Exercice 1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 2$.

1. Montrer que cette suite est bien définie et strictement croissante.
2. Étudier sa convergence.

Solution :

1. (u_n) est bien définie sans problème et est réelle. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 2$. Si on considère le polynôme $X^2 - X + 2$, son discriminant Δ vaut $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$, il ne s'annule donc pas sur des valeurs réelles. Et comme $u_0^2 - u_0 + 2 > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$. Donc (u_n) est bien strictement croissante.
2. Si (u_n) convergeait vers un réel ℓ, alors il vérifirait $\ell = \ell^2 + 2$, équation polynômiale en ℓ qui n'admet pas de solution réelle. Donc (u_n) diverge, et comme elle est strictement croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Pour quels réels a cette suite est bien définie ?
2. Si (u_n) converge, quelles sont les limites possibles ?
3. Étudier la convergence en fonction du paramètre a.

Solution :

1. (u_n) est bien définie si $\forall n, u_{n+1} \geq 0$, c'est à dire si $u_n \geq -1$. Pour tout choix de $u_0 \in [-1, +\infty[$, on aura alors $\forall n \geq 1, u_n \geq 0$ (récurrence immédiate), et donc la suite sera bien définie. On peut donc choisir les réels $a \geq -1$. (Remarque : si on choisit de ne pas prolonger la fonction $\sqrt{\ }$ en 0, alors ça sera les $a > -1$.)
2. Si (u_n) convergeait vers un réel ℓ, alors il vérifirait $\ell = \sqrt{\ell + 1}$ c'est à dire $\ell^2 - \ell - 1 = 0$, soit $\ell = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

   Mais à partir du rang 1, $u_n \geq 0$ quelque soit a, donc la seule limite possible est $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + u_{n-1}}}$ donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.
   — Si $a = \ell$, alors suite constante.
   — Si $a < \ell$, alors $u_1 - u_0 \geq 0$, donc (u_n) est croissante et majorée par ℓ donc converge vers ℓ.
   — Si $a > \ell$, alors $u_1 - u_0 \leq 0$, donc (u_n) est décroissante et minorée par ℓ donc converge vers ℓ.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2}{1 + x}$. On considère la suite définie par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ est stable par f.
2. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et déterminer les limites potentielles.
3. Que dire des sens de variations des sous-suites u_{2n} et u_{2n+1} ?
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - 1|$.
5. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Solution :

1. f est continue et dérivable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ et $f'(x) = \dfrac{-2}{(1 + x)^2} \leq 0$ donc f est décroissante sur cet intervalle et

   $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{4}{3} \leq 2$ et $f(2) = \dfrac{2}{3} \geq \dfrac{1}{2}$ donc l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ est stable par f.

2. $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ donc (u_n) est bien définie, et si elle convergeait vers une limite ℓ, on aurait $f(\ell) = \ell = \frac{2}{1+\ell}$ soit $\ell = \frac{-1 \pm 3}{2}$. La seule limite possible est celle dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, donc la seul limite possible est $\ell = 1$.
3. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, et on note $g = f \circ f$.

   Alors $v_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n})$. Comme f laisse stable $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, g aussi, et comme f est décroissante, alors g est croissante sur cet intervalle.

   On a $v_1 - v_0 = u_2 - u_0 = \frac{6}{5} - 2 \leq 0$ donc (v_n) est décroissante. Et comme $w_n = f(v_n)$, alors (w_n) est croissante.
4. On a $|u_{n+1} - 1| = \frac{|2 - 1 - u_n|}{| + 1 + u_n|} = \frac{|u_n - 1|}{|u_n + 1|}$. Comme $\forall n, u_n \geq \frac{1}{2}$, alors $|u_n + 1| \geq \frac{3}{2}$ d'où l'inégalité désirée.

   Remarque : on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis et le max de $|f'|$ sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ pour obtenir l'inégalité $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{8}{9}|u_n - 1|$.
5. Comme $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - 1|$ qui tend vers 0, alors (u_n) converge bien vers 1.

Exercice 4. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n - 2\overline{u_n})$$

Solution :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $u_n = x_n + iy_n$, où $x_n = \Re(u_n)$ et $y_n = \Im(u_n)$.

La relation de récurrence implique que

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 2x_n}{5} = \frac{x_n}{5} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{3y_n + 2y_n}{5} = y_n$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à y_0.

Par suite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $iy_0 = i\Im(u_0)$.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Quelle est la seule limite possible l de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Soit $v_n = u_n - l$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de a.
3. Application : on considère un carré de côté 1. On le partage en 9 carrés égaux, et on colorie le carré central. Puis, pour chaque carré non-colorié, on réitère le procédé. On note u_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution :

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, celle-ci doit vérifier $l = al + b$, soit encore

$$l = \frac{b}{1-a}$$

2. On écrit la relation de récurrence vérifiée par $v_n = u_n - l$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - l = a(v_n + l) + b - l = av_n + l(a-1) + b = av_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.
Si $|a| > 1$, on a 2 cas :
- si $v_0 = 0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 et alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à l
- sinon, la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Si $|a| < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Si $a = -1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oscille entre deux valeurs suivant que n est pair ou impair et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

3. On note u_n la surface coloriée à l'étape n.
La partie coloriée à la $(n+1)$-ième étape correspond à la partie coloriée à la n-ième étape plus $\frac{1}{9}$-ième de la partie non coloriée à la n-ième étape. Autrement dit :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{(1-u_n)}{9} = \frac{8u_n}{9} + \frac{1}{9}$$

En appliquant le résultat de la question 2), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la valeur $\frac{1/9}{1-8/9} = 1$.
L'aire de la surface coloriée converge vers l'aire du carré initial.

Exercice 6. Soit $N \geq 2$ un entier. On cherche une approximation de $\sqrt{N}$.

1. Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(x) = x^2 - N$. Comment est définie la suite récurrente obtenue ?
2. Quels sont les points de départ pour lesquels la méthode de Newton donne une suite qui converge effectivement vers $\sqrt{N}$.
3. Soit (u_n) une telle suite. On suppose que $\sqrt{N} < u_0 < \sqrt{N} + 1$. Montrer que pour tout entier n, on a $0 < u_{n+1} - \sqrt{N} \leq (u_n - \sqrt{N})^2$. On dit que la convergence est quadratique.
4. Et pour approximer $N^{\frac{1}{k}}$, avec k un entier ?

Solution :

1. On cherche à approximer un zéro de f. On note g la fonction définie par $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, soit $g(x) = \frac{x^2+N}{2x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. La suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout n, $u_{n+1} = g(u_n) = \frac{u_n}{2} + \frac{N}{2u_n}$ ne pourra converger que vers $\pm\sqrt{N}$, les points fixes de g.
2. On regarde les points où g est contractante. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, g est dérivable et $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{N}{2x^2}$, donc $-1 < g'(x) < 1$ ssi $|x| > |\sqrt{\frac{N}{3}}|$. Donc g est contractante sur $I = \left]\sqrt{\frac{N}{3}}, +\infty\right[$ (comme pour tout n, u_n est du signe de u_0, on ne s'intéresse qu'aux $u_0 > 0$). Et I est stable par g. Donc pour tout $u_0 \in I$, la suite (u_n) converge.
Or si $u_0 \in \left]0, \sqrt{\frac{N}{3}}\right]$ alors on aura $u_1 \in I$, avec le même raisonnement à partir du rang 1, on a bien que pour tout $u_0 \in]0, +\infty[$, la suite (u_n) converge.

3. $u_{n+1} - \sqrt{N} = \dfrac{u_n^2 + N}{2u_n} - \sqrt{N} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{N}\right)^2}{2u_n}$.

   Comme pour tout n, $u_n \in I$, alors $u_n > \dfrac{1}{2}$, donc on a bien l'inégalité demandée.

4. On cherche les zéros de $f(x) = x^k - N$, c'est à dire les points fixes de $g(x) = \dfrac{(k-1)x^k + N}{kx^{k-1}}$.

Exercice 7 (Pour aller plus loin : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)**.** Pour chacune des récurrences ci-dessous, trouver une base de l'ensemble des solutions et donner l'expression du terme général de la suite qui vérifie cette récurrence et $u_0 = 1$, $u_1 = 0$. On pourra s'aider des méthodes exposées dans le devoir.

1. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$. 2. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$. 3. $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 8u_n = 0$.

Solution :

1. Le polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 2$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc ses racines sont $\dfrac{3 \pm 1}{2} = 2$ ou 1. Une base des solutions sera $\{(1)_n, (2^n)_n\}$. Une solution particulière sera de la forme $u_n = \lambda 2^n + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si elle vérifie $u_0 = 1 = \lambda + \mu$ et $u_1 = 0 = 2\lambda + \mu$, alors on aura $\lambda = -1, et \mu = 2$, soit $u_n = -2^n + 2$.
2. Le polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 1$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$ et une seule racine double 1. Une base des solutions sera $\{(1^n)_n, (n1^n)_n\}$, donc les solution seront de la forme $u_n = \lambda + n\mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Avec les égalités sur les premiers termes, on obtient $\lambda = 1 = -\mu$, soit pout tout n, $u_n = 1 - n$.
3. Le polynôme caractéristique $X^2 - 4X + 8$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 32 = -16$ et a pour racines complexes $2 \pm 2i = re^{\pm i\theta}$, avec

   $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ et $\theta = \arccos\left(\dfrac{2}{r}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

   Une base de solutions réelles sera $\left\{\left(2\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right), \left(2\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$, soit les solutions seront de la forme $u_n = \lambda\left(2\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) + \mu\left(2\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Avec les égalités sur les premiers termes, on obtient $\lambda = 1 = -\mu$.