Feuille 2
Suites Numériques

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1 (Retour sur les sommes de suites géométriques)**.** On revient sur les sommes

$$S_1(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\,\theta}, \qquad S_2(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\,i\,k\,\theta}$$

définies dans un exercice de la feuille 1. On pose $S_3(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\,\theta)$ et $S_4(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\,\theta)$.

1. Exprimer $S_3(\theta)$ et $S_4(\theta)$ en fonction de $S_1(\theta)$.
2. En déduire leur valeur en fonction de θ.
3. Montrer que $S_2(\theta) = 2S_3(2\theta) + 1$ et retrouver sa valeur en fonction de n sans calculs.

Exercice 2 ((C) Suites extraites)**.**

1. Considérons la suite $\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Extraire une sous-suite convergente.
2. Considérons la suite $\left(n\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Extraire une sous-suite strictement monotone.

Exercice 3 (Le théorème de Cesaro)**.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$. On définit la suite v par :

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que la suite v converge elle aussi vers ℓ.

Exercice 4 (Sommes télescopiques)**.** Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

1. En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
2. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est croissante, puis montrer qu'elle est convergente.

Exercice 5 (Moyenne arithmético-géométrique)**.** On fixe a et b deux réels strictement positifs. On définit deux suites u et v par :

$$u_0 = \frac{a+b}{2} \text{ et } \frac{1}{v_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ ; puis pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$.
2. En déduire que u est décroissante et v est croissante.
3. Montrer qu'elles sont toutes les deux convergentes et qu'elles ont la même limite.

Exercice 6 (La constante d'Euler)**.** On considère la suite $H = (H_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$H_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. On définit la suite H' par $H'_n = H_n - \dfrac{1}{n}$. Montrer que H et H' sont adjacentes. On note γ leur limite : c'est la constante d'Euler.

2. Montrer $0 < \gamma < 1$. (*Remarque : elle vaut approximativement 0,577215.*)

Exercice 7 ((*) Convergence et suites extraites)**.** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes, et $\ell \in \mathbb{C}$. On considère les deux affirmations suivantes :
P : la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ ;
Q : toute suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet elle-même une suite extraite convergeant vers ℓ.
On souhaite montrer que P et Q sont équivalentes.

1. Montrer que $P \Rightarrow Q$.
2. Rappeler la définition de la convergence des suites, et écrire la négation de l'affirmation P.
3. Montrer, par contraposée, que $Q \Rightarrow P$.

Exercice 8 ((**) Le théorème de Heine)**.** On veut montrer, à partir du théorème de Bolzano-Weierstrass, le théorème de Heine :

Toute fonction continue sur un intervalle compact est uniformément continue.

On raisonne pour ça par contraposée. Soit donc f une fonction non-uniformément continue sur un intervalle compact $[a, b]$. On doit montrer que f n'est pas continue.

1. Écrire la signification précise de « f n'est pas uniformément continue ».
2. En déduire qu'il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que pour tout n entier, il existe deux réels x_n et y_n dans $[a, b]$ avec :
$$\begin{cases} |x_n - y_n| \leq \dfrac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon \end{cases}$$
3. A l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass, on extrait une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Montrer que $x \in [a, b]$.
4. Montrer qu'on a aussi $y_{\phi(n)} \to x$.
5. Montrer que les deux suites $(f(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent pas converger vers la même limite.
6. En déduire que f n'est pas continue en x.