Algèbre et analyse élémentaires II
Analyse

Dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle.

Il s'agit dans ce paragraphe d'introduire les notions liées à la dérivabilité.

1 Dérivabilité des fonctions numériques de la variable réelle.

Définition 1.1. *Soit f une fonction numérique de la variable réelle x . On suppose que f est définie sur un voisinage de x_0 . On dit que f est dérivable en un point x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers une limite finie l si x tend vers x_0 . On appelle alors nombre dérivé en x_0 la limite l et on pose $f'(x_0) = l$ (notation de Newton) ou $\frac{df}{dx}(x_0) = l$ (notation de Leibnitz).*

Remarque 1.2. *Le nombre dérivé est unique s'il existe (comme toute limite).*

Définition 1.3. *Soit f une fonction numérique. On suppose que f est définie sur l'intervalle I . On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . On note $\mathcal{D}(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I*

Exemple 1.4. *La fonction constante $x \mapsto C$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ est 0 . La fonction affine $x \mapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ est a .*

Exemple 1.5. *La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Elle n'est pas dérivable en 0 . La fonction $x \mapsto E(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.*

Remarque 1.6. *(Interprétation géométrique) Soient $M = (x, f(x))$ et $M_0 = (x_0, f(x_0))$ les points du graphe de f . Alors le rapport ci-dessus représente la pente de la droite joignant M_0 à M . Alors si f est dérivable en x_0 , cette droite a pour limite la droite d'équation*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

que l'on appelle tangente à la courbe en M_0 .

Remarque 1.7. *Lorsque le rapport tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on parle parfois de l'existence d'une tangente verticale.*

Proposition 1.8. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I . Soit x_0 un point de l'intérieur de I . Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .*

Démonstration. Il suffit de noter que $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)r(x)$ où $r(x)$ tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 . Donc $f(x) - f(x_0{}^\circ$ tend bien vers 0 si x tend vers x_0 .

Théorème 1. *Opérations sur les fonctions dérivables. Soient f et g des fonctions numériques. Soit λ un scalaire réel. Soit x_0 un réel.*

- *Si f et g sont dérivables en x_0 alors la fonction $f + g$ est dérivable en x_0 ; de plus $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;*
- *Si f est dérivable en x_0 , alors la fonction λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$;*
- *Si f et g sont dérivables en x_0 alors la fonction fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;*
- *Si f et g sont dérivables en x_0 et si, de plus, $g(x_0)$ est non nulle alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$;*

Démonstration. Les deux premiers résultats sont immédiats (théorème sur les limites).

Étudions le taux de variation de la fonction fg :

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

d'où le résultat cherché.

De même

$$\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}$$

soit

$$\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) .$$

Enfin

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} .$$

Remarque 1.9. *Le dernier résultat est plus facile à écrire avec la notation de Leibnitz :*

$$\frac{\mathrm{d(g\circ f)}}{\mathrm{dx}}(x_0)=\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dy}}(y_0)\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(x_0) .$$

Corollaire 1.10. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert I . On dit que f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I . L'ensemble $\mathcal{D}(I;\mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$).*

Corollaire 1.11. *Soit f une fonction paire (resp. impaire) sur l'intervalle $I=[-a,a]$ (où $a>0$). On suppose que f est dérivable sur I . Alors la fonction dérivée de f est impaire (resp. paire).*

Corollaire 1.12. *Soit f une fonction continue strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle J et soit g la fonction réciproque de f (elle est donc continue et strictement monotone). Si f est dérivable en x_0 point intérieur à I et que $f'(x_0)\neq 0$, alors*

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} .$$

Remarque 1.13. *On en déduit les dérivées des fonctions réciproques des fonctions classiques :*

- *On sait que $\ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée égale à $\frac{1}{x}$. Alors $\exp y=\exp(\ln x)$ a pour dérivée $\frac{1}{\frac{1}{x_0}}=x_0=\exp y_0$.*
- *Si, au contraire, on sait que $\exp x$ a pour dérivée $\exp x$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\ln y=\ln(\exp x)$ a pour dérivée $\frac{1}{\exp x_0}=\frac{1}{y_0}$.*
- *On sait que $\sin x$ a pour dérivée $\cos x$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Sur cet intervalle, on a $\cos x=\sqrt{(1-\sin^2 x)}$. D'où, si y appartient à $]-1,1[$,*

$$\mathrm{Arcsin}'(y)=\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

- *De même on sait que $\cos x$ a pour dérivée $-\sin x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle, on a $\sin x=\sqrt{(1-\cos^2 x)}$. D'où, si y appartient à $]-1,1[$,*

$$\mathrm{Arccos}'(y)=-\frac{1}{\sin(x)}=-\frac{1}{\sqrt{(1-\cos^2 x)}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

— *On sait que* $\tan x$ *a pour dérivée* $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ *sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *D'où, si* y *appartient à* $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2} \ .$$

— *On sait que* $\mathrm{sh}(x)$ *a pour dérivée* $\mathrm{ch}(x)$ *sur* $\mathbb{R}$. *Par ailleurs* $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. *D'où* $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)}$ *et*

$$\mathrm{Argsh}'(y) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \ .$$

Notons qu'un simple calcul montre que l'on a également

$$\mathrm{Argsh}'(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \ .$$

— *On sait que* $\mathrm{ch}(x)$ *a pour dérivée* $\mathrm{sh}(x)$ *sur* $\mathbb{R}$. *Par ailleurs* $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. *D'où, si* $x \geq 0$, $\mathrm{sh}(x) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(x) - 1}$ *et, si* $y > 1$,

$$\mathrm{Argch}'(y) = \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \ .$$

Notons qu'un simple calcul montre que l'on a également

$$\mathrm{Argch}'(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \ .$$

— *Enfin on sait que* $\mathrm{th}(x)$ *a pour dérivée* $1 - \mathrm{th}^2(x)$. *D'où, si* $y \in]-1, 1[$,

$$\mathrm{Argth}'(y) = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(x)} = \frac{1}{1-y^2} \ .$$

Notons qu'un simple calcul montre que l'on a également

$$\mathrm{Argth}'(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \ .$$

Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis.

Théorème 2. *(de Rolle) Soit* f *une fonction continue sur l'intervalle* $I = [a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *On suppose que* $f(a) = f(b) = 0$. *Alors il existe* c *dans* $]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

(Indication de la) Démonstration. Comme f est continue sur l'intervalle $I = [a, b]$, elle y est bornée et atteint son maximum M en c et son minimum en c' . Si $M = m = 0$, c'est que notre fonction est constante. Alors le théorème de Rolle est immédiat. Nous pouvons donc supposer que (par exemple) $M \neq 0$. Alors $c \in]a, b[$. Mais $f'(c)$ est la limite lorsque x tend vers c par valeurs inférieures (resp. par valeurs supérieures) du rapport $\frac{f(x)-c}{x-c}$. Or si x est plus petit que c , le numérateur de ce rapport est négatif ($\forall x \in [a, b]$, $f(c) = M \geq f(x)$) et le dénominateur aussi. Le rapport est donc positif ou nul et, par passage à la limite, $f'(c) \geq 0$. Mais si x est plus grand que c , le numérateur de ce rapport reste négatif ($\forall x \in [a, b]$, $f(c) = M \geq f(x)$) et le dénominateur devient positif. Le rapport est donc négatif ou nul et, par passage à la limite, $f'(c) \leq 0$. Bref $f'(c) = 0$.

Remarque 1.14. *Interprétation géométrique. Entre deux points où le graphe de* f *coupe l'axe des* x , *il existe donc nécessairement (au moins) un point où la tangente est horizontale.*

Théorème 3. *(des accroissements finis) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \ .$$

(Indication de la) Démonstration. Nous allons nous ramener au théorème de Rolle. Introduisons la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ (x - a) \ .$$

On remarquera que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Par ailleurs $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ x$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc un point c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ soit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque 1.15. *On trouve parfois la formulation suivante. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On pose $h = b - a$. Alors il existe θ dans $]0, 1[$ tel que*

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h) \ .$$

Remarque 1.16. *Interprétation géométrique. Entre deux points du graphe de f , il existe donc nécessairement (au moins) un point où la tangente est parallèle à la corde.*

Corollaire 1.17. *Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I . Elle y est croissante si et seulement si elle y admet une dérivée positive ou nulle.*

Corollaire 1.18. *Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I . On suppose qu'elle y admet une dérivée strictement positive. Alors f est strictement croissante.*

Remarque 1.19. *Naturellement, comme le montre le cas de la fonction x^2 , une fonction peut être strictement monotone sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée s'annule en un point.*

Corollaire 1.20. *Théorème des accroissements finis (variante). Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que la fonction dérivée $|f'|$ admet une borne supérieure M sur l'intervalle $]a, b[$. Alors*

$$\forall x \in [a, b]\ |f(x) - f(a)| \leq M|x - a| \ .$$

Remarque 1.21. *On remarquera que les hypothèses du corollaire précédent sont satisfaites lorsque la fonction f admet une fonction dérivée sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier qui est de plus* continue *sur l'intervalle $[a, b]$.*

Définition 1.22. *On note $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ l'espace (vectoriel) des fonctions continues, dérivables à dérivée continue sur l'intervalle I .*

2 Dérivées d'ordre supérieur.

Généralités

Nous allons donner une définition (par récurrence sur l'entier n). Soit f une fonction définie sur l'intervalle (ouvert) I . Si f est dérivable sur I , sa dérivée f' est aussi une fonction définie sur I . Si elle est elle-même dérivable, on appellera f" sa dérivée et on l'appelle la dérivée seconde de f . Plus généralement :

Définition 2.1. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle (ouvert) I . Soit $f^{(n)}$ sa dérivée d'ordre n sur I . Si cette fonction est elle-même dérivable, on la note $f^{(n)}$ et on l'appelle dérivée $n+1$-ième de f sur I .*

Définition 2.2. *On note $\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions admettant des dérivées sur I jusqu'à l'ordre n et dont la dérivée n-ième est continue sur I .*

Proposition 2.3. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle (ouvert) I . On suppose que f admet une dérivée à l'ordre $n+1$ sur I . Alors f appartient à $\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$.*

Théorème 4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de l'intérieur de I . Alors*

— *si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n en x_0 , alors $f+g$ est dérivable à l'ordre n en x_0 et*
$$(f+g)^n(x_0) = f^n(x_0) + g^n(x_0) \ .$$
— *si λ est un réel et f une fonction dérivable à l'ordre n en x_0 alors λf est dérivable à l'ordre n en x_0 et*
$$(\lambda f)^n(x_0) = \lambda f^n(x_0) \ .$$
— *si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n en x_0 , alors $f \times g$ est dérivable à l'ordre n en x_0 .*

— *si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n en x_0 , si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable à l'ordre n en x_0 .*

— *si f est dérivable à l'ordre n en x_0 ainsi que g en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable à l'ordre n en x_0 .*

Démonstration. Les deux premières propriétés sont faciles. Montrons les autres par récurrence. En effet, par exemple, $(fg)^{(n+1)} = (fg)')^{(n)} = ((f'g + fg')^{(n)} = (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)}$ et l'on applique l'hypothèse de récurrence aux fonctions f', g et f, g' respectivement. On opère de façon totalement analogue pour les autres propriétés.

Proposition 2.4. *(Formule de Leibnitz) Soit I un intervalle contenant x_0 . Soient f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n en x_0 . Alors*
$$(fg)^{(n)}(x) = (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x) \ .$$

Démonstration. Le cas $n = 1$ a été vu plus haut. Démontrons la formule à l'ordre $n+1$.
$$\left[(fg)^{(n)}\right]'(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x)\right]' = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(f^{(i+1)}(x) g^{(n-i)}(x) + f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x)\right)$$
soit
$$\left[(fg)^{(n)}\right]'(x) = \sum_{h=0}^{n+1} \left(\frac{n!(n+1-h)}{h!(n+1-h)!} + \frac{n!(h)}{h!(n+1-h)!}\right) f^{(h)}(x) g^{(n+1-h)}(x)$$
et
$$\left[(fg)^{(n)}\right]'(x) = \sum_{h=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{h!(n+1-h)!} f^{(h)}(x) g^{(n+1-h)}(x) \ .$$

Définition 2.5. *On notera $\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ l'espace (vectoriel) des fonctions continues, dérivables à l'ordre n dont la dérivée n-ième est continue sur l'intervalle I .*

Formule(s) de Taylor.

Théorème 5. *(Taylor-Lagrange) Soit f une fonction numérique de la variable réelle définie sur l'intervalle $I = [a, b]$. On suppose que f est dérivable à l'ordre $n+1$ sur l'intervalle $]a, b[$. Alors il existe un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}\ (b-a)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\ (b-a)^{n+1}\ .$$

Démonstration. Variante 1. Posons

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}\ (x-a)^i - A(x-a)^{n+1}$$

où la constante réelle A sera choisie ultérieurement. Par construction $\varphi(a) = 0$ et on choisit A de façon à ce que $\varphi(b) = 0$. On a par ailleurs

$$\forall h\ ;\ 0 \le h \le n+1 \quad \varphi^{(h)}(x) = f^{(h)}(x) - \sum_{i=h}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-h)!}\ (x-a)^{i-h} - A\frac{(n+1)!}{(n+1-h)!}(x-a)^{n+1-h}\ .$$

On en déduit que

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - A(n+1)!\ .$$

Mais d'après le théorème de Rolle appliqué φ sur l'intervalle $[a, b]$, on voit qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. On constate que $\varphi'(a) = 0$ ainsi que d'ailleurs les $\varphi^{(h)}(a)$ pour $0 \le h \le n$. D'où, par récurrence, en appliquant le théorème de Rolle aux fonctions $\varphi^{(h)}$ (pour $0 \le h \le n$), on en déduit l'existence de points c_h vérifiant

$$a < c_n < c_{n-1} < \ldots < c_1 = c < b$$

et tels que $\varphi^{(h)}(c_h) = 0$. On peut donc appliquer une dernière fois le théorème de Rolle à la fonction $\varphi^{(n)}$ et trouver ainsi un c dans $]a, b[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$ soit

$$f^{(n+1)}(c) = A(n+1)!\ .$$

Démonstration. Variante 2. Posons

$$\psi(x) = f(x) - f(b) + \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-x)^i}{i!} f^{(i)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A\ .$$

Alors

$$\psi'(x) = f'(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-x)^{i-1}}{(i-1)!} f^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-x)^i}{i!} f^{(i+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} A\ .$$

Soit

$$\psi'(x) = f'(x) - f'(x) - \sum_{i=2}^{n} \frac{(b-x)^{i-1}}{(i-1)!} f^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-x)^i}{i!} f^{(i+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} A$$

et

$$\psi'(x) = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(b-x)^j}{j!} f^{(j+1)}(x) + \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-x)^i}{i!} f^{(i+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} A = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(f^{(n+1)}(x) - A \right)\ .$$

Or $\psi(b) = 0$ par construction et on peut choisir A pour que $\psi(a) = 0$. Dans ce cas, une simple application du théorème de Rolle à la fonction ψ montre qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $\psi'(c) = 0$ soit encore $f^{(n+1)}(c) = A$ (ce que l'on cherchait à démontrer).

Corollaire 2.6. *Soit P une fonction polynomiale de degré au plus n . Alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}\ (x-a)^i\ .$$

On notera en effet que $P^{(n+1)}$ est identiquement nulle. On retrouve ainsi un résultat connu sur les polynômes (P est déterminé par sa valeur en a et les valeurs en a de ses n premières dérivées).

Corollaire 2.7. *Soit f une fonction numérique de la variable réelle définie sur l'intervalle $I = [a,b]$ et dérivable à l'ordre $n+1$ sur l'intervalle $]a,b[$. On suppose que la valeur absolue de cette dérivée d'ordre $n+1$ est bornée par M . Alors*

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}\ (b-a)^i \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}\ |b-a|^{n+1}\ .$$

Corollaire 2.8. *Soit f une fonction numérique de la variable réelle définie sur l'intervalle $I = [a,b]$ et dérivable à l'ordre n sur l'intervalle $]a,b[$. On suppose qu'en x_0 point de $]a,b[$, les nombres dérivés vérifient $\forall 1 \leq i \leq n-1\ f^{(i)}(x_0) = 0$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors on dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si n est impair. Si n est pair, le point est un extremum local (minimum local si $f^{(n)}(x_0) > 0$ et maximum local si $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Démonstration. On a l'égalité

$$f(b) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\ (b-x_0)^n\ .$$

Donc si n est pair, on voit que l'expression $f(b) - f(x_0)$ est du signe de $f^{(n)}(c)$ c'est à dire du signe de $f^{(n)}(x_0)$ donc positive si $f^{(n)}(x_0) > 0$ et négative si $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Par contre si n est impair, on voit que l'expression $f(b) - f(x_0)$ change de signe lorsque b est proche de x_0 .

Théorème 6 (Théorème de Taylor-Young)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$ contenant le point x_0 . On suppose que f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies sur I . On suppose que f est dérivable à l'ordre $n+1$ en x_0 . Alors*

$$f(x_0+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\ h^i + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\ h^{n+1} + f^{(n+1)}(x_0)\epsilon(x)$$

où $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 .