UMPC 2012-2013 TD 4 LM256

Chapitre 4 : Intégrales multiples

1. Calculer :
a.$\int_0^1 \int_0^y x^2 dxdy$
b. $\int_0^1 \int_0^y y^2 dxdy$
c.$\int_0^1 \int_0^x -sin(x^2)dydx$
d. $\int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} (2x+3y^2)dydx$
e. $\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_O^y 2xyzdx$
f. $\int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} 3xydz$
g.$\int_0^\pi dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z\sin(y)dx$
i. $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dy \int_0^x -yzdz$

2. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Fubini :
a. $\iint_D 2xydxdy, \quad D = \{(x,y), 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
b. $\iint_D (x+2y)dxdy, \quad D = \{(x,y), 1 \leq x \leq 3, 1+x \leq y \leq 2x\}$.
c. $\iint_D e^{x/y}dxdy, \quad D = \{(x,y), 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2y^3\}$.
d. $\iint_D \frac{2}{x}dxdy, \quad D = \{(x,y), 1 \leq y \leq e, y^2 \leq x \leq y^4\}$.
e. $\iint_D x\cos ydxdy, \quad D$ borné par $y = 0, y = x^2, x = 2$.
f. $\iint_D 2xydxdy \quad D$le premier quadrant du disque .
g. $\iint_D ye^{2x}dxdy, \quad D$ le triangle plein de sommets $(0,0),(2,4),(6,0)$.
h. $\iint_D xdxdy, \quad D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, yx + y \leq 2\}$.
i. $\iint_D x+2ydxdy, \quad D$ le triangle plein de sommets $(0,0),(2,2),(4,0)$.
j. $\iint_D xdxdy, \quad D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$.
k. $\int_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x,y), x \geq 1, y \geq 1, x+y \leq 4\}$.
l. $\iint_D e^{2x+2y}dxdy, \quad D$ le triangle plein de sommets $(0,0),(1,1),(1,-1)$.

3. Calculer le volume compris entre :
a. La surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et le pland $z = 4$.
b. Le surfaces d'équation $z = x^2 + y^2 - 1$ et $z = 1 - x^2 - y^2$.
c. La surface d'équation $z = x^2 + 4y^2$ et le plan $z = 4$.

4.Calculer le volume :
a. Sous le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et sur le domaine délimité par $y = x^2$ et $x = y^2$.
b.Sous le paraboloïde $z = 3x^2 + y^2$ et sur le domaine borné par $y = x$ et $x = y$.
c. Sous la surface $z = 2xy$ et sur le triangle de sommets $(1,1),(4,1),(1,2)$.
d.Compris entre le paraboloïde $x = x^2 + y^2 + 4$ et les plans $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
e. Borné par le cylindre $y^2 + x^2 = 9$ et les plans $x = 2y, x = 0, z = 0$.
f. Borné par les cylindres $x^2 + y^2 = 4$ et $y^2 + z^2 = 4$.

Problème : Volume de la boule de dimension n.

On définit la boule unité de dimension n par l'ensemble suivant

$$B_n(1) := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1^2\}.$$

On note $V_n(1)$ le volume de $B_n(1)$. De manière similaire on définit les boules de rayons R, $B_n(R)$ et les volumes associés $V_n(R)$.
1. Calculer $V_1(1), V_1(R), V_2(1), V_2(R), V_3(1), V_3(R)$.
2. Etablir en général que $V_n(R) = \int_{-R}^{R} V_n(\sqrt{R^2 - x^2})dx$
3. Montrer par récurrence que pour tout n V_n est une fonction homogène en R, ie

$$V_n(R) = R^n V_n(1).$$

On ne s'intéressera maintenant qu'à $V_n(1)$ que l'on notera V_n pour alléger les notations.
4. Montrer par un changement de variable que

$$V_{n+1} = V_n \int_0^1 u^{n/2}(1-u)^{-1/2}du.$$

Soit la fonction gamma d'Euler définit par $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
5. Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt$.
6. En déduire que

$$V_{n+1} = V_n \frac{\Gamma(n/2+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2+3/2)}.$$

7. Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (On utilisera un changement de variable et l'intégrale de Gauss : $G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ et on calculera cette dernière en considérant G^2 et un changement de variable en polaire.)
8.En déduire que :

$$V_n = \frac{\pi^n}{\Gamma(n/2+1)}.$$

9. Montrer que pour tout $x > 0$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire que

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{(k+1)!}$$

établir une formule similaire pour V_{2k+1} 10. Calculer la limite de V_n quand n tend vers l'infini.