**Algèbre et analyse élémentaires II**
**Algèbre linéaire**

Le terme d'algèbre provient du titre d'un ouvrage d'un mathématicien d'origine persane Al-Khwarizmi. Il comportait le mot al-jabr. Cet ouvrage a été publié aux alentours de 825. A noter que le nom de ce mathématicien a donné le terme d'algorithme. Les concepts d'algèbre linéaire ont, eux, émergé beaucoup plus tard tout au long du dix-neuvième siècle.

Cette notion est une des notions de base à maîtriser pendant le cursus de licence. Ainsi bon nombre de questions d'analyse (non linéaires) sont étudiées en procédant tout d'abord à une linéarisation.

Le corps des scalaires. L'algèbre linéaire utilise comme donnée de base le corps des scalaires (ensemble muni de deux lois de groupe, l'addition et la multiplication, lois vérifiant les propriétés que vous avez découvert en primaire et secondaire). L'exemple de base est le corps des réels $\mathbb{R}$ . Mais vous connaissez aussi le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ . Ceux d'entre vous qui ont suivi une option d'arithmétique connaissent aussi sans doute les corps finis $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (où $p$ est un nombre premier) des classes d'entier modulo $p$ . Vous utiliserez sans doute plus tard dans votre cursus d'informatique les corps $\mathbb{F}_{2^f}$ : l'ensemble des $f$-uplet d'entiers modulo 2 (bref 0 ou 1) peut être muni d'une structure de groupe. Ainsi l'ensemble des octets peut être munie d'une structure de corps qui en fait $\mathbb{F}_8$ .

Toutes les définitions et les concepts d'algèbre linéaire que nous allons aborder en nous basant sur le corps des réels fonctionnent lorsque l'on prend un corps $\mathbb{K}$ de scalaire quelconque.

Nous allons donner les définitions générales (en nous inspirant des exemples de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ que vous avez vu au premier semestre) puis nous donnerons les éléments de calcul matriciel utilisés dans ce domaine avant de revenir aux principaux résultats du domaine.

# 1 L'espace $\mathbb{R}^n$ .

Nous allons commencer par mettre en évidence les propriétés essentielles de l'ensemble $\mathbb{R}^n$ .

Soit $n$ un nombre entier non nul. On note $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des $n$-uplets de réels. On note $u = (x_1, \dots, x_n)$ un tel $n$-uplet. On appellera par ailleurs vecteur un tel élément.

Un vecteur $u$ est nul si et seulement si toutes ses composantes sont nulles. On notera d'ailleurs désormais 0 (par abus de langage) le vecteur $(0, \dots, 0)$ . Deux vecteurs $u$ et $v$ sont identiques si et seulement si toutes leurs composantes sont identiques deux à deux :

$$u = v \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \ , \ u_i = v_i \ .$$

Comme on sait additionner des réels, on sait additionner des $n$-uplets :

$$u + u' = (x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n) \ .$$

Autrement dit, on additionne deux $n$-uplets en additionnant leurs composantes respectives. C'est exactement le dessin que vous avez pu faire dans le plan ou dans l'espace. On remarquera que l'ordre des deux $n$-uplets n'a pas d'influence sur le résultat.

On ne sait pas par contre (en général) multiplier des $n$-uplets entre eux alors que l'on sait multiplier deux réels. Mais on sait multiplier un $n$-uplet par un réel :

$$a.u = au = a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n) \ .$$

Encore une fois, on le fait composante par composante. On parlera désormais de multiplication d'un vecteur par un scalaire $a$ .

**Remarque 1.1.** *On a les propriétés (immédiates) suivantes :*

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ 0.u = 0 \text{ et } 1.u = u \ ;$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n,\ a(bu) = (ab)u \ ;$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ a(u+v) = au + av \ ;$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n,\ (a+b).u = a.u + b.u.$$

**Remarque 1.2.** *Le lecteur (l'auditeur) attentif constatera que ces propriétés subsistent bien si l'on travaille avec l'ensemble $\mathbb{C}^n$ des n-uplets de nombres complexes (ou d'ailleurs $\mathbb{Q}^n$). Cela provient de ce que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$ sont des corps (notion que vous verrez ultérieurement).*

**Remarque 1.3.** *On notera désormais $-u$ l'opposé du vecteur $u = (x_1, \ldots, x_n$ puisque l'on a*

$$(-1).u = (-1).(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n) \ .$$

**Remarque 1.4.** *Avec les opérations précédentes, on voit que*

$$u = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

*où l'on a noté $e_i$ le n-uplet dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de la i-ième qui est égale à 1 . Les vecteurs $e_i$ sont appelés canoniques.*

**Remarque 1.5.** *On dit que, pour l'addition des n-uplets de $\mathbb{R}^n$ et la multiplication par un scalaire réel de ces mêmes n-uplets, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ .*

Le lecteur plus avancé pourra trouver la définition suivante dans les ouvrages traitant de mathématiques de licence.

**Définition 1.6.** *Soit $E$ un ensemble. On dit qu'il est muni d'une addition interne s'il est muni d'une application de $E \times E$ dans $E$ : $(u, v) \in E^2 \mapsto u + v \in E$ . On dit que $E$ muni d'une multiplication par un scalaire réel (dite multiplication externe) s'il est muni d'une application de $\mathbb{R} \times E$ dans $E$ : $(\lambda, u) \mapsto \lambda.u \in E$ .*

**Définition 1.7.** *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ un ensemble $E$ muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire réel (dite multiplication externe) vérifiant les propriétés suivantes :*
- $\forall (u, v, w) \in E^3$ , $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(on dit que l'addition est associative) ;*
- $\forall (u, v) \in E^2$ , $u + v = v + u$ *(on dit que l'addition est commutative) ;*
- $\exists 0 = 0_E \in E$ ; $\forall u \in E$ , $0 + u = u + 0 = u$ *(on dit que l'addition possède un élément neutre $0_E$) ;*
- $\forall u \in E$ , $\exists v \in E$ ; $u + v = v + u = 0$ *(on dit que tout vecteur admet un opposé et on note $v = -u$) ;*
- $\forall u \in E$ , $1.u = u$ *;*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ $\forall u \in E$ , $(\lambda\mu).u = \lambda.(\mu.u)$ *; (on dit que la multiplication est associative) ;*
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall (u, v) \in E^2$ , $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$ *(on dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition des vecteurs) ;*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ $\forall u \in E$ , $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$ *(on dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition des scalaires).*

**Remarque 1.8.** *Très rapidement on note (par abus de langage) $\lambda.u = \lambda u$ .*

**Remarque 1.9.** *Au vu des propriétés données ci-dessus, il est facile de montrer que*

$$\forall u \in E \ , \ (-1).u = -u \ .$$

**Remarque 1.10.** *(Une) Equation. Dans un espace vectoriel $E$ , on a $\lambda.u = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ou $\lambda = 0$ .*

*On va se contenter de le vérifier dans $\mathbb{R}^n$ : bien sûr on a*

$$\lambda.u = 0 \Leftrightarrow (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1 \ldots n\} \lambda x_i = 0$$

*soit*

$$\lambda = 0 \text{ ou } \forall i \in \{1 \ldots n\} x_i = 0 \ (u = 0) \ .$$

**Remarque 1.11.** *On étudiera plus loin dans le cours des exemples d'espaces vectoriels tels que l'espace des polynômes ou l'espace des fonctions continues ou dérivables en un point .*

**Exemple 1.12.** *L'ensemble des suites numériques (applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), qui a été étudié au premier semestre est également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ .*

**Remarque 1.13.** *On appelle groupe commutatif tout ensemble muni d'une opération vérifiant les quatre premières propriétés :*

— $\forall (u, v, w) \in E^3$ , $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(on dit que l'addition est associative) ;*
— $\forall (u, v) \in E^2$ , $u + v = v + u$ *(on dit que l'addition est commutative) ;*
— $\exists 0 = 0_E \in E$ ; $\forall u \in E$ , $0 + u = u + 0 = u$ *(on dit que l'addition possède un élément neutre $0_E$) ;*
— $\forall u \in E$ , $\exists v \in E$ ; $u + v = v + u = 0$ *(on dit que tout vecteur admet un opposé et on note $v = -u$) ;*

*Avec cette notion, un corps $K$ est un ensemble muni d'une addition qui en fait un groupe commutatif, d'une multiplication (interne) pour laquelle l'ensemble $K - \{0\}$ est également un groupe et qui est distributive par rapport à l'addition. Le corps est dit commutatif si cette multiplication est commutative. On connait les corps $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ et $C$ (et peut-être aussi $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $p$ est un nombre premier).*

*De même un espace vectoriel est un groupe (pour une addition) muni d'une multiplication (externe) par les scalaires qui est distributive vis à vis des vecteurs et des scalaires.*

# 2 Sous-espaces vectoriels. Systèmes de vecteurs.

Au regard des propriétés rappelées ci-dessus, certaines parties d'un espace vectoriel sont plus intéressantes que les autres.

**Définition 2.1.** *Soit $F$ une partie* **non vide** *de $\mathbb{R}^n$ . On dit que $F$ est un sous-espace vectoriel (réel) de $\mathbb{R}^n$ si $F$ vérifie*

— $\forall a \in \mathbb{R}, \forall u \in F, au \in F$ *(en particulier le vecteur nul appartient à $F$) ;*
— $\forall u \in F, \forall v \in F$ , $u + v \in F$ .

**Définition 2.2.** *Soient $u$ et $v$ deux vecteurs éléments de $\mathbb{R}^n$ . On appelle combinaison linéaire des vecteurs $u$ et $v$ tout vecteur $w$ de la forme $w = au + bv$ où $a$ et $b$ sont deux scalaires. Plus généralement, soient $u_i$ , $i = 1 \ldots m$ , des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ; on appelle combinaison linéaire des vecteurs $u_i$ de la forme $w = a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m = \sum_{i=1}^m a_i u_i$ où les $a_i$ $(i = 1 \ldots m)$ sont des scalaires.*

**Exemple 2.3.** *Soit $u = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ . Alors nous avons déjà remarqué que*

$$u = a_1(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, \ldots, 0, 1) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

*où l'on a noté $e_i$ le vecteur particulier dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ième qui est égale à 1 . Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est donc une combinaison linéaires des vecteurs canoniques.*

Munis de cette définition, nous pouvons reformuler la définition précédente.

**Définition 2.4.** *Soit $F$ une partie de $\mathbb{R}^n$ . On dit que $F$ est un sous-espace vectoriel (réel) de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout couple $(u,v)$ de vecteurs de $F$ , $F$ contient toutes leurs combinaisons linéaires.*

**Exemple 2.5.** *L'exemple le plus simple est celui des vecteurs de la forme au où $u$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ . Soit $u = 0$ alors le sous-espace est réduit à $\{0\}$ . Soit $u \neq 0$ et le sous-espace est une droite.*

**Exemple 2.6.** *Soit $P$ la partie de $\mathbb{R}^3$ donnée par les vecteurs $u = (x, y, z)$ tels que $x + y + z = 0$ . Cette partie est non vide (elle contient le vecteur nul). Elle contient les vecteurs $(1, -1, 0)$ , $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$ . De plus, comme $z = -x - y$ , les vecteurs de $P$ s'écrivent :*

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)\ .$$

*Donc $P$ contient les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs. Il est facile de vérifier qu'elle contient les combinaisons linéaires de tout couple de vecteurs de $P$ .*

Généralisons cet exemple.

**Définition 2.7.** *Soient $u_i$ , $i = 1 \dots m$ , des vecteurs de $F$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ . On appelle sous-espace (vectoriel) engendré par les $u_i$ $(i = 1, \dots, m)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_i$ . C'est un sous-espace vectoriel de $F$ . On le note parfois $F =< u_1, \dots, u_m >$ .*

Vérification. Il convient donc de vérifier que, si $w = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$ et $w' = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$ sont deux combinaisons linéaires des vecteurs $u_i$, $\lambda w + \mu w'$ est encore une combinaison linéaire des $u_i$ . or

$$\lambda w + \mu w' = \lambda(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i) + \mu(\sum_{i=1}^{m} b_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_i + \mu b_i) u_i\ .$$

**Définition 2.8.** *On dira que le système de vecteurs $u_i$ $(i = 1 \dots m)$ de $\mathbb{R}^n$ est générateur du sous-espace vectoriel $F$ si et seulement si $F =< u_1, \dots, u_m >$ .*

Nous allons enfin donner la notion de système de vecteurs indépendants (ou système libre de vecteurs).

**Définition 2.9.** *Soient $u_i$ $(i = 1, \dots, m)$ une famille de $m$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ . On dit que ces vecteurs sont indépendants ou qu'ils forment un système libre de vecteurs si la seule combinaison linéaire de ces $m$ vecteurs qui soit nulle est la combinaison linéaire triviale :*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\},\ \lambda_i = 0\ .$$

**Remarque 2.10.** *On remarquera qu'un système est libre si et seulement si*

$$\exists i \in \{1, \dots, m\};\ \lambda_i \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \neq 0$$

*ou encore*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\},\ \lambda_i = 0$$

**Définition 2.11.** *Soient $u_i$ $(i = 1, \dots, m)$ une famille de $m$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ . Soit $F$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_i$ . Si les $u_i$ forment un système libre, on dira qu'ils forment une base de $F$ .*

**Exemple 2.12.** *Examinons deux cas particuliers.*

— *Prenons un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formé par un seul vecteur $u$ . Soit il est nul et toute combinaison linéaire (même non triviale) est nulle. Soit il est non nul et l'on a immédiatement : $au = 0 \Rightarrow a = 0$ . Un vecteur non nul est donc libre.*

— *Prenons alors un système formé de deux vecteurs $u$ et $v$ de $\mathbb{R}^n$ . Supposons que la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ soit nulle et qu'elle soit non triviale. Quitte à échanger $u$ et $v$ , on peut donc supposer que (par exemple) $\mu$ est non nul. Alors*

$$\lambda u + \mu v = 0,\ \mu \neq 0 \Rightarrow v = -\frac{\lambda}{\mu} u\ .$$

*On dit alors que $v$ est colinéaire à $u$ ; donc deux vecteurs $u$ et $v$ sont indépendants si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.*

— *Notons cependant qu'il ne faut pas généraliser l'exemple précédent. Les trois vecteurs*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*ont une somme nulle (ils ne sont pas indépendants) SANS être colinéaires deux à deux.*

— *Notons qu'il en est de même des trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par $e_1$ , $e_2$ et $e_1 + e_2$ . Ils sont libres deux à deux (donc non proportionnels deux à deux) mais forment un système de trois vecteurs lié.*

**Exemple 2.13.** *Nous avons introduit les vecteurs canoniques $e_i$ de $\mathbb{R}^n$ . Il n'est pas difficile de vérifier que, par définition de $\mathbb{R}^n$ , ils forment une base de $\mathbb{R}^n$ . On parle de la base canonique.*

**Exemple 2.14.** *(Formules de linéarisation) On se souvient que les fonctions $\cos(x)^2$ et $\sin(x)^2$ s'expriment de façon "linéaire" en $\cos(2x)$ . Plus exactement elles sont combinaison linéaires des fonctions $\cos(2x)$ et $1$ :*

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} \text{ et } \sin(x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\ .$$

*On a bien entendu des formules analogues pour $\cos(x)^3$ et $\sin(x)^3$ :*

$$\cos(x)^3 = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) \text{ et } \sin(x)^3 = \frac{1}{4}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)$$

*dont l'interprétation en termes de combinaison linéaire est simple.*

**Proposition 2.15.** *Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ . Alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ .*

Démonstration. Soient $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires. Soient $u$ et $v$ deux vecteurs de $F_1 \cap F_2$ . Alors la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ est élément de $F_1$ (puisqu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel) et de $F_2$ (de même). Donc elle appartient bien à $F_1 \cap F_2$ .

**Remarque 2.16.** *Nous verrons en exercice que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.*

**Définition 2.17.** *Soient $F_1$ (resp. $F_2$) deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ . On note $F_1 + F_2$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de $F_1$ et de $F_2$ .*

**Exemple 2.18.** *Soient $F_1 = \mathbb{R}e_1$ et $F_2 = \mathbb{R}e_2$ où $e_1$ , resp. $e_2$ , sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ . Alors $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^2$ . Mais $F_1 + F_1 = F_1$ .*

**Définition 2.19.** *Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ . On dit que $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ si leur intersection est réduite à $\{0\}$ et leur somme est $\mathbb{R}^n$ . On note alors $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$ . Lorsque $F_1$ et $F_2$ ont seulement leur intersection réduite à $\{0\}$ , on dira que $F_1$ et $F_2$ sont en somme directe. On notera de même $F_1 \oplus F_2$ le sous-espace qu'ils engendrent (sous-espace de $\mathbb{R}^n$).*

**Exemple 2.20.** *Soient* $F_1 = \mathbb{R}e_1$ *et* $F_2 = \mathbb{R}e_2$ *où* $e_1$ *, resp.* $e_2$ *, sont les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *. Alors* $F_1$ *et* $F_2$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^2$ *.*

**Exemple 2.21.** *Nous avons introduit plus haut le sous-espace vectoriel* $H$ *de* $\mathbb{R}^n$ *formé des vecteurs* $u$ *tels que* $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ *. Alors*

$$\mathbb{R}^n = H \oplus \mathbb{R}e_1 \ .$$