Université Paris-Diderot — Année 2017-2018

MIAN - Algèbre et analyse élémentaires

Feuille de TD - Propriétés de $\mathbb{R}$

Questions de cours. (a) Donner la définition de valeur absolue d'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$.

(b) Énoncer l'inégalité triangulaire de la valeur absolue.

(c) Soient E un ensemble ordonné et $F \subseteq E$ un sous-ensemble de E. Donner la définition de la borne inférieure de F et de minimum de F.

(d) Donner des exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que :

  (i) la borne supérieure n'existe pas ;

  (ii) le sous-ensemble n'admet pas de minorant ;

  (iii) le sous-ensemble n'admet pas de majorant ;

  (iv) le sous-ensemble admet une majorant, mais n'a pas de maximum ;

  (v) la borne inférieure existe, mais n'a pas de minimum.

(e) Énoncer la propriété de la borne supérieure pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

(f) Énoncer la propriété archimédienne des nombres réels.

Exercice 1. Soient α, β, γ et δ quatre nombres réels. Montrer que si $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ alors $\alpha\delta + \beta\gamma < \alpha\gamma + \beta\delta$.

Exercice 2. Soient α et β deux nombres réels. Simplifier l'inégalité $\alpha^2 < \alpha\beta < \beta^2$.

Exercice 3. Soit γ nombre réel.

(a) Montrer que si $0 < \gamma < 1$, alors $0 < \gamma^2 < \gamma < 1$.

(b) Montrer que si $1 < \gamma$, alors $1 < \gamma < \gamma^2$.

Exercice 4. Soit n dans $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Montrer que $n^2 \geq n$; en déduire que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 5. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Montrer que $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ si, et seulement si, $\alpha\beta \geq 0$.

Exercice 6. Soient α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \gamma$. Montrer que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ si, et seulement si, $|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| = |\alpha - \gamma|$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7. Hachurez la région du plan Oxy définie par l'équation ou par les inégalités suivantes :

(a) $|x| = |y|$, (b) $|x| + |y| = 1$, (c) $|x| - |y| = 2$, (d) $|xy| = 2$,

(e) $|x| \leq |y|$, (f) $|x| + |y| \leq 1$, (g) $|x| - |y| \leq 2$, (h) $|xy| \geq 2$.

Exercice 8. Soient α, β, x et y quatre nombres réels tels que $\alpha < x < \beta$ et $\alpha < y < \beta$. Montrer que $|x - y| < |\beta - \alpha|$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $x < |x - 1|$, (b) $x < -|x - 1|$, (c) $x^2 < |x - 1|$,

(d) $x^2 < -|x - 1|$, (e) $x^2 < |x - \frac{1}{4}|$, (f) $|x - 5| < |x - 1|$,

(g) $1 < |x - 2| \leq 3$, (h) $|x + 2|\,|x - 2| > 4$, (i) $|x - 1| < |x|$,

(j) $|x| + |x + 1| < 2$.

Exercice 10. Déterminer les intervalles que définissent les ensembles suivants :

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$,

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x < 2\}$,

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0$ et $x^2 + x - 6 < 0\}$,

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < x^2 - 12 < 4x\}$,

(e) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \mid \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \in \mathbb{R}\}$,

(f) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \mid \frac{x-2}{x+3} < 0\}$,

(g) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \mid \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$,

(h) $\{x \in \mathbb{R} \mid (2x+1)^6(x-1) \geq 0\}$.

Exercice 11. Dessiner le graphe de la fonction $x \mapsto |x+1| - |x| + |x-1|$.

Exercice 12. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = x^2$. Dessiner les graphes de u et v où

$$u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max(f(x), g(x)) \qquad\qquad v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \min(f(x), g(x)).$$

Exercice 13. Si $E := \{1 - \frac{3}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 14. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ contient un de ses majorants, montrer que ce majorant est la borne supérieure de E.

Exercice 15. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que $u = \sup E$ si, et seulement si,

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de E, et

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u + \frac{1}{n}$ est un majorant de E.

Exercice 16. Soit y un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < y$.

Exercice 17. Montrer que les nombres réels suivants sont irrationnels :

(a) $\sqrt{3}$, (b) $\sqrt{6}$, (c) $\sqrt{2} + 1$, (d) $3\sqrt{2}$, (e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Exercice 18. Montrer que si $y \in \mathbb{R}$ est irrationnel et si r est un rationnel non nul, alors $r + y$ et ry sont irrationnels.

Exercice 19. Montrer qu'il existe un nombre réel positif u tel que $u^3 = 2$.

Exercice 20. Pour tout réel x, on définit la partie entière inférieure (resp. supérieure) de x comme

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}, \qquad \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}.$$

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les quantités $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ sont bien définies et appartiennent à $\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$; puis montrer à l'aide d'exemples que les inégalités peuvent être strictes.

(c) Dessiner les graphes de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto \lceil x \rceil$.