'équations) linéaires. Vous avez appris dans le secondaire comment résoudre l'équation $ax = b$ où x est une variable réelle inconnue et a et b des paramètres réels.

En effet, si $a = 0$, on sait qu'il n'y a pas de solution en x si $b \neq 0$ et que tout valeur réelle est solution si $b = 0$. Enfin, si $a \neq 0$, il existe une seule solution $x = b/a$.

Nous allons généraliser ce résultat à l'équation $AX = B$ où nous allons préciser rapidement ce que représentent A , X et B . Par ailleurs nous remarquerons que la solution est algorithmique (autrement dit il est facile de la transformer en un programme). C'est pourquoi les systèmes de calcul peuvent résoudre de tels systèmes d'équation et que les systèmes de calcul formel peuvent comporter des modules dédiés à l'algèbre linéaire.

1 Systèmes linéaires. Matrices. Définitions générales. Exemples.

Définition. *On appelle système linéaire (de n équations à m inconnues) la donnée d'un tableau (à n lignes et m colonnes) de $n \times m$ coefficients scalaires (noté a_{ij} où i décrit $\{1 \dots n\}$ et j décrit $\{1 \dots m\}$) et d'un second membre de n coefficients scalaires b_i ($i \in \{1 \dots n\}$). Résoudre ce système linéaire c'est trouver m scalaires x_j tels que*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j & = & b_n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases} .$$

On parle de système linéaire homogène lorsque tous les coefficients b_i sont nuls ou encore, lorsque le vecteur $b = (b_1, \dots, b_n)$ est nul.

Introduisons alors la notion de matrice afin de simplifier l'écriture des systèmes linéaires.

Définition. *On appelle matrice (à n lignes et m colonnes) la donnée d'un tableau de $n \times m$ scalaires :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} .$$

Définition. *Soit A une matrice de n lignes et m colonnes. Soit x_i la donnée de m scalaires. Nous les noterons en colonne soit X (ayant m lignes). Le produit de la matrice A par la colonne X (à droite) est une matrice colonne (ayant n lignes) donnée par les formules :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j \end{pmatrix} .$$

Autrement dit on multiplie une matrice par une matrice colonne en multipliant, ligne par ligne, chaque coefficient par le coefficient respectif de la colonne et en ajoutant tous ces produits.

Remarque. *Avec ces notations, le système linéaire introduit plus haut s'écrit*

$$AX = B$$

où B (resp. X) est la matrice colonne (ayant n lignes) (resp. m lignes) associée au vecteur b (resp. $(x_1, \ldots, x_m)$).

Remarque. *On pourra aussi associer au système $AX = B$ la matrice $(A|B)$ formée en rajoutant la colonne B à la matrice A . On constatera plus loin que cette notation est bien adaptée à l'application de la méthode de Gauss.*

Remarque. *Expliquons pourquoi ces systèmes sont appelés linéaires. Si le vecteur b du second membre est multiplié par un scalaire λ non nul, il est immédiat de constater que $x_1, \ldots, x_m$ sera solution du système avec second membre b si et seulement si $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m$ est solution du système avec second membre λb .*

De même si le second membre b s'écrit comme une somme de deux vecteurs b_1 et b_2 , si $y_1, \ldots, y_m$ est solution du système avec second membre b et si $z_1, \ldots, z_m$ est solution du système avec second membre b' alors $z_1 + y_1, \ldots, z_n + y_n$ est solution du système avec second membre b .

Ajoutons que $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution du système homogène.

Nous dirons que l'expression des solutions est linéaire en fonction du second membre.

Remarque. *Introduisons la notion de combinaison linéaire. Si le second membre est de la forme $\lambda b + \mu b'$ (c'est à dire $(\lambda b_1 + \mu b'_1, \ldots, \lambda b_n + \mu b'_n)$) et si $y_1, \ldots, y_m$ est solution du système avec second membre b et si $z_1, \ldots, z_m$ est solution du système avec second membre b' , alors $\lambda y_1 + \mu z_1, \ldots, \lambda y_n + \mu z_n$ est solution du système avec second membre $\lambda b + \mu b'$.*

Donnons quelques exemples.

Exemple. *Considérons le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} .$$

Soit encore

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ x_1 + x_2 & = & b_2 \end{cases} .$$

On cherche (par exemple) quand le vecteur (b_1, b_2) est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1)$ et $(1, 1)$! La réponse est donc très simple : soit $b_1 = b_2$ et l'on a une infinité de solutions $(b_1 - x_2, x_2)$ où x_2 est quelconque car, alors les deux équations (de premier membre identique) sont compatibles ; soit $b_1 \neq b_2$ et il n'y a pas de solution (les deux équations étant incompatibles).

Exemple. *Considérons le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} .$$

Soit encore

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ x_1 - x_2 & = & b_2 \end{cases} .$$

On cherche (par exemple) quand le vecteur (b_1, b_2) de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$.

La résolution de ce système est simple. On peut ainsi remarquer que la variable x_2 s'exprime simplement en fonction de x_1 d'après la seconde équation : $x_2 = x_1 - b_2$ puis reporter dans la première équation pour arriver au système équivalent :

$$\begin{cases} x_2 & = & x_1 - b_2 \\ x_1 + x_1 - b_2 & = & b_1 \end{cases}$$

d'où $x_1 = \frac{b_1+b_2}{2}$ et $x_2 = \frac{b_1-b_2}{2}$. Dans ce cas notre système a exactement une (et une seule) solution.

Nous allons voir que ces deux exemples couvrent toutes les situations possibles pour un système linéaire : absence de solutions, solution unique, infinité de solutions avec paramètres.

Exprimons la méthode dite du pivot de Gauss dans les deux cas qui précèdent. Considérons la variable x_1 . Elle apparaît dans les équations avec les coefficients a_{i1} . Dans nos deux cas a_{11} est non nul. En général, l'un au moins de ces coefficients est sûrement non nul (sinon la variable x_1 n'apparaîtrait pas). Quitte à intervertir les équations entre elles, on peut donc supposer que a_{11} est non nul. Alors la première équation permet d'exprimer x_1 en fonction des autres variables et l'on peut reporter cette expression dans les $n-1$ autres équations qui ne comporteront plus que $m-1$ variables (au plus) $x_2 , \dots , x_m$. La méthode dite "du pivot de Gauss" consiste alors à remarquer que l'on peut réitérer l'opération : si dans les $m-1$ dernières équations, apparaît encore une variable avec un coefficient non nul, on choisit une ligne où apparaît cette variable et un tel coefficient pour exprimer cette variable en fonction des autres et on reporte dans les autres équations. Sinon on a terminé.

Appliquons cela dans nos deux exemples :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ x_1 + x_2 & = & b_2 \end{cases} .$$

Si l'on exprime x_1 à l'aide de la première équation et que l'on reporte, le système devient

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ b_1 & = & b_2 \end{cases} .$$

Pour

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ x_1 - x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

il devient

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ b_1 - 2x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ -2x_2 & = & -b_1 + b_2 \end{cases} .$$

2 Résolution de systèmes linéaires. Méthode.

Reprenons le système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{1j} x_j & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj} x_j & = & b_n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases} \text{ ou } AX = B .$$

Définition. *Méthode (du pivot) de Gauss. On peut transformer un système linéaire en un système linéaire équivalent (c'est-à-dire ayant les mêmes solutions) en*

— *échangeant deux équations (puisqu'il suffit de les échanger à nouveau pour retrouver le système initial) ;*
— *multipliant une équation par un scalaire non nul (puisqu'il suffit de multiplier cette équation par son inverse pour retrouver le système initial) ;*
— *ajouter à une équation un multiple quelconque d'un autre équation (puisqu'il suffit alors de lui retrancher ce même multiple pour revenir en arrière).*

Ces opérations sont dites élémentaires.

Remarque 2.1. *L'énoncé met en évidence que ces trois opérations élémentaires sont faciles à inverser à l'aide d'opérations élémentaires (échanger deux lignes qui viennent d'être échangées permet de revenir à l'ordre initial des équations ; multiplier une équation multipliée par un scalaire non nul par l'inverse de ce scalaire non nul permet de retrouver l'équation initiale et, enfin, retrancher à l'équation à laquelle vient d'être ajouté μ-fois une autre équation μ-fois cette dernière permet de revenir à l'équation intiale)*

Et c'est exactement cette remarque qui prouve la justesse de la méthode.

Remarque 2.2. *En termes d'algorithme, il est également très facile de concevoir trois procédures :*

— *une procédure prenant en entrée un tableau (n lignes et m colonnes), deux entiers (i, k) distincts (et inférieurs ou égaux à n) et donnant en sortie le tableau où les lignes i et k ont été échangées (les autres lignes restant inchangées) ;*
— *une procédure prenant en entrée un tableau (n lignes et m colonnes), un entier i (inférieur ou égal à n), un scalaire réel non nul λ et donnant en sortie un tableau où la ligne i a été multipliée par λ (les autres lignes restant inchangées) ;*
— *une procédure prenant en entrée un tableau (n lignes et m colonnes), deux entiers (i, k) distincts (et inférieurs ou égaux à n), un scalaire μ et donnant en sortie le tableau où on a ajouté à la ligne d'indice k la ligne d'indice i multipliée par μ (les autres lignes restant inchangées).*

Théorème 1. *La méthode (du pivot) de Gauss. Soit $AX = B$ un système linéaire. Il est équivalent (au sens où il admet le même ensemble de solutions) à un système (toujours de n équations) dit échelonné c'est à dire de la forme*

$$\begin{cases} x_{j_1} + \sum_{j>j_1}^m u'_{1j}x_j & = & b'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j_r} + \sum_{j>j_r}^m u'_{nj}x_j & = & b'_r \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b'_n \end{cases}.$$

Les entiers j_k, $k = 1 \dots r$ vérifient $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq m$. Enfin les b'_i sont des combinaisons linéaires des b_i .

Pourquoi un système linéaire échelonné est-il plus simple ? Examinons-le. Les $n-r$ dernières équations ne comportent pas de variables. On parle parfois d'équations de compatibilité. Soit tous les scalaires b'_i $(i = r + 1, \dots, n)$ sont nuls et ces équations sont trivialement vérifiées. Soit l'une d'entre elles n'est pas possible et ce système ne peut avoir de solutions. Dans le cas où les équations de compatibilité sont satisfaites, reste donc à examiner les r premières équations. On remarque que l'équation

$$x_{j_r} + \sum_{j>j_r}^m u'_{nj}x_j = b'_r$$

permet d'exprimer x_{j_r} en fonction d'un scalaire et (éventuellement) une combinaison linéaire de variables initiales (celles dont l'indice n'est pas de la forme j_k). Plus généralement les variables x_{j_k} s'expriment également ainsi puisque, si les variables $x_{j_{k'}}$ apparaissent, on peut leur substituer leur expression en fonction des autres. On a donc bien résolu le système échelonné, et par voie de conséquence, le système initial.

Exemple. *Reprenons les deux exemples.*

Le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= b_1 \\ x_1 + x_2 &= b_2 \end{cases}$$

devient le système échelonné suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= b_1 \\ \quad b_1 &= b_2 \end{cases} .$$

On retrouve notre résultat : soit $b_1 \neq b_2$ et il n'y a pas de solution. Soit $b_1 = b_2$ et il y a une infinité de solutions $(b_1 - x_2, x_2)$.

Le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= b_1 \\ x_1 - x_2 &= b_2 \end{cases}$$

devient

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= b_1 \\ -2x_2 &= -b_1 + b_2 \end{cases} .$$

Soit une unique solution $(\frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2})$.

Montrons le principe de la méthode du pivot de Gauss. Partons du principe que l'on parcourt (par ordre croissant) les colonnes de M . Soit la première colonne est formée de coefficients dont l'un au moins est non nul (ce qui signifie que la variable x_1 apparaît bien dans le système), soit on regarde les colonnes jusqu'à la première colonne non nulle, disons d'indice $j_1 \geq 1$. Si une telle colonne n'existait pas c'est que la matrice M serait nulle et cette matrice est échelonnée !

Ainsi sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

on voit que $i_1 = 2$ puisque la variable x_1 n'apparaît pas dans le système.

On va alors parcourir la colonne j_1 coefficient par coefficient (ligne par ligne). On sait qu'il y aura un premier coefficient non nul. On le choisit. Dans notre exemple, il apparaît à la ligne 2 . Dans tous les cas, s'il n'apparaît pas en première ligne, par une opération élémentaire (échange de la première équation et de la ligne i_1 où apparaît ce premier coefficient non nul), On peut donc supposer que a_{1j_1} est non nul. Le système initial s'écrivait

$$\begin{cases} \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{1m}x_m = & b_1 \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1-1,j_1}x_m = & b_{i_1-1} \\ \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & a_{i_1,j_1}x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1,m}x_m = & b_{i_1} \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & a_{n,j_1}x_{j_1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m = & b_n \end{cases}$$

et on le remplace par

$$\begin{cases}
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & a_{i_1,j_1}x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1,m}x_m = & b_{i_1} \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{2m}x_m = & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1-1,m}x_m = & b_{i_1-1} \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{1m}x_m = & b_1 \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & a_{i_1+1,j_1}x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1+1,m}x_m = & b_{i_1+1} \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & a_{n,j_1}x_{j_1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m = & b_n
\end{cases}$$

Dans notre exemple, notre système devient

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

On peut alors, quitte à multiplier par $\frac{1}{a_{1j_1}}$, supposer que $a_{1j_1} = 1$ (c'est une opération élémentaire). Dans notre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

Et notre système général devient

$$\begin{cases}
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1,m}x_m = & \frac{b_{i_1}}{a_{i_1,j_1}} \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{2m}x_m = & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1-1,m}x_m = & b_{i_1-1} \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{1m}x_m = & b_1 \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & a_{i_1+1,j_1}x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1+1,m}x_m = & b_{i_1+1} \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
\dots & + & 0x_{j_1-1} & + & a_{n,j_1}x_{j_1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m = & b_n
\end{cases} .$$

Alors on remarque que l'on peut retrancher à chacune des lignes d'indice $I_1 + 1$ à n la (nouvelle) première ligne multipliée par a_{ii,j_1} ce qui annule tous les coefficients de x_{j_1} . Ceci est encore une suite d'opération élémentaires. Dans notre exemple, on retranchera cette première ligne à la troisième. Soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ b_3 + b_2 \end{pmatrix} .$$

Dans le cas général, notre système devient

$$\begin{cases} \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1,m}x_m = & \frac{b_{i_1}}{a_{i_1,j_1}} \\ \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{2m}x_m = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1-1,m}x_m = & b_{i_1-1} \\ \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{1m}x_m = & b_1 \\ \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{i_1+1,m}x_m = & b_{i_1+1} - \frac{a_{i_1+1,j_1}b_{i_1}}{a_{i_1,j_1}} \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \dots & + & 0x_{j_1-1} & + & 0x_{j_1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m = & b_n - \frac{a_{n,j_1}b_{i_1}}{a_{i_1,j_1}} \end{cases}.$$

On recommence alors le processus mais avec le système extrait

$$\begin{cases} \dots & + & 0x_{j_1} & + & a_{2,j_1+1}x_{j_1+1} & + & \dots & + & a_{2m}x_m = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \dots & + & 0x_{j_1} & + & a_{i_1-1,j_1+1}x_{j_1+1} & + & \dots & + & a_{i_1-1,m}x_m = & b_{i_1-1} \\ \dots & + & 0x_{j_1} & + & a_{1,j_1+1}x_{j_1+1} & + & \dots & + & a_{1m}x_m = & b_1 \\ \dots & + & 0x_{j_1} & + & a_{i_1+1,j_1+1}x_{j_1+1} & + & \dots & + & a_{i_1+1,m}x_m = & b_{i_1+1} - \frac{a_{i_1+1,j_1}b_{i_1}}{a_{i_1,j_1}} \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \dots & + & 0x_{j_1} & + & a_{n,j_1+1}x_{j_1+1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m = & b_n - \frac{a_{n,j_1}b_{i_1}}{a_{i_1,j_1}} \end{cases}.$$

Mais c'est une matrice ayant une ligne de moins. On peut donc itérer le processus. Dans notre exemple, la matrice obtenue est échelonnée.

Définition. *L'entier r ainsi mis en évidence s'appelle le rang du système linéaire. On remarquera que cet entier est nécessairement plus petit ou égal à m ou à n .*

Remarque. *On remarquera que le rang r d'un système linéaire ne dépend pas du second membre (d'après le déroulement de la méthode de Gauss).*

Les indices d'indice étant plutôt désagréables, on va supposer que $j_k = k,\ k = 1 \dots r$ (on peut toujours le faire quitte à re-numéroter les variables du système). Le système échelonné

$$\begin{cases} x_{j_1} + \sum_{j>j_1}^m u'_{1j}x_j & = & b'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j_r} + \sum_{j>j_r}^m u'_{rj}x_j & = & b'_r \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b'_n \end{cases}$$

sera donc pris sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 + \sum_{j>1}^m u'_{1j}x_j & = & b'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \sum_{j>r}^m u'_{rj}x_j & = & b'_r \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b'_n \end{cases}.$$

Examinons tout d'abord le cas des systèmes homogènes. Dans ce cas on voit que la méthode de Gauss conduit à des équations de compatibilité trivialement vérifiées - lorsqu'elles existent- (en effet les constantes qui apparaissent au second membre après une opération élémentaire sont des combinaisons linéaires des scalaires b_i).

Dans un premier temps, examinons le cas où $r = m \geq n$. Les équations de compatibilité (puisque $n \geq r = m$) sont donc triviales et le système échelonné s'écrit

$$\begin{cases} x_1 + \sum_{j=2}^m u'_{1j} x_j & = & 0 \\ x_2 + \sum_{j=3}^m u'_{2j} x_j & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_m & = & 0 \end{cases} .$$

On voit donc immédiatement que la seule solution est la solution nulle $(x_1, \ldots, x_m) = (0, \ldots, 0)$.

Proposition. *Soit un système linéaire homogène comportant n équations à m variables (il est donc associé à une matrice ayant n lignes et m colonnes). On suppose qu'il est de rang m (donc $r = m \leq n$). Alors il admet la solution nulle pour unique solution.*

Examinons le cas $r < m$. Le système échelonné s'écrit donc

$$\begin{cases} x_1 + \sum_{j>1}^m u'_{1j} x_j & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \sum_{j>r}^m u'_{nj} x_j & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & 0 \end{cases} .$$

Si l'on exprime x_r en fonction des variables d'indice supérieur dans les équations précédentes puis x_{r-1} etc.. on voit que l'on aboutit à

$$\begin{cases} x_1 & = & \sum_{j\geq r}^m u'_{1j} x_j \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & \sum_{j\geq r}^m u'_{nj} x_j \end{cases} .$$

Alors les solutions du système homogène s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=r+1}^m u'_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=r+1}^m u'_{rj} x_j \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} u'_{1r+1} \\ \vdots \\ u'_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_m \begin{pmatrix} u'_{1m} \\ \vdots \\ u'_{rm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Exemple 2.3. *Revenons sur l'exemple traité. Il s'écrit*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

Aussi les solutions de ce système s'écrivent-elles

$$(x_1, -2x_4, -x_4, x_4); x_1 \in \mathbb{R}; x_4 \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$x_1(1,0,0,0) + x_4(0,-2,-1,1); x_1 \in \mathbb{R}; x_4 \in \mathbb{R} \ .$$

Exemple 2.4. *Traitons un second exemple.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

pour lequel nous allons travailler avec la seule matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & b_2 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & b_3 \end{array}\right) \ .$$

On a alors
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & b_3 \end{array}\right) \text{ puis } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 + 2b_2 \end{array}\right) \ .$$

Soit finalement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 + 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & b_1 + b_3 + 2b_2 \end{array}\right) \text{ ou } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 + 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b_1 + b_3 + 2b_2)/2 \end{array}\right)$$

Les solutions du système homogène s'écrivent donc

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_4 = 0\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 2x_2 \text{ et } x_3 = x_4 = 0\} \ .$$

Proposition. *Soit un système linéaire homogène ayant n lignes et m colonnes. On suppose qu'il est de rang $r < m$. Alors il admet une infinité de solutions (dont la solution nulle) et ces solutions s'expriment en fonction de $m - r$ paramètres.*

Remarque. *Dans l'écriture des solutions, on a introduit les vecteurs colonnes*

$$\begin{pmatrix} u'_{1r+1} \\ \vdots \\ u'_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u'_{1m} \\ \vdots \\ u'_{rm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ;$$

on remarquera qu'ils vérifient la propriété particulière suivante : la seule combinaison linéaire nulle de ces vecteurs est celle obtenue avec des coefficients tous nuls.

Passons aux systèmes non homogènes.

Dans un premier temps, examinons le cas où $n = r \leq m$. Il n'y a alors pas d'équation de compatibilité et le système échelonné s'écrit

$$\begin{cases} x_1 & + & \sum_{j=2}^m u'_{1j}x_j & = & b'_1 \\ x_2 & + & \sum_{j=3}^m u'_{2j}x_j & = & b'_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_n & + & \sum_{j=n+1}^m u'_{nj}x_j & = & b'_n \end{cases}.$$

On voit donc immédiatement que ce système admet alors une solution dépendant des $m-n$ paramètres que sont les variables d'indice supérieur strictement à n (solution unique si $r = n = m$).

Examinons le cas $r < n$. Le système échelonné s'écrit donc

$$\begin{cases} x_1 + \sum_{j>1}^m u'_{1j}x_j & = & b'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \sum_{j>r}^m u'_{rj}x_j & = & b'_r \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b'_n \end{cases}.$$

Soit les équations de compatibilité sont impossibles (si l'une des contantes b'_k pour $k \in \{r+1, \ldots, n\}$ n'est pas nulle) et le système n'admet aucune solution ; soit les b'_k $(k = r+1, \ldots, m)$ sont identiquement nuls et l'on peut poursuivre la résolution. Si l'on exprime x_r en fonction des variables d'indice supérieur dans les équations précédentes puis x_{r-1} etc.. on voit que l'on aboutit à

$$\begin{cases} x_1 & = b"_1 & + & \sum_{j\neq 1,\ldots,i_r}^m u'_{1j}x_j \\ \vdots & & \vdots & \\ x_r & = b"_r & + & \sum_{j\neq 1,\ldots,r}^m u'_{rj}x_j \end{cases}.$$

Alors les solutions du système homogène s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=r+1}^m u'_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=r+1}^m u'_{rj}x_j \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b"_1 \\ \vdots \\ b"_{r+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} u'_{1r+1} \\ \vdots \\ u'_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_m \begin{pmatrix} u'_{1m} \\ \vdots \\ u'_{rm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Examinons nos deux exemples.

Exemple 2.5. *On a obtenu*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ b_3 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc une équation de compatibilité ($b_3+b_2 = 0$). Soit elle est non nulle et le système est impossible. Soit elle est nulle et le système admet une infinité de solutions dépendant de 2 paramètres (soit $m-r = 4-2$). Ces solutions s'écrivent

$$(x_1, x_3 - x_4 - b_2, -x_4 + b_1, x_4) = (x_1, -2x_4 + b_1 - b_2, -x_4 + b_1, x_4)$$

soit

$$(0, -b_2, b_1, 0) + x_1(1, 0, 0, 0) + x_4(0, -2, -1, 1) \ .$$

Exemple 2.6. *On a obtenu*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 + 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b_1 + b_3 + 2b_2)/2 \end{array}\right) \ .$$

Dans ce cas il n'y a aucune équation de compatibilité ($r = 3 = n$). Les solutions s'écrivent

$$(2x_2 - b_3 - 2b_2 + b_2 + \frac{b_1 + b_3}{2} + b_2 + \frac{b_1 + b_3}{2}, x_2, b_3 + 2b_2 - b_2 - \frac{b_1 + b_3}{2}, b_2 + \frac{b_1 + b_3}{2})$$

soit

$$(b_1 + b_3, 0, -\frac{b_1}{2} + b_2 + \frac{b_3}{2}, \frac{b_1}{2} + b_2 + \frac{b_3}{2}) + x_2(2, 1, 0, 0) \ .$$

Proposition. *Soit un système linéaire ayant n lignes et m colonnes. Alors soit il n'admet aucune solution (si $r < n$ et lorsque l'une des équations de compatibilité est impossible) soit, si $r = m$, il admet une unique solution et, si $r < m$, il admet une infinité de solutions et ces solutions s'expriment en fonction de $m - r$ paramètres.*

Définition 2.7. *Soit $MX = B$ un système linéaire. On suppose qu'il admet n équations et $m = n$ inconnues. Enfin on suppose que son rang est maximal ($r = n = m$). On dira que le système est de Cramer. On sait qu'il admet une unique solution quelque soit la valeur du second membre B .*

3 Résolution de systèmes linéaires. Un exemple d'application.

Exemple. *Examinons pour terminer ce paragraphe un exemple d'application un peu plus complexe.*

Bref nous allons étudier le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} x + y + 3t + u & = & a \\ x - 3z - u & = & b \\ y + 2z + 2t + u & = & c \\ 2x + 2y - z + 5t + u & = & d \end{array}\right. .$$

Si l'on applique le pivot, on voit qu'il est moins fatiguant d'intervertir les deux premières équations puis de retrancher le bon multiple de cette deuxième équation dans les première et dernière équations :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 3z + u + b \\ y + 3z + 3t + 2u & = & a - b \\ y + 2z + 2t + u & = & c \\ 2y + 5z + 5t + 3u & = & d - 2b \end{array}\right. .$$

Utilisons alors la troisième équation pour éliminer la présence de y dans la seconde et dans la troisième :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 3z + u + b \\ y & = & -2z - 2t - u + c \\ z + t + u & = & a - b - c \\ z + t + u & = & d - 2b - 2c \end{array}\right. .$$

On constate alors que les premiers membres des deux dernières équations coïncident. D'où

$$\begin{cases} x & = & 3z+u+b \\ y & = & -2z-2t-u+c \\ z+t+u & = & a-b-c \\ 0 & = & d-2b-2c-a+b+c \end{cases} .$$

Le système est échelonné. Il est donc de rang 3 *. Il y a* $n-r=4-3=1$ *équation de compatibilité :*

$$d-2b-2c-a+b+c=-a-b-c+d\ .$$

Donc, soit $-a-b-c+d=0$ *et le système admet une infinité de solutions à* $m-r=5-3=2$ *paramètres, soit* $-a-b-c+d\neq 0$ *et le système est impossible.*

Terminons la résolution en exprimant les solutions lorsque le système admet des solutions (c'est à dire que $-a-b-c+d=0$*). Nous devons résoudre*

$$\begin{cases} x & = & 3z+u+b \\ y & = & -2z-2t-u+c \\ z+t+u & = & a-b-c \end{cases} .$$

Comme x *s'exprime naturellement en fonction de* z *et* u *, on va choisir les inconnues* z *et* u *comme les inconnues libres. Alors on a*

$$\begin{cases} x & = & b+3z+u \\ t & = & (a-b-c)-z-u \\ y & = & c-2z-2t-u=c-2z-2(a-b-c)+2z+2u-u=(-2a+2b+3c)+u \end{cases} .$$

Bref les solutions s'écrivent

$$(b+3z+u,(-2a+2b+3c)+u,z,(a-b-c)-z-u,u)$$

soit encore

$$(b,-2a+2b+3c,0,a-b-c,0)+z(3,0,1,-1,0)+u(1,1,0,-1,1)\ .$$

On notera que $(b,-2a+2b+3c,0,a-b-c,0)$ *est une solution particulière du système avec second membre et que* $(3,0,1,-1,0)$ *et* $(1,1,0,-1,1)$ *deux solutions particulières du système homogène.*

À ce moment du cours, on peut se demander ce qui se passerait dans cette résolution si l'on opérait d'autres choix d'échelonnement. Opérons donc un autre choix (et travaillons avec la matrice $(A|B)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & | & a \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & | & b \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & c \\ 2 & 2 & -1 & 5 & 1 & | & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -2 & | & b-a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & c \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & d-2a \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & | & a \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & | & b \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & c \\ 2 & 2 & -1 & 5 & 1 & | & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & b+c-a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & c \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & d-2a \end{pmatrix}$$

soit finalement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & | & a \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & | & b \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & c \\ 2 & 2 & -1 & 5 & 1 & | & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & a-b-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & d-2a-b-c+a \end{pmatrix} .$$

On voit donc que le rang est toujours 3 et que l'équation de compatibilité reste $d - a - b - c = 0$ (c'est heureux et c'est évidemment un résultat général). Exprimons désormais les solutions avec ce nouvel échelonnement (lorsque d=a+b+c) :

$$\begin{cases} x + y + 3t + u & = & a \\ y + 2z + 2t + u & = & c \\ z + t + u & = & a - b - c \end{cases} .$$

On aura successivement $z = (a-b-c) - t - u$, $y = c - 2(a-b-c) + 2t + 2u - 2t - u = (-2a+2b+3c) + u$ et $x = a - (-2a + 2b + 3c) - u - 3t - u = (3a - 2b - 3c) - 3t - 2u$. D'où des solutions de la forme

$$(3a - 2b - 3c, -2a + 2b + 3c, a - b - c, 0, 0) + t(-3, 0, -1, 1, 0) + u(-2, 1, -1, 0, 1) .$$

Les solutions s'expriment donc sous les deux formes :

$$(b, -2a + 2b + 3c, 0, a - b - c, 0) + z(3, 0, 1, -1, 0) + u(1, 1, 0, -1, 1)$$

ou

$$(3a - 2b - 3c, -2a + 2b + 3c, a - b - c, 0, 0) + t(-3, 0, -1, 1, 0) + u(-2, 1, -1, 0, 1) .$$

Comparons tout d'abord les solutions (particulières) du système homogènes. On a

$$(-3, 0, -1, 1, 0) = -(3, 0, 1, -1, 0) \text{ et } (-2, 1, -1, 0, 1) = (1, 1, 0, -1, 1) + (-3, 0, -1, 1, 0) .$$

Ainsi les solutions particulières (seconde expression) sont combinaisons linéaires des solutions particulières (première expression) et vice-versa.

Reste les solutions particulières du système avec second membre. On a

$$(3a-2b-3c, -2a+2b+3c, a-b-c, 0, 0) - (b, -2a+2b+3c, 0, a-b-c, 0) = (3a-3b-3c, 0, a-b-c, -a+b+c, 0)$$

soit

$$(3a - 2b - 3c, -2a + 2b + 3c, a - b - c, 0, 0) - (b, -2a + 2b + 3c, 0, a - b - c, 0) = (a - b - c)(3, 0, 1, -1, 0) .$$

Elles diffèrent donc d'une solution du système homogène. Nous venons de vérifier que les deux expressions des solutions correspondent bien aux mêmes solutions.

En guise de **conclusion**, on peut garder les principes suivants. Soit un système linéaire de n équations à m inconnues. Après échelonnement éventuel, il peut être ramené à un système équivalent (ayant les mêmes solutions) comportant r équations mettant en évidence r inconnues de telle façon qu'elles puissent s'exprimer en fonction des $m - r$ autres inconnues et $n - r$ identités. On a bien évidemment $r \leq n$ et $r \leq m$.

Si le système est homogène, le système admet comme unique solution la solution nulle si et seulement si $r = m$ (et donc $r = m \leq n$). Si $m > r$, le système admet une infinité de solutions ayant $m - r$ paramètres.

Si le système n'est pas homogène, le système est impossible si $r < n$ et que l'une des $n - r$ identités (après échelonnement) n'est pas triviale. Si toutes les $n - r$ identités sont triviales ou que $r = n$, le système admet une unique solution si et seulement si $r = m$. Si toutes les $n - r$ identités sont triviales, et que $r < m$, le système admet une infinité de solutions ayant $m - r$ paramètres.