Algèbre et analyse élémentaires II
Algèbre linéaire
Opérateurs linéaires

Nous allons commencer par définir cette notion générale (il s'agit d'étudier les applications entre espaces vectoriels qui "respectent" cette structure d'espace vectoriel).

1 Applications linéaires.

On se donne deux espaces vectoriels (réels) $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$. Rappelons que l'on appelle application f de E dans F le fait d'associer à tout vecteur u de E un vecteur v de F , noté en général $f(u)$.

Définition 1.1. *On dira que l'application f de E dans F est linéaire si l'image par f de toute combinaison linéaire est cette combinaison linéaire des images :*

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall(u_1, u_2) \in E^2 \ f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) \ .$$

On notera $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . On parle également d'opérateur linéaire ou de morphisme.

Exemple 1.2. *L'application nulle (qui à tout vecteur u de $\mathbb{R}^m$ associe le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$) est évidemment une application linéaire. L'application qui, au vecteur $u = (x, y)$ de R^2 associe le vecteur $f(u) = (x + y, x - y)$ de $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire de même que celle qui associe à ce vecteur de R^2 le vecteur $g(u) = (x + y, x, x - y, -y)$ de $\mathbb{R}^4$.*

Remarque 1.3. *On a immédiatement les propriétés suivantes :*

— *Pour toute application linéaire f de E dans F*

$$f(0) = 0 \ ;$$

En effet on a

$$\forall u \in E \ f(0_E) = f(0u) = 0f(u) = 0_F \ .$$

— *Pour toute application linéaire f de E dans F*

$$\forall u \in E \ , \ f(-u) = -f(u) \ ;$$

En effet

$$\forall(u) \in E \ 0_F = f(0_E) = f(u - u) = f(u + (-1)u) = f(u) + f(-u) \ .$$

— *Pour toute application linéaire f*

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in E^r, \forall(u_1, \dots, u_r) \in E^r \ , \ f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(u_i) \ ;$$

il suffit en effet de raisonner par récurrence sur le nombre r de vecteurs de cette combinaison linéaire.

Définition 1.4. *Soit $E = \mathbb{R}^m$ un espace vectoriel réel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires.*

Exemple 1.5. *L'application qui, à $u = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, associe $l(u) = \sum_{j=1}^{m} x_j$ est une forme linéaire. Mais on pourrait affecter de coefficients arbitraires chaque x_j et associer à u l'expression $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$.*

Définition 1.6. *Soit E un espace vectoriel réel. Une application linéaire de E dans E est appelée aussi endomorphisme de E . On note alors $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathrm{End}(E)$ l'ensemble correspondant.*

Exemple 1.7. *L'application Identité qui associe à tout vecteur u de $\mathbb{R}^m$ lui-même est évidemment linéaire.*

Exemple 1.8. *Donnons des exemples d'application linéaires dans l'espace $\mathcal{S}$ des suites numériques réelles. L'application f qui, à toute suite u , associe la suite $v = f(u)$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ v_n = u_n + u_{n+1}$$

est une application linéaire. De même l'application g qui, à toute suite u , associe la suite $v = g(u)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \ v_n = u_{n+2}$$

est une application linéaire (opérateur de troncation). Il est donc donné par

$$u = (u_0, \ldots, u_n, \ldots) \mapsto (u_2, \ldots, u_{n+2}, \ldots)$$

et consiste donc à "oublier" les deux premiers termes de la suite initiale. On peut enfin remarquer que les suites de Fibonacci sont les suites qui vérifient $f(u) = g(u)$ avec ces notations.

Nous verrons bientôt les éléments permettant de donner les exemples suivants :

Exemple 1.9. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynomiales réelles. Soit P_0 un élément de E . Alors l'application qui, à toute fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$, associe la fonction polynomiale $x \mapsto P_0(x)P(x)$ est une application linéaire.*

Exemple 1.10. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynomiales réelles. Soient P_0 et Q_0 deux éléments de E . Alors l'application qui, à toute fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$, associe la fonction polynomiale $x \mapsto P_0(x)P(x) - Q_0(x)P'(x)$ est une application linéaire.*

Exemple 1.11. *Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (c'est à dire les fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$). Alors l'application $f \mapsto f" - 2f' + f$ est une application linéaire de E dans E .*

Proposition 1.12. *Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base d'un espace vectoriel réel E (par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Soit F un espace vectoriel réel quelconque. Soient $(f_1, \ldots, f_m)$ des vecteurs de F quelconques. il existe une et une seule application linéaire de E dans F telle que $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ $f(e_j) = f_j$.*

Démonstration. Si f est une application linéaire, elle vérifie

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j f(e_j)$$

et, par conséquent, il existe au plus une application linéaire vérifiant $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ $f(e_j) = f_j$ (puisque tout vecteur admet alors une image bien définie).

Il nous suffit donc maintenant de vérifier que l'application φ qui, à tout vecteur u de E , associe le vecteur $\sum_{j=1}^{m} x_j f_j$ (où les $(x_j)_{j=1,\ldots,m}$ sont les coordonnées du vecteur u dans la base $(e_j)_{j=1,\ldots,m}$) est une application linéaire. Appliquons la définition et considérons un couple (λ, μ) de paramètres réels ainsi qu'un couple (u, v) de vecteurs de E . Déterminons alors $\varphi(\lambda.u + \mu.v)$. Pour cela, introduisons les coordonnées des vecteurs concernés. Soient $u = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$ et $v = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j$. Alors le vecteur $\lambda.u + \mu.v$ s'écrit $\sum_{j=1}^{m} (\lambda x_j + \mu y_j) e_j$. Et

$$\varphi(\lambda.u + \mu.v) = \sum_{j=1}^{m} (\lambda x_j + \mu y_j) f_j = \lambda \sum_{j=1}^{m} x_j f_j + \mu \sum_{j=1}^{m} y_j f_j = \lambda.\varphi(u) + \mu.\varphi(v) \ .$$

Ce que nous cherchions à vérifier.

Exemple 1.13. *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n (n entier non nul). Soient $(Q_0, \ldots, Q_n)$ $n+1$ polynômes. Alors il existe une unique application linéaire φ de E dans E telle que*

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \ \varphi(X^i) = Q_i \ .$$

En effet, l'espace E admet pour base, la base des monômes X^i ($i = 0, \ldots, n$).

Proposition 1.14. *Soient E et F deux espaces vectoriels réels. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est lui-même un espace vectoriel réel. De plus, si E et F sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie égale à* $\mathrm{Dim}(E) \times \mathrm{Dim}(F)$ *.*

Démonstration. Les lois définies respectivement par $\forall u \in E, \forall (l,l') \in \mathcal{L}(E,F)^2$ $(l+l')(u) = u$ et $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall l \in \mathcal{L}(E,F)$ $(\lambda.l)(u) = \lambda.l(u)$ en font immédiatement un espace vectoriel réel. C'est d'ailleurs un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F (parfois noté F^E) pour ces mêmes opérations.

Introduisons les $n \times m$ applications linéaires suivantes (où $m = \mathrm{Dim}(E)$ et $n = \mathrm{Dim}(F)$) :

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ l_{ij}(e_k) = \delta_j^k f_i \ .$$

En particulier, cela signifie que

$$\forall u \in E \ l_{ij}(u) = x_j f_i \text{ si } u = \sum_{h=1}^{m} x_h e_h \ .$$

Ces applications linéaires existent d'après la proposition précédente.

Il nous reste à vérifier qu'elles forment un système libre et générateur.

Prenons une combinaison linéaire nulle de ces applications linéaires. Soit

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} l_{ij} = 0 \ .$$

Alors cette somme est nulle quelque soit le vecteur u de E . En particulier, si $u = e_h$ ($h = 1 \ldots m$) , on a

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} l_{ij}(e_h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih} l_{ih}(e_h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih} f_i = 0 \ .$$

Mais les vecteurs f_i forment une base de F donc tous les coefficients α_{ih} ($i = 1 \ldots n$) sont nuls (et ce, quelque soit h). Bref la combinaison linéaire est triviale car tous les coefficients α_{ih} sont nuls et le système d'applications linéaires est bien libre.

Montrons qu'il est générateur. Soit f une application linéaire quelconque. On sait qu'elle est entièrement définie par les vecteurs $f(e_j)$ ($j = 1, \ldots, m$) dans F . Posons

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} f_k$$

(où les a_{kj} sont les coordonnées de $f(e_j)$ sur la base f_k). Remarquons alors que

$$f(u) = l\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_j f_k$$

soit

$$f(u) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} l_{k,j}(u) \text{ et } f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} l_{k,j} \ .$$

Ce que nous cherchions à démontrer.

Proposition 1.15. *Soient E et F deux espaces vectoriels réels. Soient $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$ et $(f_j)_{j=1,\ldots,n}$ deux bases respectives de ces espaces vectoriels. Une application linéaire f de E dans F est donc uniquement déterminée par*

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \; l(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice ayant n lignes et m colonnes. On dira que la matrice A est la matrice associée à l'application f dans les bases $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$ et $(f_j)_{j=1,\ldots,u}$. Si $u \in E$; $u = (e_1, \ldots, e_m)X$ où X est une matrice colonne ayant m lignes et $v \in F$; $v = (f_1, \ldots, f_n)Y$ où Y est une matrice colonne ayant n lignes, alors $v = f(u)$ si et seulement si $Y = AX$.

Démonstration. Soit f une application linéaire de E dans F . Alors comme tout vecteur u de E a des coordonnées uniques sur la base (e_i) , on a

$$f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j l(e_j) \; ;$$

mais les $f(e_j)$ sont des vecteurs de F et ils ont donc des coordonnées uniques sur la base (f_i) de F soit :

$$f(u) = \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right) f_i \; .$$

Bref si le vecteur u a pour coordonnées les $(x_1, \ldots, x_m)$ dans la base (e_j) , le vecteur $f(u)$ a pour coordonnées $\left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{mj} x_j\right)$. On note parfois

$$u = (e_1, \ldots, e_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ et } f(u) = (f_1, \ldots, f_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \; .$$

A toute application linéaire f , on peut donc associer une matrice ayant n colonnes et m lignes dont les colonnes sont données par les coordonnées dans la base de F choisie des images par l de la base de E choisie. Bref l'application $u \mapsto v = f(u)$ correspond à l'application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ donnée par $X \mapsto Y = AX$.

Exemple 1.16. *Ainsi l'application $(x, y) \mapsto (x + y, -y, x, x - y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ a pour matrice (dans les bases canoniques)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \; .$$

2 Théorème du rang

Rappelons maintenant l'importance des notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité pour les applications.

Définition 2.1 (Rappel)**.** *On appelle image de l'application f de E dans F la partie de F formée des éléments de F ayant un antécédent par f . Soit encore*

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F \; ; \; \exists u \in E \; , \; v = f(u)\} \; .$$

Plus généralement l'image d'une partie H de E par f est formée des éléments de F ayant un antécédent par f dans H . Soit encore

$$\mathrm{Im}(H) = \{v \in F \ ; \ \exists u \in H \ , \ v = f(u)\} \ .$$

Définition 2.2 (Rappel)**.** *Soit f une application f de E dans F et G une partie de F . On appelle image réciproque de la partie G la partie de E formée des éléments de E ayant pour image par f un élément de G. Soit encore*

$$\mathrm{Im}^{-1}(G) = \{u \in E \ ; \ f(u) \in G\} \ .$$

Définition 2.3. *On dit que l'application linéaire f de E dans F est*
- *surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$ *. Bref une application surjective est une application pour laquelle tout élément de l'espace d'arrivée a (au moins) un antécédent.*
- *injective si et seulement si* $\forall (u, v) \in E^2 \ , \ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$ *. Bref une application surjective est une application pour laquelle, si deux vecteurs ont la même image, ils sont égaux.*
- *bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*

Définition 2.4. *Soit f une application linéaire de E dans F . On appelle noyau de f l'image réciproque du vecteur 0_F . C'est un sous-espace vectoriel de E que l'on note* $\mathrm{Ker}(f)$ *.*

Vérification. Il nous suffit de vérifier que le noyau de f est stable par combinaison linéaire. Soient donc (u_1, u_2) deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(l)$ et deux scalaires (λ_1, λ_2) de $\mathbb{R}^2$. Calculons $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$. On a

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) = 0_F$$

puisque u_1 et u_2 sont dans le noyau de f .

Théorème 1. *Une application linéaire f de E dans F est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0_E\}$.*

Démonstration. Si l est injective, on a, en particulier,

$$\forall u \in E \ , \ l(u) = 0_F \Rightarrow lu) = l(0_E) \Rightarrow u = 0_E$$

bref

$$l^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\} \ .$$

Réciproquement, supposons que $l^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\}$. Alors

$$l(u) = l(v) \Rightarrow l(u) - l(v) = 0_F \Rightarrow l(u - v) = l(0_E) \Rightarrow u - v \in l^{-1}(\{0_F\}) \Rightarrow u - v = 0_E \Rightarrow u = v \ .$$

Bref l est injective.

Exemple 2.5. *Reprenons l'exemple donné plus haut. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynomiales réelles. Soit P_0 un élément de E et soit φ l'application qui, à toute fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$, associe la fonction polynomiale $x \mapsto P_0(x)P(x)$ est une application linéaire.*

Soit $P_0 = 0$ et l'application associée est nulle. Son noyau est alors E tout entier.

Soit P_0 est non nul et l'application associée est injective (on dit que l'anneau des polynômes est intègre) car

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ P_0(x)P(x) = 0 \Rightarrow P_0 P = 0 \Rightarrow P = 0$$

(tout polynôme non nul admet un degré).

Exemple 2.6. *Reprenons l'exemple de l'opérateur g de troncation d'une suite numérique. On a*

$$v = g(u) \text{ avec } v_n = u_{n+2} \ .$$

Les éléments du noyau sont donc les suites dont les termes sont nuls à partir du troisième ($u_{n+2} = 0$). C'est donc le plan engendré par les suites $(1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ et $(0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Cet opérateur n'est pas injectif. Par contre toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est atteinte comme image de $(0, 0, u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$. Donc g est surjectif.

Exemple 2.7. *Reprenons l'exemple de l'opérateur f (de l'espace des suites numériques dans lui-même) donné par*

$$v = f(u) \text{ avec } v_n = u_n + u_{n+1} \ .$$

Cherchons les éléments du noyau. Ce sont les suites u telles $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n + u_{n+1} = 0$ soit $u_{n+1} = -u_n$. Par une simple récurrence, on voit qu'il s'agit des suites $u = (u_0, -u_0, u_0, \ldots, (-1)^n u_0, \ldots)$. Elles sont toutes multiples de la suite $(1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$. Le noyau est une droite vectorielle. Il n'est pas difficile de vérifier que toute suite $v = (v_0, \ldots, v_n, \ldots)$ est image d'une suite u par f . Prenez la suite u où $u_n = (-1)^n u_0 + \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{n-1-h} v_h$.

Proposition 2.8. *Soit f une application linéaire de E dans F . On rappelle que l'image de f est l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent par f dans E . On note* $\mathrm{Im}(f)$ *ou* $f(E)$ *cette partie de F et on a donc*

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{v \in F \ ; \ \exists u \in E \ f(u) = v\} \ .$$

Alors $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F . Lorsque* $\mathrm{Im}(f)$ *est de dimension finie, on appelle rang de f la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$ *. Plus généralement, si G est un sous-espace vectoriel de E , alors l'image $f(G)$ de G est un sous-espace vectoriel de*$\mathrm{Im}(f)$ *donc de F dont la dimension est limitée par le rang de f .*

Vérification. Il nous suffit de vérifier que l'image de f est stable par combinaison linéaire. Soient donc (v_1, v_2) deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ et deux scalaires (λ_1, λ_2) de $\mathbb{R}^2$. Alors il existe u_1 et u_2 tels que $f(u_i) = v_i$ $(i = 1, 2)$. Et l'on a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in \mathrm{Im}(f) \ .$$

Bref $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ a bien un antécédent dans E .

Exemple 2.9. *Reprenons l'application $(x, y) \mapsto (x + y, -y, x, x - y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ qui a pour matrice (dans les bases canoniques)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Il est facile de voir qu'elle est injective, son noyau étant réduit à $\{0\}$. Mais quelle est son image ? Par définition ce sont les vecteurs $v = (X, Y, Z, T)$ de $\mathbb{R}^4$ pour lesquels il existe un vecteur $u = (x, y)$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \ .$$

Bref nous avons à échelonner le système

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & X \\ 0 & -1 & Y \\ 1 & 0 & Z \\ 1 & -1 & T \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & Z \\ 0 & 1 & -Y \\ 1 & 1 & X \\ 1 & -1 & T \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & Z \\ 0 & 1 & -Y \\ 0 & 0 & X + Y - Z \\ 0 & 0 & -Y - Z + T \end{array}\right) \ .$$

Bref les vecteurs de l'image de f sont donc les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui vérifient les deux équations (indépendantes) $X+Y-Z=0$ et $Y-Z+T$. C'est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Corollaire 2.10. *Si la famille $(u_1,\ldots,u_m)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) engendre E alors la famille $\{f(u_1),\ldots,f(u_m)\}$ engendre $\mathrm{Im}(l)$.*

Remarque 2.11. *Soit f une application linéaire injective de E dans F . Alors l'image par f d'un système libre est un système libre.*

Remarque 2.12. *Soit f une application linéaire surjective de E dans F . Alors l'image par f d'un système générateur de E est un système générateur de F .*

Théorème 2. *Théorème du Rang. Soit f une application linéaire de E dans F . On suppose que E est de dimension finie. Alors*

$$\mathrm{Dim}(E) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker})(f) + \mathrm{rg}(f) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker})(f) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Im})(f) \ .$$

Démonstration. Soit $(e_1,\ldots,e_m)$ une base de E . Comme E est de dimension finie m , le noyau de f est aussi de dimension finie $p \leq m$ (puisqu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E) et choisissons $\{f_i\ ; i=1\ldots p\}$ une base de ce noyau. Tout vecteur v de $\mathrm{Im}(f)$ s'écrit alors

$$v = f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j f(e_j)$$

c'est à dire que le système $\{f(e_j)\ ;\ (j=1\ldots m)\}$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. On remarque donc que $\mathrm{Im}(f)$ est de type fini. D'après le théorème de la base incomplète, on peut extraire de ce système un système libre formé de r vecteurs (où r est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$). On les notera $f\left(e_{j_h}\right)\ ;\ h=1\ldots r$. Considérons alors la famille des vecteurs $\{f_i\}_{i=1}^{p} \cup \{e_{j_h}\}_{j=1}^{r}$. Cette famille est de cardinal

$$p + r = \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker})(f) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Im})(f) \ .$$

Il nous suffit donc de vérifier que $p+r=m$ pour démontrer le théorème du rang.

Cette famille est-elle libre ? Considérons une combinaison linéaire et supposons qu'elle s'annule :

$$0_E = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{h=1}^{r} \mu_h e_{j_h} \Rightarrow 0_F = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{h=1}^{r} \mu_h e_{j_h}\right)$$

mais $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(f_i) = 0_F$. D'où

$$0_F = \sum_{h=1}^{r} \mu_h f(e_{j_h}) \ .$$

Or, par construction, les $l(e_{j_h})$ forment un système libre. Donc les scalaires μ_h sont tous nuls. Notre identité initiale devient donc $0_E = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$ et, comme les f_i forment une base du noyau, on en déduit également que les λ_i sont tous nuls. Notre famille est donc libre et, donc, $p+r \leq m$.

Reste à vérifier que notre famille est bien génératrice. Soit donc u un vecteur quelconque de E . Comme $f(u)$ est un vecteur de l'image de l , on sait qu'il s'écrit $lf(u) = \sum_{h=1}^{r} y_h f\left(e_{j_h}\right)$. Considérons alors

$$u - \sum_{h=1}^{r} y_h e_{j_h} \ .$$

Par construction ce vecteur appartient au noyau de f puisque

$$f\left(u - \sum_{h=1}^{r} y_h e_{j_h}\right) = f(u) - \sum_{h=1}^{r} y_h f\left(e_{j_h}\right) = O_F \ .$$

Donc on a
$$u-\sum_{h=1}^{r} y_h e_{j_h}=\sum_{i=1}^{p} x_i f_i \text{ et } u=\sum_{i=1}^{p} x_i f_i+\sum_{h=1}^{r} y_h e_{j_h}\ .$$
C'est ce qui nous restait à vérifier.

Exemple 2.13. *Reprenons l'application $(x,y)\mapsto(x+y,-y,x,x-y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ qui a pour matrice (dans les bases canoniques)*
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\ .$$
Elle vérifie bien le théorème du rang puisque
$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker})(f)+\mathrm{Dim}(\mathrm{Im})(f)=0+2=\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^2)\ .$$

Corollaire 2.14. *Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans lui-même. On parle parfois d'endomorphisme de E . On suppose que E est de dimension finie n . Alors f est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective.*

Vérification. Si f est bijective, elle est bien sûr injective et surjective par définition. Si f est injective, par le théorème du rang, la dimension de l'image de f est égale à celle de E et donc $E=\mathrm{Im}(E)$. De même si f est surjective, alors $E=\mathrm{Im}(E)$ donc le rang de f est n et donc la dimension du noyau de f est égale à 0 .

Corollaire 2.15. *Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans lui-même. On suppose que E est de dimension finie n . Alors f est bijective si et seulement si elle envoie une base de E sur une base de E.*

Vérification. Si f est bijective, elle est injective et l'image par f d'un système libre de E est un système libre puisque
$$f(\sum_{i=1}^{r} f_i)=0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} f_i=0_E\ .$$
En particulier l'image d'une base de E est libre dans E et forme donc une base de E . Mais on peut remarquer aussi que l'image de f est engendrée par les $f(e_i)$. Si f est surjectif c'est donc que tout vecteur est engendré par ce système de vecteurs qui est générateur et a pour cardinal la dimension de E . Il est donc libre.

Réciproquement, soit f_i une base de E . On suppose que que les $f(f_i)$ forment une base de E . Alors l'image de f contient E dont f est surjective donc est bijective.

Corollaire 2.16. *Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans lui-même. On suppose que E est de dimension finie n . Alors f est bijective si et seulement si sa matrice associée est une matrice de passage.*

Définition 2.17. *Soient E et F deux espaces vectoriels réels. On appelle isomophisme de E sur F toute application linéaire bijective de E sur F .*

Proposition 2.18. *Soit E un espace vectoriel réel et $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E . Alors l'application qui à tout vecteur u de E associe ses composantes $(x_1,\dots,x_n)$ sur la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.*

Vérification. On sait que $u=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est une écriture unique. Elle est par ailleurs linéaire en u puisque

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\ \lambda.u+\mu.v=\lambda.(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)+\mu.(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+\mu y_i)e_i\ .$$

D'où l'isomorphisme cherché. Son injectivité vient du caractère libre du système des e_i . Sa surjectivité vient du caractère générateur du système des e_i .

Proposition 2.19. *Soient E et F deux espaces vectoriels réels. Soient $(e_i)_{i=1,\dots,m}$ et $(f_j)_{j=1,\dots,n}$ deux bases respectives de ces espaces vectoriels. Alors l'application qui, à tout élément f de $\mathcal{L}(E,F)$ associe sa matrice A dans les bases choisies est un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.*

Vérification. On laisse au lecteur le soin d'effectuer cette vérification.

Exemple 2.20. *Nos deux applications travaillant dans l'espace des suites numériques étaient surjectives mais non injectives. Elles ne sont donc pas bijectives. Cela montre que la dimension finie est une hypothèse indispensable pour l'équivalence injection/surjection. Il est facile de trouver une application (linéaire) injective mais pas surjective (prendre $u\mapsto(0,0,u_0,\dots,u_{n-2},\dots)$).*

Définition 2.21. *Soient E , F et G trois espaces vectoriels réels. Soient f une application linéaire de E dans F et f' une application linéaire de F dans G . On appelle composée de f par f' l'application linéaire de E dans G notée $f'\circ f$ et définie par*

$$\forall u\in E\ (f'\circ f)(u)=f'\left(f(u)\right)\ .$$

Remarque 2.22. *On définit ainsi sur l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E une multiplication qui n'est pas commutative.*

Remarque 2.23. *Soient E , F et G trois espaces vectoriels réels. Soient $(e_i)_{i=1,\dots,n}$, $(f_j)_{j=1,\dots,m}$ et $(g_j)_{k=1,\dots,p}$ trois bases respectives de ces espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et F dans G respectivement. On note A et B leurs matrices respectives dans ces bases. L'application linéaire associée à la matrice BA est l'application (de E dans G) composée de l'application f (de E dans F) par l'application g (de F dans G).*

3 Exemples d'applications linéaires.

Application nulle et identité.

Remarque 3.1. *On notera Id_E l'application identité de E (c'est à dire l'isomorphisme linéaire qui, à tout vecteur u de E , associe le vecteur u).*

Homothéties.

Définition 3.2. *Soit λ un réel et E un espace vectoriel. On appelle homothétie h_λ de rapport λ l'application $u\mapsto\lambda.u$.*

Proposition 3.3. *Une homothétie commute à toute application linéaire. Autrement dit, pour tout application linéaire f de E dans E , on a*

$$\forall u\in E\ ,\ f(h_\lambda(u))=h_\lambda(f(u))\ .$$

Démonstration. En effet

$$\forall u \in E \ , \ f(h_\lambda(u)) = l(\lambda.u) = \lambda.f(u) = h_\lambda(f(u)) \ .$$

Proposition 3.4. *Une homothétie de rapport λ est soit nulle (si $\lambda = 0$) soit est un isomorphisme de E (si $\lambda \neq 0$).*

Vérification. Si $\lambda \neq 0$, on a $h_\lambda \circ h_{\frac{1}{\lambda}} = h_{\frac{1}{\lambda}} \circ h_\lambda = \mathrm{Id}_E$.

Formes linéaires.

Définition 3.5. *Soit E un espace vectoriel réel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note parfois $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ ou $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires.*

Proposition 3.6. *Soit l une forme linéaire sur E , espace vectoriel fini. Alors soit l est nulle soit son noyau est un hyperplan H de E . Réciproquement tout hyperplan H de E peut être considéré comme le noyau d'une forme linaire sur E .*

Démonstration. On supposera donc que l est une forme linéaire non nulle. Alors son image n'est pas réduite à $\{0\}$ donc est $\mathbb{R}$ tout entier. Par le théorème du rang, le noyau de l est de dimension $\mathrm{Dim}(E) - 1$ et c'est donc bien un hyperplan.

Réciproquement soit H un hyperplan de E . On sait que toute droite D non contenue dans H en est un supplémentaire dans E soit $E = H \oplus D$. Soit w_0 un vecteur non nul de D . Donc tout vecteur u de E s'écrit $h + w = h + \alpha w_0$ où $h \in H$ et $v = \alpha w_0 \in D$. Alors l'application qui, à u , associe α est une forme linéaire (non nulle) de noyau H .

Elle est linéaire puisque

$$\forall (u, v) \in E^2 \ , \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ , \lambda u + \mu v = \lambda(h + \alpha w_0) + \mu(k + \beta w_0) = (\lambda h + \mu k) + (\lambda\alpha + \mu\beta) w_0 \ .$$

C'est évidemment une forme linéaire non nulle. Par ailleurs $u \in H \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Remarque 3.7. *On retrouve la notion d'équation d'un hyperplan.*

Projections (ou projecteurs).

Définition 3.8. *Soit E un espace vectoriel réel. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . On appelle projection de E sur F_2 parallèlement à F_1 l'application linéaire qui à tout vecteur u de E associe sa composante u_2 sur F_2 où on a $u = u_1 + u_2$, décomposition unique sur la somme directe $E = F_1 \oplus F_2$.*

Vérification. L'application est bien définie puisque les composantes d'un vecteur U sont uniques. Il s'agit bien d'une application linéaire puisque l'on a

$$\forall (u, v) \in E^2 \ , \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ , \lambda u + \mu v = \lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2) = (\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) \ .$$

Proposition 3.9. *Soit E un espace vectoriel réel et $E = F_1 \oplus F_2$ une somme directe. Soit p_1 la projection de E sur F_1 parallèlement à F_2 et p_2 la projection de E sur F_2 parallèlement à F_1 . Alors*

- *Le noyau de p_1 (resp. p_2) est le sous-espace F_2 (resp. F_1) et son image est F_1 (resp. F_2).*
- *$p_1 \circ p_1 = p_1$ et $p_2 \circ p_2 = p_2$.*
- *$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.*

Démonstration.

— Par construction de p_1 , le noyau de p_1 est formé des éléments u ayant une composante nulle sur F_1 ; il s'agit bien des vecteurs de F_2 . Les éléments de F_1 appartiennent à l'image de p_1 et, comme on a $p_1(u_1) = u_1$ si u_1 appartient à F_1 , il est évident que l'image de p_1 est égale à F_1 .

— Comparons $p_1 \circ p_1$ et p_1 . Soit u un vecteur quelconque de E . Alors on a $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$. On a

$$p_1(u) = u_1 \text{ et } p_1(p_1(u)) = p_1(u_1) = u_1 \ .$$

Les deux applications sont bien égales.

— Calculons $p_1 \circ p_2$. Soit u un vecteur quelconque de E . Alors on a $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$.

$$p_1(p_2(u)) = p_1(u_2) = 0 \text{ et } p_2(p_1(u)) = p_2(u_1) = 0 \ .$$

Proposition 3.10. *Soit E un espace vectoriel et p une application linéaire non nulle de E dans E . On suppose que p vérifie $p \circ p = p$. Alors le noyau de p et l'image de p sont des sous-espaces supplémentaires dans E et p est la projection de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.*

Notons $F_1 = \mathrm{Ker}(p)$ le noyau de p et $F_2 = \mathrm{Im}(p)$ l'image de p . Montrons que tout vecteur u de E est engendré par ces deux sous-espaces vectoriels. Par construction, le vecteur $p(u)$ est un élément de F_2 . Etudions le vecteur $u - p(u) = v$. On a

$$p(v) = p(u - p(u)) = p(u) - (p \circ p)(u) = p(u) - p(u) = 0 \ .$$

Donc v est bien un élément de F_1 et $u = p(u) + (u - p(u)) = v + p(u)$.

Reste à étudier l'intersection des deux sous-espaces-vectoriels. Soit w un vecteur de $F_1 \cap F_2$. Alors on a $0 = p(w)$ puisque w est élément du noyau de p . Mais on a aussi $w = p(v)$ puisque w est élément de l'image de p . Donc $p(w) = (p \circ p)(v) = p(v) = w$. D'où $w = 0$. On a donc bien $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Symétries vectorielles.

Proposition 3.11. *Soit E un espace vectoriel réel et $E = F_1 \oplus F_2$ une somme directe. On appelle symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2 l'application linéaire qui, à $u = u_1 + u_2$ (où $u_i \in F_i$, $i = 1, 2$), associe le vecteur $s(u) = u_1 - u_2$. C'est un isomorphisme involutif de E sur lui-même (il vérifie $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$).*

Démonstration. On va déjà démontrer qu'il s'agit d'une application linéaire. On a

$$\forall (u, v) \in E^2 \ , \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ , \lambda u + \mu v = \lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2) = (\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) \ .$$

Donc

$$s(\lambda u + \mu v) = (\lambda u_1 + \mu v_1) - (\lambda u_2 + \mu v_2) = \lambda . s(u) + \mu . s(v) \ .$$

Etudions alors s^2 . Par définition

$$s^2(u) = s(s(u)) = s(u_1 - u_2) = u_1 + u_2 = u$$

si $u = u_1 = u_2$.

Remarque 3.12. *Soit $E = F_1 \oplus F_2$ un décomposition en supplémentaires. Soit s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 . Alors*

$$F_1 = \{u \in E \ ; s(u) = u\} \text{ et } F_2 = \{u \in E \ ; s(u) = -u\} \ .$$

Vérification. Ecrivons $u = u_1 + u_2$. Alors $s(u) = u \Leftrightarrow u_1 - u_2 = u_1 + u_2 \Leftrightarrow u_2 = 0 \Leftrightarrow u \in F_1$. De même $s(u) = -u \Leftrightarrow u_1 - u_2 = -u_1 - u_2 \Leftrightarrow u_1 = 0 \Leftrightarrow u \in F_2$.

4 Matrice de passage et changement de base.

On se donne dans ce paragraphe deux espaces vectoriels E et F , une application linéaire f de E dans F ainsi que deux bases de E et F respectivement $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{f_1, \ldots, f_m\}$. On note alors A la matrice associée à l'application linéaire f dans ce choix de bases.

Considérons alors deux nouvelles bases respectives de E et F soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_m\}$. L'application linéaire f admet alors une matrice B dans ces nouvelles bases. Quel est le rapport entre A et B ?

Notations générales. Nous allons nous donner la "nouvelle" base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ en fonction de ses coordonnées dans "l'ancienne" base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ soit

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \; u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} e_j$$

ou encore $(u_1, \ldots, u_n) = (e_1, \ldots, e_n)P$ où P est la matrice (de passage) (α_{ji}) .

Définition 4.1. *La matrice P ainsi définie est appelée matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vers la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Il s'agit d'une matrice carrée d'ordre n inversible.*

Vérification. La matrice P est en effet de rang maximal puisque ses vecteurs colonnes forment un système libre.

Proposition 4.2. *Soit u un vecteur quelconque de E . Soit X (resp. X') le vecteur colonne des composantes de u dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (resp. $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Alors on a*

$$X = PX' \; .$$

Vérification. On a en effet $u = (e_1, \ldots, e_n)X$ et $u = (u_1, \ldots, u_n)X' = (e_1, \ldots, e_n)PX'$. D'où le résultat par l'unicité des composantes.

Proposition 4.3. *Soient deux espaces vectoriels E et F et une application linéaire f de E dans F . Soient deux bases de E et F respectivement $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{f_1, \ldots, f_m\}$. On note alors a la matrice associée à l'application linéaire f dans ce choix de bases. Soient deux nouvelles bases respectives de E et F soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_m\}$. L'application linéaire f admet alors une matrice B dans ces nouvelles bases. Si P (resp. Q) sont les matrices de passage respectives des bases $\{u_1, \ldots, u_n\}$ (resp. $\{v_1, \ldots, v_m\}$) vis à vis des bases de départ, on a*

$$B = Q^{-1}AP \text{ ou } A = QBP^{-1} \; .$$

Vérification. Posons $u = (e_1, \ldots, e_n)X$ et $l(u) = (f_1, \ldots, f_m)Y$. Posons de même $u = (u_1, \ldots, u_n)X'$ et $l(u) = (v_1, \ldots, v_m)Y'$ (en introduisant les vecteurs colonnes associés aux coordonnées des vecteurs dans les bases respectives, nouvelles et anciennes de E et F . Alors, par définition des matrices associées à une application linéaire, on a

$$f(u) = (f_1, \ldots, f_m)Y = (f_1, \ldots, f_m)AX \text{ et } f(u) = (v_1, \ldots, v_m)Y' = (v_1, \ldots, v_m)BX' \; .$$

Soit encore

$$f(u) = (f_1, \ldots, f_m)AX = (f_1, \ldots, f_m)APX' = (v_1, \ldots, v_m)BX' = (f_1, \ldots, f_m)QBX' \; .$$

Bref $AP = QB$ soit encore $B = Q^{-1}AP$ ou $A = QNP^{-1}$ (puisque Q et P sont inversibles).

Le cas des endomorphismes. Dans ce cas, on se donne un espace vectoriel E , une application linéaire de E dans E et une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E . Alors on considère la matrice associée à f vis à vis de cette unique base. Soit P la matrice de passage d'une autre base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ vis à vis de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (c'est à dire que $(u_1, \ldots, u_n) = (e_1, \ldots, e_n)P$).

Proposition 4.4. *Soit un espace vectoriel E et un endomorphisme f de E . Soient deux bases de E respectivement notées $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{u_1, \ldots, u_n\}$. On note alors a la matrice associée à l'application linéaire f dans la base initiale et B la matrice dans la nouvelle base. Si P désigne la matrice de passage de la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ vis à vis de la base de départ, on a*

$$B = P^{-1}AP \text{ ou } A = PBP^{-1} \ .$$

Vérification. C'est immédiat avec ce qui précède puisqu'il suffit de prendre $Q = P$.

5 Des exemples d'étude

Terminons ce chapitre par l'étude de deux applications linéaires.

Exemple 5.1. *Prenons l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée par la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Trouver le noyau revient à chercher les vecteurs annulant cette application c'est à dire les solutions du système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Chercher son image revient à chercher les conditions sur (X, Y, Z, T) pour qu'il existe un antécédent c'est à dire une solution au syxtème

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \ .$$

Il suffit donc d'échelonner

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & X \\ 1 & -1 & 1 & 0 & Y \\ 1 & -1 & 1 & 1 & Z \\ 1 & -2 & 3 & 0 & T \end{array}\right) \ .$$

On peut le faire par exemple comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & X \\ 1 & -1 & 1 & 0 & Y \\ 1 & -1 & 1 & 1 & Z \\ 1 & -2 & 3 & 0 & T \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & Y \\ 1 & -2 & 3 & -1 & X \\ 1 & -1 & 1 & 1 & Z \\ 1 & -2 & 3 & 0 & T \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & Y \\ 0 & -1 & 2 & -1 & X - Y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Z - Y \\ 0 & -1 & 2 & 0 & T - Y \end{array}\right)$$

soit finalement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & X \\ 1 & -1 & 1 & 0 & Y \\ 1 & -1 & 1 & 1 & Z \\ 1 & -2 & 3 & 0 & T \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & Y \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -X + Y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Z - Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X + Y - Z + T \end{array}\right) \ .$$

Donc l'image est l'hyperplan d'équation $-X+Y-Z+T=0$ *. Et le noyau (donc de dimension* $1=4-3$*) est formé des vecteurs solution du système*

$$\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ y-2z+t &= 0 \\ t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ y &= 2z \\ t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= 2z \\ t &= 0 \end{cases}$$

Il s'agit des vecteurs de la droite engendrée par $(1,2,1,0)$ *. On voit ainsi que les techniques apprises jusqu'alors nous permettent de déterminer parfaitement le noyau et l'image d'une application linéaire donnée par sa matrice.*

Remarquons pour finir que l'application donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(elle va donc de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^4$*) est, cette fois, injective de* $\mathbb{R}^3$ *dans un hyperplan de* $\mathbb{R}^4$ *.*

Exemple 5.2. *Cet exercice sera mieux compris après l'étude du prochain chapitre du cours.*

Considérons l'espace vectoriel E *des fonctions polynômes de degré au plus* 3 *. Ces fonctions* P *s'écrivent donc* $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=P(x)$ *. Considérons alors l'application* l *donnée par*

$$P \mapsto l(P) = Q = P-(x-a)P'$$

où a *est un réel donné. On remarque tout d'abord que la fonction polynôme* $l(P)=Q$ *est de degré au plus* 3 *(car elle est somme de deux polynômes de degré au plus* 3*). Par ailleurs il est facile de vérifier que* l *est linéaire puisque*

$$l\left(\lambda P_1+\mu P_2\right) = \lambda P_1+\mu P_2-(x-a)\left(\lambda P_1+\mu P_2\right)' = \lambda l(P_1)+\mu l(P_2)\ .$$

Donc l *est une application linéaire de* E *dans* E *(un endomorphisme de* $E=\mathbb{R}_3[X]$*).*

Déterminons la matrice de l *dans la base des monômes. On a* $l(1)=1$ *,* $l(x)=x-(x-a)\times 1=a$ *,* $l(x^2)=x^2-(x-a)2x=-x^2+2ax$ *et, enfin,* $l(x^3)=x^3-(x-a)3x^2=-2x^3+3ax^2$ *. Bref, par définition, la matrice de* l *dans cette base est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(puisque on met, en colonne, les coordonnées - dans la base des monômes - des images par l *de la base des monômes).*

Nous sommes donc en capacité de déterminer le rang de l *(c'est le rang de cette matrice). En effet la matrice est pratiquement échelonnée. On peut aussi remarquer qu'elle est triangulaire supérieure avec au moins un coefficient nul sur la diagonale. Aussi elle ne peut être inversible. Un échelonnement possible est le suivant*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6a^2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Bref le rang de la matrice et de l est de 3 . Notre application linéaire n'est ni injective, ni surjective ni, a fortiori, bijective.

Déterminons l'image de l . Ce sous-espace de E est engendré par $\{l(1), l(x), l(x^2), l(x^3)\}$. Mais l'échelonnement ci-dessus montre que $\{l(1), l(x^2), l(x^3)\}$ suffisent. Il reste à définir ce sous-espace par un système d'équations. Ici la co-dimension est de 1 donc $l(E)$ est un hyperplan de E défini par une unique équation. Si l'on reprend l'échelonnement ci-dessus avec un second membre :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 3a & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & a_3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 & -3a & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -a_3 \\ 0 & 0 & 2a & 0 & a_1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 & -3a & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 6a^2 & a_1 + 2a\,a_2 \end{array}\right) .$$

L'équation de compatibilité s'obtient facilement en remarquant que ce système n'admet de solutions que si

$$-3a^2\,a_3 = a_1 + 2a\,a_2 \text{ soit } a_1 + 2a\,a_2 + 3a^2\,a_3 = 0 .$$

Une équation possible pour $l(E)$ est donc $a_1 + 2a\,a_2 + 3a^2\,a_3 = 0$. Ceci met en évidence un système générateur puisque les solutions de cette équation peuvent s'écrire $a_0(1,0,0,0) + a_2(0,-2a,1,0) + a_3(0,-3a^2,0,1)$. Les fonctions polynomiales $x \mapsto 1$, $x \mapsto x^2 - 2ax$ et $x \mapsto x^3 - 3a^2x$ forment donc aussi une base de $l(E)$.

Déterminons le noyau de l . Il nous suffit ici de résoudre le système échelonné plus haut soit

$$\left\{\begin{array}{ccc} x + ay & = & 0 \\ -z + 3at & = & 0 \\ -2t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -ay \\ z & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array}\right. .$$

Bref il s'agit de la droite vectorielle engendrée par la fonction polynomiale $x \mapsto x - a$.

Nous allons poursuivre l'étude de cette application linéaire d'une façon qui sera généralisée dès l'an prochain en cours.

Déterminons l'ensemble des vecteurs tels que $l(P) = -P$ (resp. $l(P) = -2P$. Bref nous allons étudier le noyau de l'application $l + \mathrm{Id}$ (resp. $l + 2\mathrm{Id}$). Mettre ces identités sous forme de noyau permet d'affirmer que les deux ensembles cherchés sont des sous-espaces vectoriels de E . On a vu que $l(1) = 1 \times 1$ et que $l(x-a) = 0$.

Commençons par $l(P) = -P$. On remarque facilement que cela revient à échelonner la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3a \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bref les fonctions cherchées sont de la forme $2x + ay = 0$, $y + 2az = 0$ et $t = 0$. Bref la fonction polynomiale $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$ engendre ce sous-espace vectoriel.

Passons à $l(P) = -2P$. On remarque de même que cela revient à échelonner la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

or elle est échelonnée. Bref les fonctions cherchées sont de la forme $3x + ay = 0$, $2y + 2az = 0$ et $z + 3at = 0$. Bref la fonction polynomiale $x^2 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x-a)^3$ engendre ce sous-espace vectoriel.

On remarque que le système de vecteurs formé des fonctions polynomiales $1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3$ *est une base de* l *. Déterminons la matrice* M' *de* l *dans cette base. On a immédiatement*

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

Bref M' *est diagonale.*

Si l'on introduit la matrice de passage P *de la base des monômes à cette nouvelle base, on a, d'après le cours,*

$$M = PM'P^{-1} \ .$$

Mais P^{-1} *est également la matrice de passage de la base* $1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3$ *à la base des monômes* $1, x, x^2, x^3$ *. Aussi*

$1 = 1$; $x = a + (x-a)$; $x^2 = a^2 + 2a(x-a) + (x-a)^2$: et $x^3 = a^3 + 3a^2(x-a) + 3a(x-a)^2 + (x-a)^3$.

Bref on a démontré l'identité matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$