7. Les différents types de démonstrations

En mathématiques, une **démonstration** est un raisonnement qui permet, à partir de certains axiomes, d'établir qu'une assertion est nécessairement vraie.
Les démonstrations utilisent la logique mais incluent habituellement des éléments du langage naturel en évitant tant que possible d'introduire des ambiguïtés.
Un résultat qui est démontré s'appelle un **théorème.** Une fois le théorème démontré, il peut être utilisé comme base pour démontrer d'autres assertions.
Une assertion qui est supposée vraie mais qui n'a pas encore été démontrée est appelée une **conjecture.**

7.1. Un peu de logique

En mathématiques, une proposition est un énoncé mathématique, susceptible d'être démontré ou réfuté, pour lequel il fait sens de parler de vérité.

Le principe de non-contradiction

La logique est basée sur le principe de non-contradiction. Ce principe dit qu'une proposition ne peut pas être vraie et fausse à la fois.

Le principe du tiers exclu

Le principe du tiers exclu stipule que si une proposition n'est pas vraie, alors elle est fausse (ou que si elle n'est pas fausse, alors elle est vraie).
Ce principe est vrai pour la plupart des propositions, bien qu'il y ait des expressions qui ne vérifient pas le principe du tiers exclu. Cité par Paul de Tarse (Saint Paul) dans le Nouveau Testament, le **paradoxe du menteur** sert de base au développement de la logique :

Épiménide (un Crétois) dit: « Tous les Crétois sont des menteurs. »

Si Épiménide dit la vérité, il ment puisqu'il est crétois. Donc, tous les Crétois ne sont pas des menteurs. S'il ment, au contraire, en affirmant cela, alors il dit effectivement la vérité. Sa proposition est à la fois vraie et fausse, c'est-à-dire contradictoire.

L'implication

Lorsqu'on a deux propositions P et Q, on écrit $P \Rightarrow Q$ pour dire que l'expression P implique l'expression Q. Dans ce cas, P est l'hypothèse et Q est la conclusion.
Il y a différentes façons de lire $P \Rightarrow Q$:

- si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie (si P, alors Q) ;
- la proposition Q est vraie si la proposition P est vraie (Q si P) ;
- la proposition P est vraie seulement si la proposition Q est vraie (P seulement si Q).

Exemple
Le quadrilatère $ABCD$ est un carré $\Rightarrow$ $ABCD$ est un parallélogramme.

On dit que :

- $ABCD$ est un carré est une condition suffisante pour que $ABCD$ soit un parallélogramme ;
- $ABCD$ est un parallélogramme est une condition nécessaire pour que $ABCD$ soit un carré.

On peut remarquer que :

- $ABCD$ est un parallélogramme n'est pas une condition suffisante pour que $ABCD$ soit un carré ;
- $ABCD$ est un carré n'est pas une condition nécessaire pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

La réciproque

La réciproque d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $P \Leftarrow Q$.

Dans l'exemple ci-dessus, on peut dire que l'implication « si ABCD est un carré alors ABCD est un parallélogramme » est une implication juste mais que sa réciproque est fausse.

L'équivalence

Lorsqu'on a deux propositions *P* et *Q* telles que $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftarrow Q$, on écrit : $P \Leftrightarrow Q$ et on dit que *la proposition P est équivalente à la proposition Q*.
Au lieu de dire que *P est équivalent à Q*, on peut aussi dire *P si et seulement si Q* (*abrégé P ssi Q*).

Exemple
ABC est un triangle rectangle en *A* $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

Le contraire d'une expression bien formée

Si *P* est une proposition, alors sa proposition contraire (ou négation) est notée *non P*, $\neg P$ ou $\sim P$.

Question
D'après vous, quelle est la négation de « Tous les Crétois sont des menteurs »?
a) Tous les Crétois disent la vérité.
b) Les Crétois disent quelquefois la vérité.
c) Il existe au moins un Crétois qui dit parfois la vérité.

7.2. Démonstration directe

La démonstration directe consiste à démontrer la proposition énoncée (par exemple un théorème) en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

Exemple Soit *n* un nombre entier positif ou nul ($n \in \mathbb{N}$) et considérons $P(n) = n^2+7n+12$. Alors il n'existe pas de *n* tel $\sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$.

Démonstration Pour tout *n*, on a :

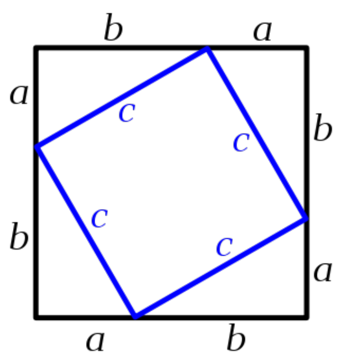
$$n^2+ 6n+9 < n^2+ 7n+12 < n^2+ 8n+16,$$

$$\text{d'où } (n+3)^2 < P(n) < (n+4)^2.$$

Puisque $n+3 > 0$, on déduit que $(n+3) < \sqrt{P(n)} < (n+4)$.

Donc $\sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$, puisqu'il est strictement compris entre deux entiers consécutifs.

Exercice 7.1 Utilisez le dessin ci-dessous pour démontrer le théorème de Pythagore :



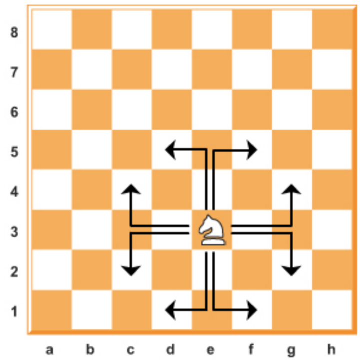
Exercice 7.2

Le triangle ABC est rectangle en A.
La hauteur issue de A coupe le segment $[BC]$ en H.
Le point I est le milieu du segment $[HB]$ et le point J, le milieu du segment $[AH]$.
Démontrez que les droites (CJ) et (AI) sont perpendiculaires.

Indication : dans un triangle, la droite qui relie les 2 milieux de 2 côtés est parallèle au 3$^{\text{ème}}$ côté.

Exercice 7.3

Un $(m\,;n)$-crocodile est une pièce d'échecs féerique qui, en un coup, peut avancer de m cases dans une direction (horizontale ou verticale) puis de n cases dans la direction perpendiculaire. Un $(2\,;1)$-crocodile est donc le cavalier du jeu d'échecs ordinaire (voir schéma ci-contre).



Montrez que, pour n'importe quels entiers m et n, on peut colorier les cases d'un échiquier infini en noir et blanc de sorte que deux cases reliées par un saut de $(m\,;n)$-crocodile soient toujours de couleurs différentes.

Indication : étudiez la parité de m et n.

Exercice 7.4

Démontrez que pour tout nombre premier p supérieur à 3, il existe un entier m tel que $p^2 = 24m + 1$.

7.3. Démonstration par la contraposée

La contraposée

La contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple
La contraposée de :
« Si le quadrilatère $ABCD$ est un carré, alors $ABCD$ est un parallélogramme »
est :
« Si $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, alors $ABCD$ n'est pas un carré ».

Théorème

$$P \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q \Rightarrow \neg P$$

Ce théorème signifie que l'on peut prouver que P implique Q en démontrant que *non* Q implique *non* P (et vice versa).

Exercice 7.5

Énoncez les contraposées des propositions suivantes :

a) Si j'ai mon cours de piano hebdomadaire, alors c'est lundi.
b) Ceux qui parlent ne savent pas.
c) Si le dernier chiffre d'un nombre n est 2, 3, 7 ou 8, alors n n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 7.6

Démontrez les propositions suivantes par la contraposée :

a) Si x est un nombre réel tel que $x^2 < 1$ alors $x > -1$.
b) Si x est un nombre réel tel que $x^3 + x^2 - 2x < 0$ alors $x < 1$.
c) Si x^2 est impair, alors x est impair.

7.4. Démonstration par l'absurde

Elle consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée et de montrer qu'on aboutit alors à une contradiction (impossibilité).

Exemple Comme exemple, nous démontrerons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Rappelez-vous qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut être exprimé sous la forme *a*/*b*, où *a* et *b* sont des nombres entiers et *b* est différent de 0.
Tout d'abord, supposons que $\sqrt{2}$ est *rationnel* :

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

où *a* et *b* sont premiers entre eux (i.e. les deux entiers n'ont pas de facteurs en commun). En d'autres mots, *a/b* est sous forme irréductible. Continuons :

$$2=\frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2$$

Nous avons maintenant trouvé que a^2 est un certain entier multiplié par 2. Par conséquent, a^2 doit être divisible par 2 ; autrement dit, il est pair. Comme le carré d'un nombre impair est lui-même impair, *a* doit être pair. Nous pouvons maintenant écrire que $a = 2c$, où *c* est un autre entier.

$$2b^2 = (2c)^2$$
$$2b^2 = 4c^2$$
$$b^2 = 2c^2$$

Nous avons découvert que b^2 est aussi pair. En suivant le raisonnement précédent, *b* doit être un entier pair. Ici, nous avons une contradiction : les deux nombres entiers *a* et *b* sont pairs. En d'autres termes, nous venons de démontrer que ces deux nombres ont un facteur commun : 2. Mais nous avons supposé au départ que ces deux nombres n'avaient pas de facteur commun ! Puisqu'une telle contradiction a été établie, nous **devons** conclure que notre supposition d'origine était fausse.
Par conséquent, on ne peut pas trouver deux entiers *a* et *b* premiers entre eux tels qu'on puisse écrire $\sqrt{2}$ sous la forme *a/b*, donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 7.7 Démontrez que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 7.8 Démontrez qu'il existe un nombre infini de nombres premiers.

Exercice 7.9 On couvre un carré 6 x 6 avec 18 dominos sans chevauchements et sans dépasser les bords. Montrez qu'il existe toujours une droite qui coupe le carré en deux parties mais qui ne divise aucun des dominos.

7.5. Démonstration par récurrence ou induction

Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a les deux assertions suivantes :

1. $P(0)$ est vraie (ancrage) ;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$ (hérédité).

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'hypothèse d'hérédité signifie que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi. Dans ces

conditions, $P(n)$ est vraie pour tout n. En effet, $P(0)$ est vraie par l'hypothèse d'ancrage, donc $P(1)$ l'est par hérédité, donc $P(2)$ aussi pour la même raison, etc. On a un « effet dominos ».

Une démonstration par récurrence contient toujours deux étapes :
1. **L'initialisation** : c'est la vérification de $P(0)$. Il ne faut jamais l'oublier !
2. **La récurrence proprement dite** : on suppose que la propriété $P(n)$ est vraie (on l'appelle hypothèse de récurrence), et on essaie de montrer $P(n+1)$ à partir d'elle.

Exemple On veut démontrer par récurrence la propriété suivante : « pour tout entier naturel n et tout réel x strictement positif, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ ».

- $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0\,x$, donc la propriété est vraie au rang 0.
- Supposons la propriété vraie pour un certain rang n, c'est-à-dire supposons que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
- Alors, $(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx)$,
  d'où $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$,
  donc, $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ (puisque x est positif),
  par conséquent, $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$
  La propriété reste donc vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : elle est vraie quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 7.10

Démontrez les formules suivantes :

a. $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b. $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. $1 + 8 + 27 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 7.11

Démontrez que ...

a. $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

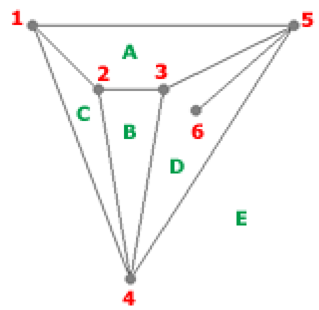
b. $7^n + 2$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $n^5 - n$ est un multiple de 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.12

Leonhard **Euler**
(Bâle, 15/4/1707 -
St-Pétersbourg, 18/9/1783)

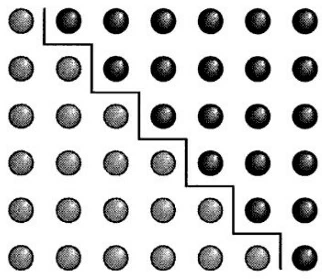
Dessinons sur une feuille des points. Nous les appellerons des *sommets*. Relions ces sommets par des *arêtes*, pas forcément rectilignes, qui ne se coupent pas. Depuis chaque sommet, on doit pouvoir atteindre tous les autres sommets en suivant les arêtes (on parle de *graphe connexe*). Appelons *régions* les surfaces de la feuille délimitées pas des arêtes.



Par exemple, avec six sommets et neuf arêtes, le dessin ci-contre divise le plan en cinq régions (A, B, C, D, E). On remarque que quatre régions sont limitées alors que la cinquième (E), extérieure au diagramme, ne l'est pas.
Formulé par le mathématicien suisse Léonard **Euler** en 1752, la **relation d'Euler** énonce une formule mathématique qui relie le nombre d'arêtes (a), de sommets (s), et de régions (r) : $r - a + s = 2$.
Démontrez cette relation par induction.

7.6. « Preuves sans mots »

En mathématiques, une **preuve sans mots** (ou une **démonstration visuelle**) est une démonstration d'une identité (ou d'une affirmation mathématique plus générale) à l'aide d'un diagramme la rendant évidente, sans qu'un texte plus explicite le commentant soit nécessaire. Quand le diagramme n'en illustre qu'un cas particulier, il faut que sa généralisation ne demande au lecteur qu'un effort minima1. Malgré les risques qu'elles présentent (voir ex. 6.15), ces démonstrations sont souvent considérées comme plus élégantes que des preuves mathématiquement plus rigoureuses.



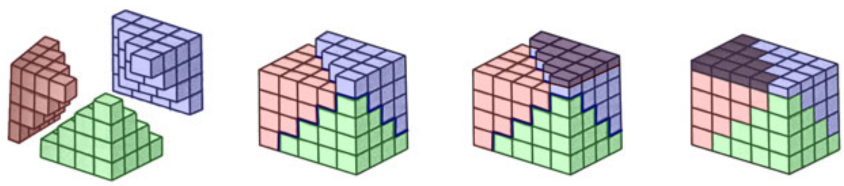
$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

Exemple

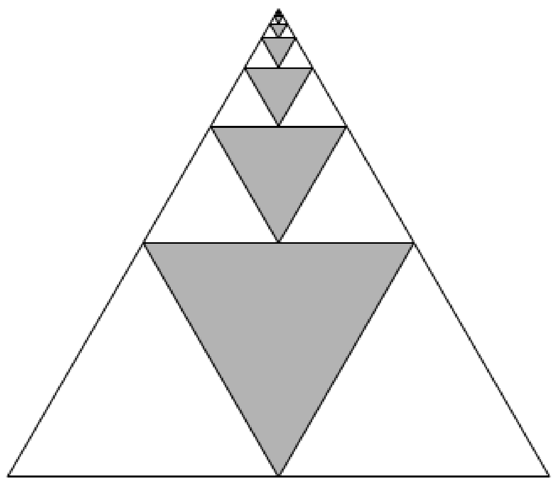
Les formules donnant la somme des puissances n-èmes des entiers consécutifs (formules de **Faulhaber**) peuvent être démontrées visuellement pour n = 1, 2 ou 3 ; la jolie preuve visuelle ci-dessous illustre le fait que :

$$1+4+9+\ldots+n^2=\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$$ (voir exercice 6.10 b)

Les trois pyramides ont pour même volume la somme des carrés de 1 à n (n=4 dans cette illustration) ; le parallélépipède final est de côtés n, n+1 et n+1/2, d'où la formule de Faulhaber pour la somme des carrés.



Exercice 7.13 Comprenez-vous cette « preuve sans mots » ?



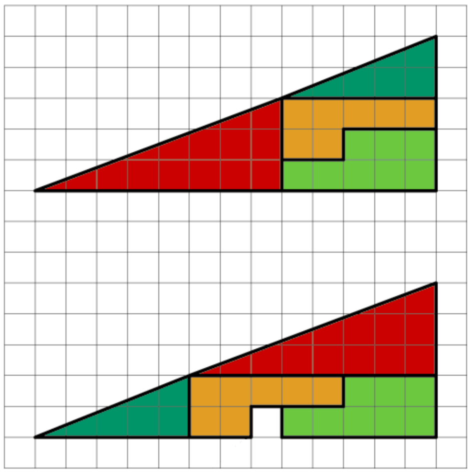
$$\frac{1}{3}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}\cdots$$

Exercice 7.14 Démontrez sans mots que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2p-1) = p^2$.

Exercice 7.15

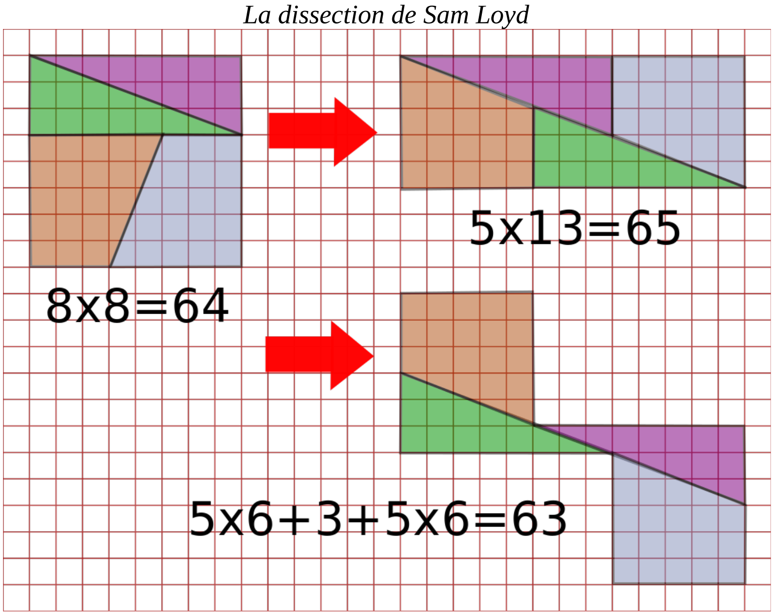
En géométrie, le **paradoxe du carré manquant** est une apparente démonstration géométrique d'un résultat impossible, reposant sur une illusion d'optique.
Qu'est-ce qui cloche avec ces « preuve sans mots » ?

Le triangle de Curry



Paul **Curry**, un magicien amateur, a présenté son puzzle paradoxal en 1953.

La dissection de Sam Loyd



Samuel **Loyd** est un compositeur américain de problèmes relevant des mathématiques récréatives.

7.7. Ce qu'il faut absolument savoir

Le principe de non-contradiction	❏ ok
Le principe du tiers exclu	❏ ok
L'implication	❏ ok
La réciproque	❏ ok
L'équivalence	❏ ok
Le contraire d'une expression bien formée	❏ ok
Démonstration par contraposée	❏ ok
Démonstration par l'absurde	❏ ok
Démonstration par contraposée	❏ ok
Démonstration par récurrence	❏ ok