

Feuille de TD 1 - Démonstrations

1 Par absurde

Exercice 1. Démontrer que si vous rangez $(n + 1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 2. Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n + 1$ réels x_0, x_1, \dots, x_n dans $[0, 1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété.
4. Donnez-en une autre preuve en utilisant le principe des tiroirs.

2 Par contraposée

Exercice 4. Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair.

A-t-on démontré la proposition initiale ?

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

Si $\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon$, alors $a = 0$.

Exercice 6. 1. Si x et y sont deux entiers dont le produit est pair, alors au moins l'un des deux doit être pair.

2. Si x et y sont deux entiers dont le produit est impair, les deux doivent être impairs.