Feuille 4 : CORRECTION : SOUS-VARIETES

Exercice 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$ et P l'application qui à (x, y) associe $||x||^2 - ||y||^2$. Cette application est polynomiale donc C^∞. De plus, $DP_{(x,y)}(h, l) = 2\langle x, h\rangle - 2\langle y, l\rangle$. On en déduit que $DP_{(x,y)}$ est surjective dès que x ou y est non nul, ce qui est le cas pour tout élément de Q. Le théorème de submersion (th.1 p.38) nous assure donc que $Q = P^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété de dimension $p + q - 1$.

Si $(x, y) \in Q$ on a $x \neq 0$. Considérons l'application $\phi : Q \to S^{p-1} \times \mathbb{R}^q$ qui à (x, y) associe $(x/||x||, y)$. Cette application est bijective puisqu'on peut écrire $\phi^{-1}(z, y) = (\sqrt{1 + ||y||^2}z, y)$. L'application ϕ est la restriction de l'application C^∞ de $\mathbb{R}^p \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^q$ définie par la même expression que ϕ. Ainsi ϕ est C^∞. Le même argument montre que ϕ^{-1} est C^∞. Finalement, on a montré que ϕ est un difféomorphisme.

Enfin S^{p-1} est connexe par arcs, donc connexe, de même pour $\mathbb{R}^q$ donc leur produit, puis Q sont connexes.

Exercice 2 : Sous-espaces de matrices

1) L'application $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application polynômiale donc continue. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, il s'agit d'un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et donc d'une sous-variété de même dimension, à savoir n^2.

2) Soit $\Phi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'application C^∞ définie par $\Phi(A) =^t AA$ où $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices symétriques. Pour montrer que $O(n)$ est une sous-variété, il suffit de montrer que Φ est une submersion en chaque point de $O(n)$ car $O(n) = \Phi^{-1}(\{\mathrm{Id}\})$.

On a pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, $D\Phi_A(H) =^t HA +^t AH$.

Soit $L \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$: l'équation $L =^t AH +^t HA$ avec $A \in O(n)$ admet pour solution $H = AL/2$ car A est orthogonale et L est symétrique. Ainsi $D\Phi_A$ est surjective pour tout $A \in O(n)$ et $O(n)$ est bien une sous-variété de dimension $\dim \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

3) L'ensemble $SL(n)$ est défini comme $\det^{-1}(\{1\})$. Pour appliquer le théorème de submersion, il suffit de montrer que pour tout $A \in SL(n)$, $D\det_A$ est surjective. Soit A in $SL(n)$, en particulier, A est inversible. Puisque $D\det_A(M) = \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}M) = \mathrm{Tr}(A^{-1}M)$, cette forme linéaire en M est non nulle puisque évaluée en A elle donne $\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}) = n \neq 0$. Elle est donc surjective et on en déduit que $SL(n)$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$.

Exercice 3 :

La sphère S_n est le l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^{n+1}$ tels que $||x||^2 = 1$. La fonction $N(x) = ||x||^2$ est C^∞ et sa dérivée est donnée par $DN_x(h) = 2\langle x, h\rangle$. Elle est donc surjective dès que $x \neq 0$ ce qui est le cas pour $x \in S^n$. On en déduit que S^n est une sous-variété par le théorème de submersion.

On veut montrer que la structure de variété différentiable donnée par ce théorème est la même que celle donnée par les cartes stéréographiques du TD 3. On rappelle que l'on avait deux cartes $(S_n \setminus N, \phi_N)$ et $(S_n \setminus S, \phi_S)$. On avait des formules pour ϕ_N^{-1} et ϕ_S^{-1} qui montraient que ces deux applications étaient C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et qu'elles prenaient leurs valeurs dans S_n. Comme la première structure différentiable de S_n est celle de sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$, on en déduit que ϕ_N^{-1} et ϕ_S^{-1} sont C^∞.

Réciproquement, l'application $\phi_N : S_n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ s'étend en une application C^∞ du complémentaire de l'hyperplan d'équation $x_n = 1$ vers $\mathbb{R}^{n-1}$ (cf les formules du TD3). Cela prouve que par restriction, l'application $\phi_N : S_n \setminus N \to \mathbb{R}^{n-1}$ est C^∞. La même chose est vraie pour ϕ_S, on en déduit que l'atlas ϕ_S, ϕ_N est compatible avec l'atlas complet de S_n vu comme sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$. Cela termine la preuve.

Exercice 4 :

On rappelle que P_n est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1}$ par la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $y = \lambda x$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a $f(\lambda u, \lambda v) = \lambda^n f(u, v)$: on voit que si $x\mathcal{R}y$ alors $f(x)\mathcal{R}f(y)$. Donc f définit une application $\tilde{f}$ de P_1 dans P_n.

Montrons que cette application est une immersion : on dispose de deux cartes pour P^1 : (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) où $\phi_1^{-1}(x) = p(1, x)$ et $\phi_2^{-1}(x) = p(x, 1)$ (p est la projection canonique). On notera $\phi'_1, \ldots, \phi'_n$ les cartes de P_n. On a $f \circ \phi_1^{-1}(x) = (1, x, \ldots, x^n)$. Cet élément appartient à l'ouvert U'_1 de P_n et on a $g_1(x) = \phi'_1 f \phi_1^{-1}(x) = (x, x^2, \ldots, x^n)$. On calcule $\frac{dg_1(x)}{dx} = (1, 2x, \ldots, nx^{n-1}) \neq 0$. Cela prouve que $\tilde{f}$ restreinte à U_1 est une immersion. Pour les mêmes raisons, la même chose est vraie pour U_2, ce qui prouve que $\tilde{f}$ est une immersion.

Exercice 5 :

Géométriquement, P est l'intersection de la sphère unité avec un cône d'axe z et de centre $(1/2, 0, 0)$: il s'agit d'une réunion de deux courbes fermées. Soit $F(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2-1, (x-1/2)^2 + y^2 - z^2)$ et $(x, y, z) \in P$. On a $A = (\partial F/\partial x)_{(x,y,z)} = (2x, 2x-1)$, $B = (\partial F/\partial y)_{(x,y,z)} = (2y, 2y)$, $C = (\partial F/\partial z)_{(x,y,z)} = (2z, -2z)$.

On remarque que A et B sont proportionnels si et seulement si leur déterminant est nul, soit si y est nul. De plus, A et C sont proportionnels si et seulement si $z = 0$ ou $x = 1/4$. On vérifie facilement que ces deux conditions ne peuvent être vérifiées simultanément pour un (x, y, z) dans P. Cela prouve que soit A et B soit A et C engendrent $\mathbb{R}^2$ et donc F est une submersion. D'après le théorème de submersion, P est une sous-variété.

Géométriquement, Q est un cône d'axe z et de centre $(0, 0, 0)$. Ce n'est pas une sous-variété car il y a une singularité en $(0, 0, 0)$. Plus précisément, la fonction $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ a pour dérivée $DF_{(x,y,z)} = (2x, 2y, -2z)$. Ce vecteur est non nul tant que $(x, y, z) \neq 0$.

On remarque que Q est connexe puisque c'est une réunion de droites passant par 0. Si Q était une sous-variété, elle serait nécessairement de dimension 2, et $Q \setminus \{0\}$ serait encore connexe. Or ce n'est pas le cas puisque pour $(x, y, z) \in Q \setminus \{0\}$ on a soit $z > 0$, soit $z < 0$. $Q \setminus \{0\}$ est donc réunion de deux ouverts disjoints et non vides. Cela prouve que Q n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.