Université Paris Diderot Année 2017-2018

MIAN

Interrogation

Exercice 1. Étudier le système

$$S : \begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a y a-t-il une solution ? Dans ce cas, écrire toutes les solutions du système, en fonction de a.

Solution :

On re-écrit le système matriciellement et on applique la méthode d'élimination de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1-2a & 1-3a \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3-2a & 5-3a \end{array}\right)$$

On voit que si $a = 3/2$, la dernière équation donne $0z = 1/2$, qui est fausse. Donc, pas de solution.

Si $a \neq 3/2$, on trouve

$$z = \frac{5-3a}{3-2a}, \quad y = -4 + 2z = \frac{2a-2}{3-2a}, \quad x = 3 - 2z = \frac{1}{2a-3}. \tag{1}$$

Exercice 2. Soient $v_1 = (1, 2, 3)$ et $v_2 = (1, 1, 1)$.

(i) Écrire l'équation paramétrique du plan P qui contient v_1 et v_2.

(ii) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de P (justifier) et en déduire sa dimension.

(iii) Écrire une équation cartésienne du plan P.

(iv) Trouver une équation paramétrique pour les points (x, y, z) qui sont dans l'intersection du plan P avec le plan Q d'équation $x + y + z = 1$.

Solution :

(i)

$$P = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \tag{2}$$

(ii) On a $P = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$. Évidement $P \subset \mathbb{R}^3$ (sous-ensemble). Comme on a vu dans le cours, il est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: soient $v, w \in P$, qu'on écrira alors comme $v = \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2$ et $w = \lambda_2 v_1 + \mu_2 v_2$ pour certaines constantes $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$; pour tous les $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha v + \beta w = \alpha(\lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2) + \beta(\lambda_2 v_1 + \mu_2 v_2) = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)v_1 + (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)v_2 \quad (3)$$

et donc $\alpha v + \beta w \in P$.

L'espace engendré par deux vecteurs (parfois dites "directeurs") dans $\mathbb{R}^3$ est un plan. Dans ce cas, comme on a dit, $P = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$. Évidement les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires ; en fait, après l'élimination de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

on trouve deux pivots. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de P et alors P a dimension 2 (cardinalité de sa base).

(iii) Le point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à P si et seulement si le système

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

a une solution (les inconnues sont $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

On fait pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & -2 & z-3x \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & 0 & x-2y+z \end{array}\right)$$

Alors ce système a une solution si et seulement si $x - 2y + z = 0$. Autrement dit, l'équation cartésienne de P est $x - 2y + z = 0$.

(iv)

$$P \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2y + z = 0 \text{ et } x + y + z = 1 \right\} \quad (6)$$

Le points d'intersections correspond alors aux solutions du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Alors z est une variable libre ; les solutions sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Exercice 3. Soient $v_1 = (5, 1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 2, 3, -2)$, $v_3 = (3, 5, 8, -1)$ et $v_4 = (11, 0, 1, 8)$.

(i) Montrer que $\mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\}) = \mathrm{Vect}(\{v_3, v_4\})$.

(ii) Décrire l'espace $F = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$ par un système d'équations cartésiennes.

(iii) Montrer que F est contenu dans $G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 11z+11w-9x-10y = 0\}$. Est-ce que $F = G$?

Solution :

(i) Prenons les 4 vecteurs comme colonnes d'une matrice et faisons l'élimination de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 11 & 22 & -11 \\ 0 & 17 & 34 & -17 \\ 0 & -7 & -14 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on considère que les colonnes 1, 2 et 3, on obtient une solution au système $\alpha v_1 + \beta v_2 = v_3$. En fait, ça dit que

$$v_3 = v_1 + 2v_2. \tag{8}$$

De façon analogue, les colonnes 1, 2 et 4 impliquent que

$$v_4 = 2v_1 - v_2. \tag{9}$$

Alors, $\mathrm{Vect}(\{v_3, v_4\}) \subset \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$, car toute combinaison linéaire de v_3 et v_4 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 si on utilise (8)-(9).
De plus, les relations (8)-(9) sont inversibles. On en déduit

$$v_1 = \frac{1}{5}(v_3 + 2v_4) \tag{10}$$
$$v_2 = \frac{1}{2}(v_3 - \frac{1}{5}(v_3 + 2v_4)). \tag{11}$$

D'où $\mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\}) \subset \mathrm{Vect}(\{v_3, v_4\})$.

(ii) $(x, y, z, w) \in F$ si et seulement le système suivante a une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 2 & 3 & z \\ 3 & -2 & w \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & x \\ 0 & 11 & 5y-x \\ 0 & 17 & 5z-2x \\ 0 & -7 & 5w-3x \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & x \\ 0 & 11 & 5y-x \\ 0 & 0 & (5z-2x)/17-(5y-x)/11 \\ 0 & 0 & (5w-3x)/(-7)-(5y-x)/11 \end{array}\right)$$

Ce système a une solution ssi $(5z-2x)/17-(5y-x)/11 = 0$ et $(5w-3x)/(-7)-(5y-x)/11 = 0$. En simplifiant, on obtient le système d'équations cartésiennes

$$-8x + 11w + 7y = 0 \tag{12}$$

$$11z - x - 17y = 0 \tag{13}$$

(iii) Il faut simplement vérifier que $v_1, v_2 \in G$, car G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et on a vu dans le cours que tout espace vectoriel que contient v_1, v_2 contient aussi $\mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$. Comme v_1 satisfait l'équation de G ($11\times2+11\times3-9\times5-10\times1 = 0$), on déduit que $v_1 \in G$. Avec un calcul analogue, on preuve que $v_2 \in G$.

$F \neq G$ car la dimension de F est deux (comparer avec la partie (ii) de l'exercice précédent) et la dimension de G est 3 (en général, un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ a dimension $n-1$).