Algèbre et analyse élémentaires II
Algèbre linéaire
Notion de dimension.

1 Notion de dimension. Bases.

Le résultat qui suit est simple mais fondamental.

Remarque. *Nous avons défini la notion de système de vecteurs libre (ou indépendant) et de système de vecteurs lié (ou dépendant). Notons que tout système extrait d'un système libre est libre mais que tout système dont une partie forme un système lié est lié. Autrement dit un sous-système d'un système libre est libre. Un sur-système d'un système lié est lié.*

Proposition 1.1. *Soient u_j $(j = 1, \dots, r)$ des vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^n$. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Si le système $(u_1, \dots, u_m, v)$ n'est pas libre, alors v est une combinaison linéaire des vecteurs u_j .*

Démonstration. Prenons une combinaison linéaire non triviale du système $(u_1, \dots, u_m, v)$ et supposons qu'elle soit nulle soit $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j + \mu v = 0$. Si μ était nul, alors on aurait $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j = 0$. Or les u_j forment un système libre, donc cela impliquerait que tous les λ_j seraient nuls. Or l'un au moins des μ et des λ_j doit être non nul. Donc μ ne peut être nul. Dans ces conditions on a :

$$v = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\mu}\ u_j\ .$$

Corollaire 1.2. *Soient u_j $(j = 1, \dots, r)$ des vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^n$. Soient v_h $(h = 1, \dots, l)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si le système $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_l)$ n'est pas libre, alors l'un des $v_h, h = 1, \dots, l$ est une combinaison linéaire des vecteurs u_j et des autres v_h .*

Démonstration. Prenons une combinaison linéaire non triviale du système $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_l)$ et supposons qu'elle soit nulle soit $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j + \sum_{h=1}^{l} \mu_h v_h = 0$. Si tous les μ_h étaient nuls, alors on aurait $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j = 0$. Or les u_j forment un système libre, donc cela impliquerait que tous les λ_j seraient nuls. Or l'un au moins des μ_h et des λ_j doit être non nul. Donc tous les μ_h ne peuvent être nuls. Dans ces conditions on a :

$$v_{h_0} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\mu_{h_0}}\ u_j - \sum_{h=1, h\neq h_0}^{m} \frac{\mu_h}{\mu_{h_0}}\ v_h\ .$$

Théorème 1. *Théorème de la base incomplète. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soient $\{u_1, \dots, u_r\}$ $(j = 1 \dots r)$ un système libre de vecteurs de F et $\{v_1, \dots, v_m\}$ $(i = 1 \dots m)$ un système générateur de F . Alors il est possible de compléter le système $\{u_1, \dots, u_r\}$ $(j = 1 \dots r)$ par (certains) des vecteurs v_j de façon à obtenir un système libre et générateur de F .*

On a donc un sous-espace vectoriel F de l'espace $\mathbb{R}^n$ et $\{u_1, \dots, u_r\},\ j = 1 \dots r$ un système libre de vecteurs de F . Considérons le nombre m_0 de vecteurs v_j non engendrés par les u_i . Soit il est nul ce qui signifie que tous les vecteurs v_j sont combinaison linéaire des u_i et donc que le sous-espace H de F engendré par les u_i est égal à F et on a trouvé un système libre et générateur de F .

Soit il existe des vecteurs v_i non engendrés par les u_i et le sous-espace engendré par les u_i est strictement plus petit que F . Montrons par récurrence (descendante) sur le cardinal l de vecteurs v_j non engendrés par les u_i que l'on peut compléter les vecteurs u_i , par des vecteurs v_i de façon à obtenir un système libre et générateur de F .

Les vecteurs $\{v_1, \dots, v_m\},\ i = 1 \dots m$ sont générateurs de F . Alors, si m_0 est non nul, l'un des vecteurs v_j n'est donc pas engendré par les u_i . Notons $u_{r+1} = v_m$ un tel vecteur. D'après la proposition précédente, le système $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1} = v_m)$ est alors libre. Nous avons donc construit un système de $r+1$ vecteurs libres dans F de façon à ce que le nombre de vecteurs v_i non engendrés par les u_i ait diminué d'au moins une unité.

Formalisons alors le raisonnement par récurrence. Appelons $\mathcal{P}_l$ la propriété suivante : il existe l vecteurs extraits du système $\{v_1, \dots, v_m\},\ i = 1 \dots m$ générateur de F tels que le système $\{u_1, \dots, u_{r+l}\},\ j = 1 \dots r+l$ qu'ils forment avec les $\{u_1, \dots, u_r\},\ j = 1 \dots r$ soit libre. Et le nombre m_l de vecteurs v_j non engendrés par les $\{u_1, \dots, u_{r+l}\},\ j = 1 \dots r+l$ vérifie $0 \leq m_l < m_{l-1}$ soit $0 \leq m_l \leq m - l$.

Si m_l n'est pas nul, nous savons qu'il existe au moins un vecteur v_j qui n'est pas engendré par les u_i $(1 \leq i \leq r+l)$. On le note u_{r+l+1} et le système $\{u_1, \dots, u_{r+l+1}\},\ j = 1 \dots r+l+1$ est alors nécessairement libre et $m_{l+1} \leq m_l - 1 < m_l$. Bref tant que m_l n'est pas nul, on a $\mathcal{P}_l \Rightarrow \mathcal{P}_{l+1}$. D'où notre théorème puisque la suite m_l est une suite d'entiers strictement décroissante.

Remarque. *On notera que le raisonnement fonctionne si l'ensemble des u_i est vide (pourvu que F ne soit pas réduit à $\{0\}$).*

En effet, si F n'est pas réduit à $\{0\}$, l'un au moins des v_j n'est pas nul et peut donc être choisi comme vecteur composant un premier système libre dans F (réduit à un élément).

Exemple 1.3. *Dans $\mathbb{R}^3$ considérons le système $\{u_1\}$ où $u_1 = (1,1,0) = e_1+e_2$ et le système $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ où $v_1 = (1,-1,0),\ v_2 = (1,0,0),\ v_3 = (1,1,1),\ v_4 = (1,0,-1)$.*

Le vecteur u_1 est non nul donc il forme un système libre. Par ailleurs, si l'on introduit le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs v_j $(j = 1, \dots, 4)$, on constate facilement que $u_1 = 2v_2 - v_1$ et il appartient donc à F . Appliquons alors le raisonnement de la démonstration précédente. Aucun des vecteurs v_j n'est colinéaire à u_1 ; par conséquent chacun des systèmes $\{u_1, v_j\}$ $(j = 1, \dots, 4)$ est libre.

Prenons donc par exemple le système $\{u_1, v_2\}$ et cherchons à le compléter. On ne peut prendre le vecteur v_1 puisque $v_1 = 2v_2 - u_1$. Par contre les vecteurs v_3 ou v_4 ne peuvent être engendrés par le système $\{u_1, v_2\}$ (ces derniers vecteurs ont une troisième composante nulle au contraire des deux vecteurs v_3 ou v_4). On peut donc choisir l'un ou l'autre de ces deux derniers vecteurs pour compléter le système $\{u_1, v_2\}$.

Prenons donc par exemple $\{u_1, v_2, v_3\}$. Ce système est libre. Enfin le vecteur v_4 vérifie $v_4 = -v_3 + u_1 + v_2$. Bref F est engendré par le système (libre) $\{u_1, v_2, v_3\}$.

Proposition 1.4. *Soit une famille v_j $(j = 1, \dots, m)$ de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'ils sont tous combinaison linéaire des r vecteurs u_i $(i = 1, \dots, r)$ de $\mathbb{R}^n$ où $r < m$. Alors la famille des v_j ne peut être libre.*

Démonstration (1). On va travailler par récurrence sur l'entier m. Si $m = 2$ alors les deux vecteurs v_1 et v_2 sont combinaison linéaire d'au plus un vecteur u_1 (puisque $r < 2$). On a donc $v_1 = \lambda_1 u_1$ et $v_2 = \lambda_2 u_1$ soit $\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 = 0$. Bref nos deux vecteurs sont tous deux nuls ou bien il existe une combinaison linéaire non triviale les liant (si λ_1 et λ_2 sont tous deux nuls, c'est que les deux vecteurs initiaux sont nuls).

Supposons avoir démontré le résultat cherché pour toutes les familles de vecteurs de cardinal m . Soit une famille v_j $(j = 1, \dots, m+1)$ de $m+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'ils s'expriment comme combinaison linéaire de r vecteurs u_i $(i = 1, \dots, r+1)$ de $\mathbb{R}^n$ où $r+1 < m+1$. On a donc

$$v_j = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i^j u_i \ .$$

Regardons alors les λ_j^{r+1}, coefficients relatifs au vecteur u_{r+1} . Ces coefficients peuvent être tous nuls. Alors cela signifie que notre famille est formée de combinaison linéaire des r vecteurs u_i $(i = 1, \dots, r)$. Les m premiers vecteurs v_j sont donc combinaison linéaire de r vecteurs (où $r < m$) et ils forment donc un système qui ne peut être libre. A fortiori la famille initiale ne peut l'être (puisqu'elle contient une sous-famille liée).

Reste le cas où l'un des coefficients λ_j^{r+1} n'est pas nul. Quitte à renuméroter les v_j, on peut supposer que $\lambda_{r+1}^{m+1} \neq 0$. Regardons la famille des m vecteurs $v'_j = v_j - \frac{\lambda_j^{r+1}}{\lambda_{r+1}^{m+1}} v_{m+1}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Par construction, ils s'expriment comme combinaison linéaire des r vecteurs u_i $(i = 1, \ldots, r)$. Comme $r < m$, ils ne peuvent être libres. Il existe donc une combinaison linéaire nulle non triviale

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v'_j = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j - \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\lambda_j^{r+1}}{\lambda_{r+1}^{m+1}} \right) v_{m+1}$$

ce qui donne une combinaison linéaire nulle non triviale des $m+1$ vecteurs v_j .

Démonstration (2). On va s'autoriser d'utiliser les résultats issus de la résolution des systèmes linéaires. Prenons donc une combinaison linéaire des m vecteurs v_j dont on suppose qu'elle soit nulle. On a donc

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = 0 \ .$$

Mais on a

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \ v_j = \sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} u_k \ .$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} u_k \right) = 0$$

soit encore

$$\sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_{jk} \right) u_k \ .$$

Or le système d'équations

$$\begin{cases} \mu_{11}\lambda_1 & + & \ldots & + & \mu_{m1}\lambda_m & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \mu_{1r}\lambda_1 & + & \ldots & + & \mu_{mr}\lambda_m & = & 0 \end{cases}$$

comporte r équations pour m variables (où $m > r$). Dans ce cas, on sait il existe une infinité de solutions (à $m - r$ paramètres) et donc des solutions non triviales.

Théorème 2. *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Alors tout système libre est formé d'au plus n vecteurs. Tout système générateur de $\mathbb{R}^n$ admet au moins n vecteurs. Toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ ont pour cardinal n . On dira que $\mathbb{R}^n$ est de dimension n .*

Démonstration. Nous avons vu que $\mathbb{R}^n$ était engendré par les vecteurs canoniques et que ceux-ci formaient un système libre (donc une base de $\mathbb{R}^n$). Tout système de vecteurs ayant strictement plus de n vecteurs est formé de vecteurs combinaison linéaires des e_i et ne peut donc être libre. Inversement s'il existait une base de $\mathbb{R}^n$ ayant strictement moins de n vecteurs, le système des vecteurs canoniques ne pourrait être libre.

Plus généralement on a.

Théorème 3. *Soit E un espace vectoriel. On suppose qu'il admet un système fini de vecteurs générateurs. Alors E admet au moins une base. Deux bases (système libre et générateur) de E ont le même cardinal. On appelle dimension de E ce cardinal. On dit que E est de dimension finie. Plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel de E , engendré par un système fini de générateurs, on appelle dimension de F le cardinal d'une système libre et générateur de F.*

Vérification. Soient $\{v_1, \ldots, v_m\},\ i = 1 \ldots m$, et $\{u_1, \ldots, u_r\},\ j = 1 \ldots r$ deux bases de E . Alors on a $r = m$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $r < m$. Alors nous aurions un système libre de m vecteurs v_i qui s'exprimeraient comme des combinaisons linéaires d'une famile de r vecteurs ce qui est exclu d'après la proposition 0.0 ci-dessus.

Remarque 1.5. *Ce résultat est tout à fait fondamental. Il montre que les systèmes libres sont les plus "efficaces" pour engendrer un sous-espace vectoriel.*

Corollaire 1.6. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension r de $\mathbb{R}^n$ (ou de E). Alors tout système libre de vecteurs de F de cardinal strictement inférieur à r ne peut être générateur de F . De même, tout système générateur de vecteurs de F de cardinal strictement supérieur à r ne peut être libre. Tout système libre de vecteurs de F de cardinal égal à r est générateur de F . De même, tout système générateur de vecteurs de F de cardinal égal à r est libre.*

Exemple 1.7. *L'espace des fonctions polynomiales réelles de degré au plus n est de dimension finie $n + 1$. L'espace des fonctions polynomiales réelles n'est pas de dimension finie. En effet s'il était de dimension finie, il serait engendré par un nombre fini de fonctions polynomiales et il y aurait donc un degré maximal à toute fonction polynomiale.*

Par ailleurs, nous avons montré le résultat suivant (par le théorème de la base incomplète).

Proposition 1.8. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (ou de E). De tout système générateur de F, il est possible d'extraire une base de F . Tout espace vectoriel admettant un système générateur fini admet au moins une base.*

Définition 1.9. *Soit $\{v_1, \ldots, v_s\}$ un système de vecteurs. On appelle rang de ce système la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.*

Corollaire 1.10. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (ou de E) de dimension finie . Sa dimension est plus petite que celle de $\mathbb{R}^n$ (ou de E). Plus généralement si G et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (ou de E) et que $G \subset F$, alors $\dim(G) \leq \dim(F)$.*

Démonstration. $\mathbb{R}^n$ (ou E) admet un système libre et générateur de dimension n ou $\dim(E)$. Tout système de vecteurs de cardinal supérieur ne peut être libre d'après la proposition. Donc F ne peut être de dimension supérieure à n ou $\dim(E)$.

Corollaire 1.11. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (ou de E). On suppose que $G \subset F$. Alors $\dim(G) \leq \dim(F) \leq n$ ou $\dim(E)$ et , si $\dim(G) = \dim(F)$, on a $G = F$.*

Démonstration. Le lecteur attentif vérifiera que F ou G sont nécessairement de type fini. Prenons une base de G . C'est un système libre de G donc de F (ou de E). La dimension de F majore donc ce cardinal. Et s'il a pour cardinal, la dimension de F , on en déduit qu'il engendre F . Donc $G = F$.

Définition 1.12. *On appelle droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ (ou de E) tout sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^n$ (ou de E . Il admet pour base n'importe lequel de ses vecteurs non nuls. On appelle hyperplan de $\mathbb{R}^n$ (ou de E) tout sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ (ou $\mathrm{Dim}(E) - 1$).*

Vérification. Comme D est de dimension 1, il contient au moins un vecteur non nul u ! Soit v un autre vecteur. Alors le système (u, v) est lié (sinon D serait de dimension au moins 2). D'après un résultat vu plus haut, v est colinéaire à u . On a donc $D = \mathbb{R}u$.

Proposition 1.13. *Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ (ou de E). Alors toute droite vectorielle D non contenue dans H est un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^n$ (ou E). On a*

$$D \oplus H = \mathbb{R}^n \text{ (ou } \dim(E) \text{ .}$$

Démonstration. Comme $D \not\subset H$, $D \cap H = \{0\}$. Les deux sous-espaces sont donc en somme directe. Si l'on ajoute à une base de H , un vecteur non non nul de D , on obtient un système libre de cardinal n (ou $\dim(E)$. Il engendre donc $\mathbb{R}^n$ (ou E) et $\mathbb{R}^n = D \oplus H$ (ou $E = D \oplus H$).

Théorème 4. *(existence et unicité des coordonnées) Soit u_i, $i = 1, \ldots, n$ une base de $\mathbb{R}^n$ (ou de E espace vectoriel de dimension n où $n \geq 1$). Alors tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$ (ou de E) s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire des u_i :*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

et les λ_i sont appelées coordonnées du vecteur u dans la base u_i, $i = 1, \ldots, n$. Elles sont donc uniques, une base étant donnée.

Démonstration. Le système formé des $n+1$ vecteurs u_i et du vecteur u ne peut être libre puisqu'il engendre $\mathbb{R}^n$ (ou E) et que celui-ci est de dimension n . Il est donc lié. D'après une proposition rappelée ci-dessus, le vecteur u est donc une combinaison linéaire des u_i (puisqu'ils sont libres). D'où l'existence de la combinaison linéaire.

Imaginons que u s'exprime de deux façons différentes :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \ .$$

Alors

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) u_i \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \lambda_i = \mu_i$$

puisque les u_i sont libres. Ainsi la combinaison linéaire est unique.

Proposition 1.14. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans E espace vectoriel de dimension finie). Alors on a*

$$n \text{ ou } \mathrm{Dim}(E) \ = \mathrm{Dim}(F_1) + \mathrm{Dim}(F_2) \ .$$

Démonstration. Posons $n_i = \mathrm{Dim}(F_i)$ pour $i = 1, 2$. Soit $\{f_1, \ldots, f_{n_1}\}$ (resp. $\{g_1, \ldots, g_{n_2}\}$) une base de F_1 (resp. de F_2). Comme tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ (ou de E) s'écrit comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 , on voit que le système $\{f_1, \ldots, f_{n_1}\} \cup \{g_1, \ldots, g_{n_2}\}$ est un système générateur de $\mathbb{R}^n$ (ou de E). Il suffit , pour démontrer le résultat cherché, de démonter qu'il s'agit d'un système libre. Prenons donc une combinaison linéaire nulle

$$\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j g_j = 0 \ .$$

On voit donc que le vecteur $\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i f_i = -\left(\sum_{j=1}^{n_2} \mu_j g_j\right)$ est un vecteur de $F_1 \cap F_2$ donc est nul. Par définition d'un système libre, cela signifie que les deux combinaisons linéaires sont triviales c'est à dire que les λ_i et les μ_j sont tous nuls.

La réunion d'une base de F_1 et d'une base de F_2 est donc une base de $\mathbb{R}^n$ (ou de E).

2 Systèmes libres, générateurs, bases, dimension et systèmes linéaires.

Systèmes linéaires et systèmes de vecteurs indépendants ou générateurs.

Proposition 2.1. *Soit $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel de dimension n . Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soient u_j $(j = 1, \ldots, m)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et notons $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i$. Alors on a les équivalences suivantes :*

— *(a) Les vecteurs u_j $(j = 1, \ldots, m)$ forment un système libre.*

— *(b) Le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{1j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{nj} = 0 \end{cases}$$

admet exactement une et seule solution : la solution nulle.

— *(c) Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs u_j $(j = 1, \ldots, m)$. Le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{1j} = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{nj} = b_n \end{cases}$$

admet exactement une et une seule solution.

Démonstration.

$(a) \Leftrightarrow (b)$ Il s'agit de la définition des systèmes libres puisque la seule combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ nulle doit être triviale.

$(b) \Leftrightarrow (c)$. Il s'agit juste d'exprimer qu'un système libre et générateur est une base du sous-espace que ce système engendre.

On retrouve le fait que, d'après l'étude des systèmes, le système (homogène ou non) doit être de rang $r = m \leq n$ pour satisfaire l'une ou l'autre des propriétés (b) ou (c) puisque leur rang ne dépend pas du second membre.

Proposition 2.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de E . Soient u_j $(j = 1, \ldots, m)$ des vecteurs de E et notons $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i$. Soit b un vecteur de E . Il est engendré par les vecteurs u_j $(j = 1, \ldots, m)$ si et seulement si le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{1j} = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{nj} = b_n \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Remarque 2.3. *On retiendra le fait que la donnée d'une base d'un espace vectoriel E permet de ramener l'étude de systèmes libres ou générateurs à l'étude de systèmes linéaires.*

Définition 2.4. *Soit $\{v_1, \ldots, v_m\}$ un système de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note F le sous-espace vectoriel engendré. Alors on appelle rang du système de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_m\}$ la dimension de F .*

Proposition 2.5. *Soit $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel réel et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{v_1, \ldots, v_m\}$ un système de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors le rang du système d'équation associé à ce système de vecteurs est exactement égal au rang du système de vecteurs.*

Représentations paramétriques. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $(v_1, \ldots, v_m)$ un système générateur de F . Soit $(u_1, \ldots, u_r)$ une base de F . On a donc $m \geq r$. Alors un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ appartient à F si et seulement si il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ des paramètres réels tels que

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

ou s'il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ des paramètres réels tels que

$$u = \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i \ .$$

Notons que les paramètres $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ sont alors uniques.

On parle de représentation paramétrique de F . On remarquera que la représentation paramétrique la plus efficace (celle qui nécessite le moins de paramètres) est celle qui est associé à une base de F .

Exemple 2.6. *Soit F une droite de $\mathbb{R}^n$. Alors une représentation paramétrique de F est de la forme $(tu_1, \ldots, tu_n)$ où $u = (u_1, \ldots, u_n)$ est un vecteur non nul quelconque de F et t un paramètre réel.*

Remarque 2.7. *Cette façon de décrire un sous-espace est efficace pour donner une description exhaustive des éléments de F . Elle n'est pas commode pour déterminer si un vecteur donné appartient ou non à ce sous-espace (puisque l'on doit alors résoudre un système linéaire pour le savoir comme on vient de le voir). Or résoudre un système linéaire, suppose avoir choisi une base de l'espace E et écrire tous les vecteurs considérés en coordonnées.*

Systèmes d'équations d'un sous-espace. Soit E un espace vectoriel de dimension n . On suppose avoir choisi une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E . Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(v_1, \ldots, v_m)$ un système générateur de F (respectivement $(u_1, \ldots, u_r)$ une base de F). Alors le vecteur w de E appartient à F si et seulement si le système linéaire $w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ (respectivement $w = \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i$) admet des solutions. Un tel système (admettant n lignes et m , respectivement r , colonnes) a un rang r' et, un fois échelonné, est équivalent à un système où figurent $n - r'$ équations de compatibilités et r' équations permettant d'exprimer r' variables λ_i (resp. μ_i) en fonction des $m - r'$ (respectivement $r - r'$ variables μ_i) autres variables.

Le vecteur w appartient à F si et seulement si ses coordonnées satisfont les équations de compatibilité. On dira qu'elles forment un système d'équations de F .

Si l'on suppose être parti d'une base de F , on notera que le système doit vérifier que, lorsque les équations de compatibilité sont satisfaites, le système admet une et une seule solution (puisqu'un vecteur de F admet un système unique de coordonnées). Cela impose donc à r' d'être égal à r . Un sous-espace vectoriel F de dimension r dans $\mathbb{R}^n$ admet donc un système de $n - r$ équations.

Plus généralement, partons d'un simple système générateur de m vecteurs. On a vu plus haut par récurrence que, de tout système générateur de F , on pouvait extraire r vecteurs libres. Or, quitte à changer l'ordre de ce système de vecteurs, on peut supposer que ce sont les r premiers vecteurs qui sont libres. Dans ce cas, on sait que le système, une fois échelonné, sera de rang $r' = r$; la résolution du système permet de trouver des relations entre les vecteurs générateurs ainsi que des équations de compatibilité (au nombre de $n - r$).

Exemple 2.8. *Reprenons un exemple traité plus haut. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4 et $(f_1, \ldots, f_4)$ une base de E . On introduit les 5 vecteurs suivants :*

$$u_1 = \begin{pmatrix} f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } u_5 = \begin{pmatrix} f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Nous allons chercher quand le vecteur $u = af_1 + b + f_2 + cf_3 + df_4$ *de* E *appartient au sous-espace engendré par les* 5 *vecteurs suivants :* $u_1, \ u_2, \ u_3, \ u_4, \ u_5$ *. En nous ramenant aux coordonnées sur la base, cela donne le système*

$$\begin{cases} x + y + 3t + u &= a \\ x - 3z - u &= b \\ y + 2z + 2t + u &= c \\ y + 2z + 2t + u &= d \end{cases} .$$

Si l'on applique le pivot, on voit qu'il est moins fatiguant d'intervertir les deux premières équations et donc de reporter l'égalité $x = 3z + u + b$ *dans les quatre autres équations :*

$$\begin{cases} x &= 3z + u + b \\ y + 3z + 3t + 2u &= a - b \\ y + 2z + 2t + u &= c \\ y + 2z + 2t + u &= d \end{cases} .$$

Là encore il saute aux yeux que les deux dernières équations ont le même premier membre :

$$\begin{cases} x &= 3z + u + b \\ y &= -2z - 2t - u + c \\ z + t + u &= a - b - c \\ 0 &= d - c \end{cases} .$$

Le système est échelonné. Il est donc de rang 3 *. Soit* $c = d$ *et le vecteur* (a, b, c, c) *appartient à l'espace engendré (il y a des solutions). Soit* $c \neq d$ *et le vecteur considéré n'appartient pas à l'espace engendré.*

L'équation $c - d = 0$ *définit donc l'espace engendré par les vecteurs* $u_1, \ u_2, \ u_3, \ u_4, \ u_5$ *. C'est un hyperplan de* $\mathbb{R}^4$ *.*

Base d'un sous-espace vectoriel donné par ses équations. Supposons enfin disposer d'une sous-espace vectoriel F défini par s équations. Soit

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{sj} x_j &= 0 \end{cases} .$$

Ce système peut être échelonné ; il est alors de rang $r \leq s$. On dira que les équations de F sont indépendantes si le système de départ est de rang $r = s$.

Nous supposerons donc désormais que le système d'équations définissant F est formé de r équations indépendantes (donc il est de rang r) échelonnées. D'après l'examen de la résolution des systèmes, cela signifie donc que r des coordonnées des vecteurs de F s'expriment en fonction des $n - r$ autres. Cela introduit $n - r$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont générateurs de F. On a remarqué très tôt que ces vecteurs sont nécessairement libres. Nous avons ainsi obtenu une base de F .

Proposition. *Un sous-espace vectoriel* F *de dimension* r *de* $\mathbb{R}^n$ *admet donc des bases (systèmes libres et générateurs) de* r *vecteurs et peut être défini par des systèmes d'équations (indépendantes) comprenant* $n - r$ *équations.*

Exemple. *Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Alors $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$ c'est à dire que tout vecteur de H s'écrit*

$$x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs ainsi introduits forment une base de H qui est donc de dimension 3 .

Définition. *On appelle hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tous sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Il peut donc être défini par une unique équation de la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ où les a_i ne sont pas tous nuls.*

Exemple. *Soit H_1 l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Soit H_2 celui défini par l'équation $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Soit P le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ intersection de ces deux hyperplans . Cherchons en une base.*

Si l'on échelonne le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{cases} x_1 & = & -x_2 - x_3 - x_4 \\ -2x_2 - 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & -x_4 \end{cases} .$$

L'espace P admet donc comme base les vecteurs $(-1,0,1,0)$ et $(0,-1,0,1)$. Il est de dimension 2 .

Remarque 2.9. *Soient H_1 et H_2 deux hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension n . Lorsque l'on connait l'équation*

$$\mathrm{Dim}(H_1) + \mathrm{Dim}(H_1) = \mathrm{Dim}(H_1 + H_2) + \mathrm{Dim}(H_1 \cap H_2) \ ,$$

on voit que l'on a deux cas.

- *soit $H_1 = H_2$ et $H_1 \cap H_2 = H_1 = H_2 = H_1 + H_2$;*
- *soit $H_1 \neq H_2$ et $H_1 + H_2 = E$ d'où $\mathrm{Dim}(H_1 \cap H_2) = 2(n-1) - n = n-2$.*

Exemple 2.10. *Soient D_1 et D_2 deux droites de $\mathbb{R}^2$. Soient elles sont identiques soit, si elles sont distinctes, leur intersection est réduite à $\{0\}$. Elles sont donc supplémentaires et $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$.*