Algèbre et analyse élémentaires II
Analyse

Propriétés des fonctions numériques d'une variable réelle.

Il s'agit dans ce paragraphe de généraliser les notions de limite vues pour les suites aux fonctions numériques d'une variable réelle. Ensuite on introduira les notions de continuité et de dérivabilité. Nous allons nous inspirer des définitions utilisées au premier semestre lors de l'étude des suites numériques.

Rappelons que l'on dit que la suite u_n tend vers l (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) si n tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

(respectivement

$$\forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow u_n \ > \ A$$

ou

$$\forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow u_n \ < - \ A \ )$$

L'objectif est de définir la notion d'ordre de grandeur d'une fonction au voisinage d'un point ou au voisinage de $\pm\infty$.

1 Limites des fonctions numériques de la variable réelle.

On désignera par f une fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une application définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ (que l'on appellera domaine de définition). La plupart du temps ce domaine de définition sera un intervalle ou une réunion finie d'intervalles.

Exemple 1.1. *La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais la fonction $x \mapsto \ln(x)$ n'est définie que sur $]0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.*

Définition 1.2. *On dit que f est bornée si la partie $f(\mathrm{D})$ (appelée image de f) est une partie bornée de $\mathbb{R}$ c'est à dire que*

$$\exists M > 0 \ \forall x \in D \ |f(x)| \leq M \ .$$

Exemple 1.3. *Les fonctions polynomiales (de degré au moins 1) ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et n'y est pas bornée. La fonction $\frac{1}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et y est bornée (par 1).*

Dans ce qui suit, on supposera toujours que le domaine de définition des fonctions contient un intervalle de la forme $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (sauf éventuellement x_0).

Définition 1.4. *On dit que $f(x)$ tend vers l si x tend vers x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; (x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \ .$$

On dit que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de l que l'on veut si l'on choisit x suffisamment proche de x_0 .

Remarque 1.5. *On remarquera que f n'est pas nécessairement définie en x_0 dans la définition précédente.*

Exemple 1.6. *Ainsi la fonction $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (pour $x \neq 0$) admet 0 pour limite si x tend vers 0 .*

Vérifions le. Soit $\epsilon > 0$. On cherche donc η tel que $|x| = |x - 0| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - 0| \leq \epsilon$. Prenons $\eta \leq \epsilon$. Alors, comme $\forall y \in \mathbb{R} \mid \sin(y) \leq 1$, on a

$$|f(x)| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \leq \eta \leq \epsilon \ .$$

Définition 1.7. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si x tend vers x_0 si*

$$\forall A > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) \ > \ A$$

(respectivement

$$\forall A > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) \ < \ -A \ )$$

Bref on peut rendre $f(x)$ arbitrairement grand (resp. petit) pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 .

Exemple 1.8. *Ainsi $x \mapsto \frac{1}{x}$ tend-elle vers $+\infty$ si x tend vers 0^+ .*

Il s'agit de vérifier la propriété suivante :

$$\forall A > 0 \ \exists \eta > 0 \ ; 0 < x < \eta \Rightarrow \frac{1}{x} > A \ .$$

Prenons $\eta < \frac{1}{A}$. Alors

$$0 < x \leq \eta \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{A} \Rightarrow 0 < Ax < 1 \Rightarrow 0 < A < \frac{1}{x} \ .$$

Remarque. *On définit de façon analogue une limite finie ou infinie lorsque la variable réelle x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.*

Exemple 1.9. *La fonction $x \mapsto \exp(x)$ tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$.*

Proposition 1.10. *Si f admet une limite l en x_0 ou en $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors l est unique.*

(Indication de la) Démonstration. Si l'on suppose que l_1 et l_2 sont deux limites (par exemple en x_0) alors

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta_1 > 0 \ ; \ |x - x_0| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| \leq \epsilon$$

mais aussi

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta_2 > 0 \ ; \ |x - x_0| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| \leq \epsilon \ .$$

Comme on raisonne par l'absurde et que $l_2 \neq l_1$, on peut prendre $\epsilon < |l_2 - l_1|/2$. Or, si l'on prend $\eta < \eta_1$ et $\eta < \eta_2$ (associés à un tel choix de ϵ) on a

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon \text{ et } |f(x) - l_2| < \epsilon \ .$$

Ainsi

$$|l_2 - l_1| \leq |l_2 - f(x)| + |f(x) - l_1| < 2\epsilon < |l_2 - l_1| \ .$$

Et ceci est bien sûr impossible.

Théorème 1. *Opérations sur les limites. Soient f et g des fonctions numériques. Soit λ un scalaire réel. Soit x_0 un réel.*

- *Si f et g admettent des limites respectives l et l' lorsque x tend vers x_0 alors la fonction $f + g$ admet une limite en x_0 égale à $l + l'$;*
- *Si f admet l comme limite lorsque x tend vers x_0 , alors la fonction λf admet une limite en x_0 égale à λl ;*

— *Si f et g admettent des limites respectives l et l' lorsque x tend vers x_0 alors la fonction fg admet une limite en x_0 égale à ll' ; Si f et g admettent des limites respectives l et l' lorsque x tend vers x_0 et si, de plus, la limite l' est non nulle alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite en x_0 égale à $\frac{l'}{l}$;*
— *Si f tend vers l alors $|f|$ tend vers $|l|$.*

Ces résultats se démontrent de façon tout à fait analogue aux résultats concernant les limites des suites numériques.

Quelques indications.

— Soit λ un nombre réel. Si $\lambda = 0$ alors la fonction λf est nulle quelque soit f . Alors la fonction 0 admet 0 comme limite en tout point x_0 . Nous pouvons donc supposer que $\lambda \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. On sait qu'il existe alors η tel que
$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{|\lambda|} \ .$$
Alors
$$|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda l| = |\lambda| \, |f(x) - l| < |\lambda| \frac{\epsilon}{|\lambda|} = \epsilon \ .$$
— Supposons que f tende vers l en x_0 et que g tende vers l' si x tend vers x_0 . Alors
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta_1 \ |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon/2$$
et
$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \eta_2 \ |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - l'| < \epsilon/2 \ .$$
Prenons alors η tel que $\eta < \eta_1$ et $\eta < \eta_2$. On aura
$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon/2 \text{ et } \ |g(x) - l'| < \epsilon/2$$
soit
$$|(f+g)(x) - l - l'| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \ .$$
C'est ce que nous cherchions.
— Supposons que f tende vers l en x_0 et que g tende vers l' si x tend vers x_0 . Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Prenons M tel que $|l - \epsilon| < M$, $|l + \epsilon| < M$, $|l' - \epsilon| < M$ et $|l' + \epsilon| < M$. On vérifie que $|l| < M$ et $|l'| < M$. Prenons alors
$$\exists \eta_1 \ ; \ |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon/M$$
et
$$\exists \eta_2 \ ; \ |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - l'| < \epsilon/M \ .$$
Alors

Théorème 2. *Soit f et g des fonctions numériques. On suppose que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 . On suppose que $g(y)$ tend vers l' lorsque y tend vers l et que $g(l) = l'$. Alors $(g \circ f)(x)$ tend vers l' .*

Démonstration. Il s'agit donc d'étudier $|g(f(x)) - l'|$ lorsque x tend vers x_0 . Soit donc $\epsilon > 0$ quelconque. Alors il existe $\eta > 0$ tel que
$$|y - l| < \eta \Rightarrow |g(y) - l'| < \epsilon$$
(puisque $g(y)$ tend vers l' si y tend vers l et que $g(l) = l'$). Prenons $y = f(x)$. Comme $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 , il existe η' tel que
$$|x - x_0| < \eta' \Rightarrow |f(x) - l| < \eta$$

si $x \neq x_0$. Bref
$$|x - x_0| < \eta' \Rightarrow |f(x) - l| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - l'| < \epsilon \ .$$
C'est ce que nous devions montrer.

Théorème 3. *Opérations sur les limites (suite). Soient f et g des fonctions numériques. Soit λ un scalaire réel. Soit x_0 un réel.*
- *Si f admet une limite finie l et que g admet une limite infinie $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 alors la fonction $f+g$ admet une limite en x_0 égale à celle de g ;*
- *Si f et g admettent $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 , alors la fonction $f+g$ admet une limite en x_0 égale à $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;*
- *Si f admet une limite finie non nulle l et g admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 alors la fonction fg admet une limite infinie dont le signe est le produit des signes de l et de la limite de g ;*
- *Si f admet une limite finie non nulle l et g admet une limite égale à 0 lorsque x tend vers x_0 alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite infinie en x_0 (on suppose que $g(x)$ ne s'annule pas sur un intervalle centré en x_0 et y garde un signe constant ou garde un signe constant sur chacun des intervalles bornés par x_0) ;*
- *Si f admet une limite finie l et g admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite nulle en x_0 .*
- *Si f admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ et g admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 alors la fonction fg admet une limite infinie dont le signe est le produit des signes de la limite de f et de celle de g ;*

Remarque. *On appelle "forme indéterminée" les expressions conduisant à l'étude de $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$ ou encore $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Nous verrons ultérieurement comment lever ces indéterminations sous certaines hypothèses.*

Exemple 1.11.
- *Les exemples $f(x) = 1/x$ et $g(x) = 1/x^2$ ou $g(x) = 2 + 1/x$ ou $g(x) = 1/x + \sin(1/x)$ lorsque x tend vers 0^+ donnent ainsi différentes limites lorsque l'on étudie $(f-g)(x)$ puisque $1/x - 1/x^2 = (x-1)/x^2$ tend vers $-\infty$ alors que $1/x - 1/x - 2 = -2$ tend vers -2 ou encore $-\sin(1/x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 .*
- *De même, les exemples $f(x) = x$ et $g(x) = 1/x$ ou $g(x) = 1/x^2$ ou $g(x) = 1/\sqrt{x}$ donnent différentes limites lorsque x tend vers 0 .*

Quelques indications.
- Supposons par exemple que la fonction f admette une limite finie l et que la fonction g admette une limite infinie égale à $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 . On a donc
$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; (x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$
et
$$\forall A > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta \Rightarrow g(x) \ > A \ .$$
Soit $A > 0$ quelconque. Prenons $\epsilon > 0$ quelconque. Alors il existe η_1 tel que
$$(x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta_1) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \ .$$
En particulier $f(x) > l - \epsilon$. De même il existe η_2 tel que
$$(x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta_1) \Rightarrow g(x) > A - l + \epsilon \ .$$
Ainsi, si $\eta = \mathrm{Inf}(\eta_1, \eta_2)$, on a
$$f(x) + g(x) > l - \epsilon + A - l + \epsilon = A \ .$$

— Le cas où $f(x)$ et $g(x)$ ont des limités infinies (de même signe) si x tend vers x_0 est entièrement analogue. On pourra remarquer que $A^2 > A$ si $A > 1$.

— Supposons que la fonction f admette une limite finie non nulle l et que la fonction g admette une limite égale à $-\infty$ (pour changer) lorsque x tend vers x_0 . On a

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; (x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

et

$$\forall A > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta \Rightarrow g(x) \ < -A \ .$$

On va supposer que l est strictement positive (l'autre cas étant analogue. On a donc

$$l - \epsilon f(x) < l + \epsilon$$

pourvu que x soit assez proche de x_0 . Prenons alors $\epsilon = l/2$. De cette façon, on sait que $f(x) > l - \epsilon > l/2 > 0$ pour un $\eta_1 > 0$ tel que $x \neq x_0$ et $|x - x_0| < \eta_1$. De même on a un η_2 pour lequel

$$x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow g(x) \ < -\frac{2A}{l} \ .$$

Alors, si $\eta = \text{Inf}(\eta_1, \eta_2)$, on a

$$f(x)g(x) < -\frac{l}{2}\frac{2A}{l} = -A \ .$$

— Le cas où les limites de f et de g sont infinies lorsque x tend vers x_0 est entièrement analogue.

— Pour l'étude du cas où l'on a un quotient, on remarquera qu'il suffit de vérifier que, si g tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 , la fonction $1/g(x)$ tend vers l'infini (avec le signe de g). On a donc

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; (x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta) \Rightarrow |g(x)| < \epsilon$$

(avec $0 < |g(x)|$ dès que η est assez petit). Soit $A > 0$. Alors il existe η tel que

$$(x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \eta) \Rightarrow 0 < |g(x)| < \frac{1}{A}$$

d'où

$$A < \frac{1}{|g(x)|} \ .$$

Si, par exemple, $g(x)$ reste positive sur $]x_0, x_0 + \eta[$, on en déduit que

$$A < \frac{1}{g(x)} \ .$$

Théorème 4. *(passage à la limite dans les inégalités) Soient f et g deux fonctions numériques définies sur le même intervalle I . On suppose que*

$$\forall x \in I \ f(x) \leq g(x) \ .$$

On suppose que f et g admettent une limite notée respectivement l et l' lorsque x tend vers x_0 . Alors on a $l \leq l'$.

Quelques indications. On raisonne par l'absurde. Supposons que $l' < l$. Posons alors $\epsilon = (l - l')/2$. On a

$$l' - \epsilon = l' - (l - l')/2 < l' < l' + \epsilon = (l + l')/2 = l - \epsilon < l < l + \epsilon \ .$$

Donc il existe η_1 tel que $|x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$ soit $f(x) > (l + l')/2$. De même il existe η_2 tel que $|x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - l'| < \epsilon$ soit $g(x) < (l + l')/2$. Ainsi, pour tous les x tels que $|x - x_0| < \eta = \text{Inf}(\eta_1, \eta_2)$, on a

$$f(x) > g(x)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarque 1.12. *Attention on peut avoir $f(x) < g(x)$ mais $l = l'$. Ainsi*

$$|\sin x| < |x| \text{ si } x \neq 0$$

mais les deux limites en 0 *sont égales à* 0 .

Définition 1.13. *On dira que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si et seulement si la limite de $f(x)/g(x)$ existe et vaut* 1 *lorsque x tend vers x_0 .*

2 Continuité des fonctions numériques de la variable réelle.

Définition 2.1. *Soit f une fonction numériques de la variable réelle x . On suppose que f est définie sur un voisinage de x_0 . On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f admet une limite lorsque x tend ers x_0 et que cette limite est $f(x_0) = y_0$.*

Définition 2.2. *Soit f une fonction numérique de la variable réelle x . On suppose que f est définie sur l'intervalle I . On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I . On note $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur I .*

Exemple 2.3. *Toutes les fonctions polynomiales sont continues (d'après les théorèmes sur les limites). La fonction $E(x)$ (partie entière de x) est continue en tout point non entier. Elle n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$. Rappelons que*

$$E(x) = n \text{ si } n \leq x < n + 1 .$$

Théorème 5. *Soit λ un réel. Soient f et g deux fonctions numériques de la variable réelle x .*
- *si f est continue en x_0 alors λf est continue en x_0 ;*
- *si f est continue en x_0 et si g est continue en x_0 alors $f + g$ est continue en x_0 ;*
- *si f est continue en x_0 et si g est continue en x_0 alors fg est continue en x_0 ;*
- *si f est continue en x_0 , si g est continue en x_0 et $g(x_0) \neq 0$ alors f/g est continue en x_0 ;*
- *si f est continue en x_0 et si g est continue en y_0 où $y_0 = f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 ;*

Démonstration. Ces propriétés résultent immédiatement des résultats analogues sur les limites.

Corollaire 2.4. *L'espace $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.*

Propriétés globales des fonctions continues

Théorème 6. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $I = [a, b]$ (on parlera d'intervalle compact). Alors f est bornée sur I et atteint son maximum et son minimum.*

(Indication de la) Démonstration. On peut raisonner par l'absurde et par dichotomie. Si f n'est pas bornée sur $[a, b]$, c'est qu'elle n'est pas bornée sur (au moins) l'un des intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2}, b]$. On construit ainsi deux suites a_i et b_i avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$ telles que a_i est croissante, b_i décroissante, $a_i < b_i$ et $b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i}$. Elles sont donc adjacentes et ont une limite commune c (élément de $[a, b]$. Or f est continue en c et donc doit être bornée sur tout voisinage assez petit de c . Un tel voisinage contient $[a_i, b_i]$ dès que i est assez grand. C'est absurde puisque f n'y est pas bornée par construction.

Remarque 2.5. *Toutes les hypothèses sont utiles. La fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ n'est pas bornée sur $[-1, 1]$ ou sur $[0, 1]$ (elle n'est pas continue en* 0*). La fonction x n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$ (l'intervalle n'étant pas borné). La fonction $1 - x$ n'atteint pas sa borne inférieure sur $[0, 1[$ mais l'intervalle n'est pas fermé en* 1 .

Théorème 7. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle I . Soient a et b deux points de I tels que $f(a)f(b) < 0$. Il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. Ainsi une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler.*

(Indication de la) Démonstration. Il est facile de procéder par dichotomie. En effet soit f s'annule an $\frac{a+b}{2}$ (et on a trouvé un zéro de f) soit le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est distinct de celui de $f(a)$ ou de $f(b)$. On construit ainsi deux suites a_i et b_i adjacentes telles que $f(a_i)f(b_i) < 0$. Elles ont une limite commune c et $f(c)$ doit être du signe de $f(a_i)$ puisque $f(a_i)$ tend vers $f(c)$ et du signe de $f(b_i)$ puisque $f(b_i)$ tend vers $f(c)$. Bref $f(c) = 0$.

Corollaire 2.6. *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur l'intervalle I de la droite réelle. Alors l'image de I par f est un intervalle.*

(Indication de la) Démonstration. Si $f(a) < \xi < f(b)$ alors la fonction $g(x) = f(x) - \xi$ (qui est continue sur $[a, b]$ change de signe entre a et b donc elle doit s'annuler.

Exemple 2.7. *Si l'on reprend la fonction partie entière, on voit qu'une fonction non continue ne satisfait pas le théorème des valeurs intermédiaires.*

Théorème 8. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f définit une bijection de I sur $f(I)$. Sa bijection réciproque $g = f^{-1}$ est continue et monotone (avec le même sens de variation que f) de $f(I)$ sur I .*

Démonstration. Comme f est strictement monotone, elle est injective :

$$x \neq y \Leftrightarrow x < y \text{ et } x > y \Leftrightarrow f(x) < f(y) \text{ et } f(x) > f(y) \Leftrightarrow f(x) \neq f(y) \ ;$$

Comme f est continue, son image $J = f(I)$ est un intervalle. On définit ainsi une bijection de I dans $f(I) = J$. Considérons alors $g = f^{-1}$ l'application réciproque. Si f est croissante (resp. décroissante), alors g est croissante (resp. décroissante) :

$$x = g(y) < x' = g(y') \Leftrightarrow y = f(x) < y' = f(x') \ .$$

Il nous reste à vérifier que g est continue sur $J = f(I)$. Pour cela, nous supposerons f croissante et nous nous ramènerons à la définition. Soit y_0 un point de $J = f(I)$. On supposera que y_0 est intérieur à J (le cas où y_0 est une borne de J est analogue mais plus simple). Posons $x_0 = g(y_0)$ soit encore $y_0 = f(x_0)$. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Nous cherchons à déterminer des y pour lesquels $|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$. Alors on a $g(y_0) - \epsilon < g(y_0) = x_0 < g(y_0) + \epsilon$ soit $f(g(y_0) - \epsilon) < f(x_0) = y_0 < f(g(y_0) + \epsilon)$ (en supposant que ϵ soit assez petit pour $g(y_0) - \epsilon$ et $g(y_0) + \epsilon$ appartiennent à I). Introduisons alors η un réel strictement positif tel que

$$f(g(y_0) - \epsilon) < y_0 - \eta < f(x_0) = y_0 < y_0 + \eta < f(g(y_0) + \epsilon) \ .$$

Alors, si $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$, on a (par monotonie de g)

$$g(y_0) - \epsilon < g(y_0 - \eta) < g(y) < g(y_0 + \eta) < g(y_0) + \epsilon \ .$$

Bref

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon \ .$$

Remarque 2.8. *Le graphe de la fonction g s'obtient en effectuant la symétrie par rapport à la première bissectrice du graphe de la fonction f .*

Quelques fonctions classiques.

On rappelle au préalable que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Elle admet la fonction $x \mapsto \ln(x)$ comme application réciproque continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Cela permet de définir l'un e de ces deux fonctions dès que l'autre est définie. Ainsi l'exponentielle est la réciproque de la primitive de $x \mapsto 1/x$ qui vaut 0 en 1 . Mais le logarithme est aussi la réciproque de la fonction qui vaut 1 en 0 et est égale à sa propre dérivée.

Exemple 2.9. *Soit n un entier non nul. La fonction $x \mapsto x^n$ est définie, continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Elle y admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante. Elle est notée $y \mapsto x^{\frac{1}{n}}$.*

Exemple 2.10. *La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. On note $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ sa réciproque, définie et continue sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.*

Exemple 2.11. *La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue et strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. On note $x \mapsto \mathrm{Arccos}(x)$ sa réciproque, définie et continue sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$.*

Exemple 2.12. *La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On note $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ sa réciproque, définie et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.*

Exemple 2.13. *On note $\mathrm{sh}x$ la fonction $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On vérifie que cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante. On notera Argsh sa réciproque. Elle est définie, continue, impaire et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 2.14. *On note $\mathrm{ch}x$ la fonction $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. On vérifie que cette fonction est définie et continue à valeurs dans $[1, +\infty[$, paire et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On notera Argch sa réciproque. Elle est définie, continue, impaire et strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$.*

Exemple 2.15. *On note $\mathrm{th}x$ la fonction $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. On vérifie que cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante à valeurs dans $]-1, 1[$. On note $x \mapsto \mathrm{Argth}(x)$ sa réciproque, définie et continue sur $]-1, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*