Feuille de TD - droites et plans

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1. On donne un point $C(2, -3)$, et une droite $\mathcal{D}_1 : x - 4y + 5 = 0$.

1. Représentez graphiquement la situation.
2. Trouvez une équation de la droite $\mathcal{D}_2$ qui passe par C et est parallèle à $\mathcal{D}_1$.

Exercice 2. $\mathcal{D}_1$ est la droite qui passe par le point $A(-1, -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\mathcal{D}_2$ est la droite qui passe par le point $B(3, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Représentez graphiquement la situation.
2. Déterminez des équations des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
3. Etudier l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 3. On donne la droite $\Delta : 5x - 7y + 11 = 0$, ainsi que la famille de droites (dépendant d'un paramètre m) $\mathcal{D}_m : mx - y + 3 = 0$.

1. Représentez graphiquement les droites $\mathcal{D}_{-1}$ et $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$.
2. Etudier les valeurs de m telles que les droites Δ et $\mathcal{D}_m$ sont parallèles. Préciser la situation : parallélisme strict ou égalité.
3. Lorsque les droites Δ et $\mathcal{D}_m$ sont sécantes, calculer le point d'intersection.

Exercice 4. Donner une représentation paramétrique puis une équation cartésienne de la droite passant par les points A et B dans les cas suivants :
1. $A(1; 2)$, $B(3; 1)$.
2. $A(-2; 3)$, $B(1; 1)$.
3. $A(1; -2)$, $B(1; 2)$.

Exercice 5. Trouver un vecteur directeur puis donner une représentation paramétrique des droites d'équations :
$2x + 3y = 2$; $-x - 3y = 0$; $y = 0$; $x = 0$; $4x - 5y = 0$.

Dans la suite on travaille dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Exercice 6. On donne les points $A(-1, 6, 7)$, $B(2, 5, 8)$ et $C(-3, 4, 0)$.

1. Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P qui passe par ces trois points.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan P.
3. Déterminer l'intersection de ce plan P avec la droite D d'équations paramétriques

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 2t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. On considère :
la droite $\mathcal{D}_1$ d'équations cartésiennes $x-3=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+9}{5}$;
la droite $\mathcal{D}_2$ d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 7+3s \\ y & = & 10+5s \\ z & = & -10-6s \end{array}\right. \qquad (s \in \mathbb{R}.$

1. Prouver que ces deux droites sont contenues dans un même plan.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques, et une équation cartésienne du plan commun.

Exercice 8. On considère :
la droite $\mathcal{D}_1$ qui passe par les points $A1(0,-2,3)$, $B1(5,-1,2)$;
la droite $\mathcal{D}_2$ qui passe par les points $A_2(2,3,1)$, $B_2(-1,6,0)$.

1. Décrivez $\mathcal{D}_1$ par un système d'équations de la forme
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-x_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\ .$$
2. Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$ qui vérifie les trois conditions suivantes :
$\mathcal{D}$ passe par $L(3,0,4)$,
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ sont coplanaires,
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires.

Exercice 9. On considère :
le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne $7y-z-4=0$, le plan $\mathcal{P}_2$ d'équations paramétriques
$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+2r \\ y & = & r \\ z & = & s \end{array}\right. \qquad (r \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}.$

1. Exprimer la droite d'intersection $\mathcal{D}_1$ des deux plans sous forme paramétrique.
2. Déterminer une forme paramétrique de la droite $\mathcal{D}_2$ qui passe par l'origine et est parallèle aux deux plans.

Exercice 10. On considère deux familles de droites dépendant d'un paramètre m :
$\mathcal{D}_1$ passe par $A_1(2,1,1)$ et est dirigée par $u_1\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{D}_2$ passe par $A2(-1,1,-1)$ et est dirigée par $u_2\begin{pmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

Exercice 11. 1. Donner une équation cartésienne du plan de l'espace passant par les points A, B et C dans les cas suivants :
(1) $A(1;2;0)$, $B(3;1;-1)$, $C(1;-1;1)$.
(2) $A(-2;3;3)$, $B(1;1;1)$, $C(-1;1;2)$.
(3) $A(1;-2;-1)$, $B(1;2;0)$, $C(1;0;1)$.
2. Détermier l'intersection de ces plans.

Exercice 12. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de l'espace passant par les points A et B dans les cas suivants :
(1) $A(1;1;0)$, $B(-1;0;2)$.
(2) $A(2;2;3)$, $B(0;0;1)$.
(3) $A(-1;-2;-1)$, $B(1;2;1)$.
Vérifier si ces droites ont des points d'intersection.

Exercice 13. Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan P dans les cas suivants :
(1) $A(1;1;0)$, $B(-1;2;-1)$, $P : 2x + 3y + z = 0$.
(2) $A(0;0;1)$, $B(1;1;1)$, $P : x + y + z = 0$.
(3) $A(-1;-2;1)$, $B(1;1;2)$, $P : x - y - z = 0$.

Exercice 14. Donner une equation paramétrique de la droite (AB) dans les cas (1), (2) et (3) de l'exercice précédent.

Exercice 15. Donner un vecteur directeur puis une équation paramétrique de la droite d'intersection des plans P et P' dans les cas suivants :
(1) $P : x + y + z = 2$, $P' : 2x - y + z = 1$.
(2) $P : x - 2y + 3z = -1$, $P' : 3x + y + z = 0$.
(3) $P : 2x + y = 0$, $P' : z = 0$.

Exercice 16. Donner une représentation paramétrique pour les plans d'équation :
a) $x + y + z = 2$;
b)$2x - y + z = 1$;
c) $x - 2y + 3z = -1$;
d)$3x + y + z = 0$;
e) $2x + y = 0$;
f) $z = 0$.