Algèbre et analyse élémentaires II
Algèbre linéaire
Calcul matriciel

Nous avons introduit les matrices pour simplifier les notations d'écriture des systèmes linéaires. Mais cet outil est plus riche que cette simple utilisation.

1 Matrices. Propriétés. Exemples.

Nous allons, dans le paragraphe suivant, donner les principales propriétés des matrices.

Définition 1.1. *Rappel. Soient n et m deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice (à n lignes et m colonnes) la donnée d'un tableau de $n \times m$ scalaires*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} .$$

On note $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices. Lorsque $n = m$, on parle de matrice carrée d'ordre n et on en note $\mathcal{M}(n; \mathbb{R})$ l'ensemble.

Remarque 1.2. *Soit A une matrice ayant n lignes et m colonnes. Soit X une matrice ayant m lignes et une unique colonne (matrice colonne). On a défini le produit de M par X en posant $Y = AX$ où Y est une matrice colonne ayant n lignes définie par*

$$1 \leq h \leq n \ ; \ y_h = \sum_{j=1}^{m} a_{h,j} x_j \ .$$

Proposition 1.3. *Soit X une matrice colonne ayant m lignes. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{R})$. Alors on a*

$$\forall X \in \mathcal{M}(n, 1; \mathbb{R}) \ ; \ AX = BX \Rightarrow A = B \ .$$

Démonstration. Il suffit de prendre pour X le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne j qui vaut 1 . Alors on voit que l'égalité $AX = BX$ pour ce vecteur, entraîne l'égalité des colonnes d'indice j de A et de B . Comme cela est vrai quelque soit j où $1 \leq j \leq n$, on voit que $A = B$.

Définition 1.4. *On appelle matrice nulle la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On appelle matrice identité la matrice carrée dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, les autres coefficients étant nuls. Pour tout couple d'indices (i, j) ($i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$), on pourra introduire la matrice E_{ij} dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1 .*

Définition 1.5. *On dira que la matrice carrée est diagonale si tous les coefficients sont nuls à l'exception éventuelle des coefficients ayant le même indice de ligne et de colonne (coefficients diagonaux).*

$$D = (d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

On dira que la matrice carrée est scalaire si tous les coefficients sont nuls à l'exception éventuelle des coefficients diagonaux, tous égaux au scalaire λ).

$$D = (\lambda, \ldots, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On dira que la matrice carrée est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si tous les coefficients situés en dessous (resp. en dessus) de la diagonale sont nuls.

$$T^+ = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2,n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \ldots & t_{3,n-1} & t_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.6. *Soient n et m deux entiers naturels. L'ensemble $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{R})$ des matrices ayant n lignes et m colonnes est un espace vectoriel de dimension nm s'identifiant naturellement à $\mathbb{R}^{nm}$.*

Les opérations d'addition des matrices (composante par composante) et de multiplication par un scalaire (toujours composante par composante) en font naturellement un espace vectoriel. On pourra noter que le système des matrices (canoniques) E_{ij} forme un système libre et générateur appelé base canonique de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Bref, si $M = (a_{i,j})_{i,j}$, on a

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} E_{i,j} \ .$$

Définition 1.7. *Soient n , m et p trois entiers naturels non nuls. Soit A une matrice ayant n lignes et m colonnes et B une matrice ayant m colonnes et p lignes. On définit le produit $C = AB$ des matrices A et B comme la matrice C ayant n lignes et p colonnes dont les colonnes sont les produits des lignes de M par les colonnes de N . En d'autres termes, les coefficients de la matrice $C = AB$ sont donnés par*

$$(i, k) \mapsto \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

où i est l'indice de la ligne et k l'indice de la colonne de la matrice produit et l'on vient de définir une multiplication de l'espace $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{R}) \times \mathcal{M}(m, p; \mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}(n, p; \mathbb{R})$ donnée par

$$A \times B = (a_{ij})_{i,j} \times (b_{jk})_{j,k} = (c_{ik})_{i,k} = C$$

où

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + \ldots + a_{im} b_{mk} \ .$$

Remarque 1.8. *On notera que cette multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition des matrices et même linéaire en B et linéaire en A (on parle de bilinéarité). On notera aussi que la multiplication par une matrice (carrée) scalaire coïncide avec la multiplication par ce même scalaire. On dit que l'espace $\mathcal{M}(n; \mathbb{R})$ est ainsi muni d'une structure d'algèbre (non commutative dès que $n \geq 2$).*

Remarque. *Si on regarde B comme m colonnes C_k juxtaposées (soit $B = (C_1 \dots C_m)$), on vérifie que AB est tout simplement la matrice dont les m colonnes sont les AC_i (au sens de la multiplication d'une matrice par une matrice colonne). Bref notre multiplication généralise bien la notion introduite précédemment.*

Proposition 1.9. *On a*

$$0B = 0\ ,\ A0 = 0\ ,\ \mathrm{Id}_m B = B\mathrm{Id}_p = B \text{ et } \mathrm{Id}_n A = A\mathrm{Id}_m = A\ .$$

Remarque 1.10 (ATTENTION 1)**.** *Le produit de deux matrices n'est en général pas commutatif ($n \geq 2$). Ainsi*

$$E_{1,2}E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$$

mais

$$E_{2,2}E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\ .$$

Remarque 1.11 (ATTENTION 2)**.** *Le produit de deux matrices chacune non nulle peut quand même être nul. C'est ce que l'on vient de voir avec l'exemple ci-dessus*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Bref l'équation $AB = 0$ ne signifie pas nécessairement que A ou B soient nulles !

Définition 1.12. *On dira qu'une matrice non nulle A est un diviseur de 0 dans $\mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ s'il existe une matrice non nulle B telle que $AB = 0$.*

2 Lien avec les opérations élémentaires.

Echange de deux lignes. On ne change pas les solutions d'un système en échangeant deux lignes d'un système. On ne change donc pas le rang de M en échangeant deux de ses lignes. Remarquons que la nouvelle matrice est obtenue par multiplication à gauche par la matrice

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \dots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où les seuls coefficients non nuls et égaux à 1 sont situés aux intersections des lignes d'indice i (resp. j) et colonnes d'indice j (resp. i).

Exemple. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Alors échanger les deux premières lignes revient à faire la multiplication suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Combinaison linéaire de ligne. On ne change pas le rang d'un système en ajoutant à une de ses lignes une combinaison linéaire des AUTRES lignes. Bref on peut remplacer $(L1, L2, \ldots)$ par $(L1, L2+\mu L1, \ldots)$. On ne change donc pas non plus le rang de la matrice associée. Remarquons de même que cette nouvelle matrice est obtenue en multipliant à gauche par la matrice suivante :

$$T_{ij}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & 1 & \ldots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \mu & \ldots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

où le coefficient μ est placé dans la colonne j et la ligne i ; les seuls autres coefficients non nuls étant des 1 sur la diagonale.

Exemple. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Alors ajouter la première ligne à la troisième ligne revient à faire la multiplication suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

On peut donc poursuivre par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut enfin poursuivre par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire. On ne change pas non plus le rang d'un système en multipliant une de ses équations par un scalaire non nul. On ne change donc pas non plus le rang de la matrice associée. Il suffit là encore de multiplier à gauche par la matrice adéquate :

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \mu & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

où le scalaire non nul λ est placé sur la ligne et la colonne d'indice i (donc sur la diagonale) ; les autres coefficients non nuls étant des 1 sur la diagonale.

Exemple. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Alors faire en sorte que les coefficients de début de ligne soient égaux à 1*, revient à faire la multiplication suivante :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on peut poursuivre par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On conclut donc que la matrice 3×4 *de cet exemple est de rang* 3 *puisque nous l'avons remplacée par une matrice échelonnée (de même rang) ayant trois lignes non nulles.*

3 Matrices inversibles.

Définition 3.1. *On dit que la matrice A carrée d'ordre n est inversible s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que*

$$AB = BA = \mathrm{Id_n} .$$

Remarque. *On notera qu'une matrice A qui est un diviseur de* 0 *, ne peut être inversible. En effet, si A est un diviseur de* 0 *, il existe B non nulle telle que $AB = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit inversible . Il existerait donc B' telle que*

$$AB' = B'A = \mathrm{Id_n} .$$

Calculons alors $B'AB$. Par associativité, $B'AB = B'(AB) = A'0 = 0$. Mais également $B'AB = (B'A)B = \mathrm{Id}_n B = B$. Nous aboutissons donc à une contradiction $B = 0$. Donc A ne peut être inversible.

Exemple. *Toutes les matrices élémentaires données plus haut sont inversibles. On a*

$$S_{ij}S_{ij} = \mathrm{Id_n} \ (i \neq j) \ , D_i(\lambda)D_i(1/\lambda) = D_i(1/\lambda)D_i(\lambda) = \mathrm{Id_n} \text{ et } T_{ij}(\mu)T_{ij}(-\mu) = T_{ij}(-\mu)T_{ij}(\mu) = \mathrm{Id_n}$$

Exemple. *Par contre les matrices canoniques E_{ij} sont en général des diviseurs de* 0 *. En effet on vérifie sans peine que*

$$E_{ij}E_{hk} = \begin{cases} E_{ik} & \text{si } j = h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 3.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E . Soit $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une autre base de E . Soit enfin P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ s'exprimant en fonction de la base $\mathcal{B}$. Alors P est une matrice inversible et son inverse est la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.*

Vérification. On sait que, si $v = (e_1, \ldots, e_n)X$ et $v = (f_1, \ldots, f_n)Y$ alors $X = PY$ (les "anciennes" coordonnées s'expriment en fonction des "nouvelles"). Si l'on échange les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a de même $Y = QX$ où Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Alors

$$X = PY = PQX \text{ et } Y = QX = QPY \ .$$

Ces indentités sont vraies quelque soit le vecteur v ou encore quelque soit les vecteurs colonnes X ou Y . Aussi

$$PQ = QP = \mathrm{Id}_n \ .$$

C'est ce que nous cherchions à démontrer.

Proposition 3.3. *Soit M un élément de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Soit r un entier alors il existe des matrices inversibles P carrée d'ordre n et Q carrée d'ordre m telles que*
- *P et Q sont des produits de matrices élémentaires (inversibles) ;*
- $PMQ = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$;

où le premier bloc admet r lignes et r colonnes. On appelle rang de la matrice M l'entier ainsi mis en évidence.

Vérification. A l'occasion de l'étude des systèmes linéaires, on a vu que l'on pouvait, par des opérations élémentaires, échelonner la matrice M . Quitte à multiplier M à gauche par des matrices élémentaires, on sait que l'on peut la ramener à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & * & \ldots & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

où les 1 apparaissent sur les r premières lignes et dans les colonnes $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. On va alors opérer sur les colonnes de cette matrice (en multipliant cette fois à droite par une matrice élémentaire). Tout d'abord quitte à échanger les colonnes 1 et j_1 , resp. r et j_r (par des matrices de permutation), on voit que l'on peut supposer que les coefficients 1 apparaissent dans les r premières colonnes. Soit

$$PM\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

où Σ est un produit de matrices de permutation. Il est alors simple de multiplier (à gauche par exemple) par une matrice élémentaire pour annuler les coefficients de la première ligne (au delà de la colonne 1) resp. de la i-ème ligne (au delà de la i-ème colonne). Et l'on trouve la forme cherchée.

Comment déterminer l'inverse d'une matrice ?

Soit donc une matrice carrée A . Nous allons donner deux méthodes pour déterminer si A est inversible et donner son inverse. Il s'agit soit de résoudre le système associé à cette matrice $AX = Y$ (quel que soit le vecteur colonne Y) soit d'échelonner la matrice $A' = (A|\mathrm{Id})$. Nous utiliserons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Premier exemple : résolvons le système $AX = Y$ où A est la première matrice, X est le vecteur colonne de coordonnées (x, y, z) et Y de coordonnées (a, b, c) .

$$\begin{cases} -2y + 3z & = & a \\ x - 3z & = & b \\ -x + 2y & = & c \end{cases}$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} x - 3z & = & b \\ -x + 2y & = & c \\ -2y + 3z & = & a \end{cases}$$

puis à

$$\begin{cases} x - 3z & = & b \\ 2y - 3z & = & b + c \\ -2y + 3z & = & a \end{cases}$$

puis à

$$\begin{cases} x - 3z & = & b \\ 2y - 3z & = & b + c \\ 0 & = & a + b + c \end{cases}$$

On voit donc que le système obtenu fait intervenir une équation de compatibilité. Le système n'admet donc de solutions que lorsque le vecteur colonne Y vérifie cette équation. Le système n'est donc pas de rang 3 . La matrice associée ne peut être de rang 3 donc n'est pas inversible.

Si l'on échelonne la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra remarquer que la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est, quant à elle, inversible (en suivant la même méthode).

Deuxième exemple : résolvons le système $BX = Y$ où B est la deuxième matrice, X est le vecteur colonne de coordonnées (x, y, z) et Y de coordonnées (a, b, c) .

$$\begin{cases} -2y + 4z & = & a \\ x + z & = & b \\ -x + 2y + z & = & c \end{cases}$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} x + z & = & b \\ -2y + 4z & = & a \\ -x + 2y + z & = & c \end{cases}$$

puis à

$$\begin{cases} x + z & = & b \\ -2y + 4z & = & a \\ 2y + 2z & = & b + c \end{cases}$$

puis à

$$\begin{cases} x + z & = & b \\ -2y + 4z & = & a \\ 6z & = & a + b + c \end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases} x & = & \frac{-a+5b-c}{6} \\ y & = & \frac{-a+2b+2c}{6} \\ z & = & \frac{a+b+c}{6} \end{cases}$$

La matrice inverse de B est donc

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Si l'on échelonne la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} .$$

Proposition 3.4. *Soit B une matrice inversible. Si l'on échelonne la matrice $(B|\mathrm{Id})$ (à l'aide d'opérations élémentaires) et que l'on obtient la matrice $(\mathrm{Id}|A)$, alors A est la matrice inverse de B .*

Démonstration. On a donc l'identité

$$(P_1P_2 \dots P_l M | P_1P_2 \dots P_l \mathrm{Id}) = (\mathrm{Id}|N)$$

soit

$$P_1P_2 \dots P_l M = \mathrm{Id} \text{ et } P_1P_2 \dots P_l = N \ .$$

Cela permet de conclure.

Remarque 3.5. *On a vérifié que A (carrée d'ordre n) était inversible si et seulement si son rang r était maximal c'est à dire égal à n .*

Définition 3.6. *On note $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles. Il s'agit d'un groupe (non commutatif dès que $n \geq 2$) pour la multiplication des matrices.*