Cours d'analyse complexe L3 - Sept. 2014

Chapitre I - Le plan complexe

1 Définitions

<u>Théorème</u>: il existe un corps commutatif $\mathbb{C}$ contenant un élément i

(Cardano 1545)

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ comme sous-corps
- $i^2 = -1$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

<u>démo</u>: On définit $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $i = (0,1)$. Il reste à définir la multiplication

On pose $(x,y)\cdot(x',y') = (xx'-yy', xy'+x'y)$

on vérifie la distributivité à gauche et à droite

<u>commutativité</u>: $(x',y')(x,y) = (x'x-y'y, x'y+y'x)$

<u>associativité</u>: $(x'',y'')(x',y')(x,y) = (x''x'x - x''y'y - x'yy'' - y'y''x, x''x'y + x''y'x + y''x'x - \dots$

<u>neutre</u> $(1,0)(x,y) = (x,y) = (x,y)(1,0)$.

On identifie $\mathbb{R}$ aux éléments de $\mathbb{C}$ de la forme $(x,0)$ de plus tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = x+iy$

On vérifie $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = \dots = -1$

Il reste à mq $\mathbb{C}$ est un corps ie tout $z \neq 0$ est inversible

or $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow (x+iy)^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\dots$

Autres preuves plus conceptuelles: $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(1+X^2)$ $\quad i = [X]$

$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x,y \in \mathbb{R} \right\}$

où la multiplication est celle des polynômes // celle des matrices

<u>Remarque</u>: Il n'y a qu'un seul corps $\mathbb{C}$ vérifiant les hypothèses du théorème à isomorphisme près.

En effet
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, i) & \longrightarrow & (\mathbb{C}', i') \\ x+iy & \longmapsto & x+i'y \end{array}$$
est un iso de corps.

Définitions : si $z = x+iy$ est un nombre complexe on pose

$x = \mathrm{Re}(z)$ partie réelle
$y = \mathrm{Im}(z)$ —— imaginaire
$\bar z = x - iy$ complexe conjugué
$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ module de z

On a les formules $x = \frac{1}{2}(z+\bar z)$ $\quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar z)$

$$|z|^2 = z\bar z, \quad \overline{z+z'} = \bar z + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar z \bar{z'}, \quad \bar{\bar z} = z$$

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

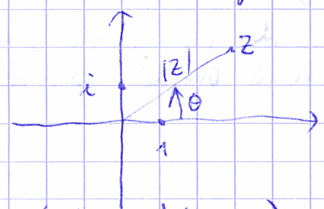
Pour tout nombre complexe non nul z, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π tq $\cos\theta = \mathrm{Re}\,\frac{z}{|z|}$ $\quad \sin\theta = \mathrm{Im}\,\frac{z}{|z|}$

θ s'appelle l'argument de z $\quad \theta = \arg z$ et on a

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{représentation exponentielle}$$
$$= |z|e^{i\theta} \quad [\text{justification ultérieure}]$$

Représentation graphique : $z = x+iy$ affixe de z = pt de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x,y)

(Wessel Argand Gauss) fin 18e



- $|z| = d(0,z)$ plus généralement $|z-z'| = d(z,z')$
- $\arg z = \widehat{1\,0\,z}$
- La transformation
  - $z \mapsto z+b$ est une translation de vecteur b
  - $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ est une homothétie de rapport λ
  - $z \mapsto e^{i\theta}z$ est une rotation d'angle θ
    ex : $z \to -z$

Toutes ces transfo sont de la forme $z \mapsto az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$
Ce sont des transfo linéaires de $\mathbb{R}^2$ qui préservent les angles
on les appelle "similitudes directes"

2 Topologie de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ muni de $|\cdot|$ est un espace vectoriel normé.
En tant que tel on a les propriétés suivantes

Def : $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes tend vers z

si $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad |z_n - z| \leq \varepsilon$

Cela équivaut à ce que les deux suites $x_n = \operatorname{Re} z_n$ et $y_n = \operatorname{Im} z_n$ tendent vers $z = x+iy$

Def (z_n) est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon \ \exists N$ tq $\forall n,p \geq N \quad |z_n - z_p| \leq \varepsilon$

Thm : $\exists z$ tq $\lim_{n\to+\infty} z_n = z \iff (z_n)$ est une suite de Cauchy

Thm : si $z_n \to z$, $w_n \to w$, $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad \lambda z_n \to \lambda z$ $\quad z_n + w_n \to z+w$ $\quad z_n w_n \to zw$

si $w_n \neq 0 \ \forall n$ et $w \neq 0 \quad \frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$

Def : $\sum z_n$ converge si $u_n = \sum_{p=0}^{n} z_p$ converge

$\sum z_n$ converge absol. si $\sum |z_n|$ converge

Thm : $\sum z_n$ cv abs $\Rightarrow \sum z_n$ converge.

preuve : $|u_n - u_p| = \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leq \varepsilon$.

On définit pour $z \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$

$D(z,r) = \{ z' \in \mathbb{C} \ / \ |z-z'| \leq r \}$ et $\overline{D}(z,r) = \{ z' \in \mathbb{C} \ , \ |z-z'| \leq r$

Définitions : - Une partie $P \subset \mathbb{C}$ est dite ouverte si $\forall z \in P \ \exists r>0$ tq $D(z,r) \subset P$

exemple : $D(0,1)$, $]-1,1[\times]-1,1[$ ... $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$

- Une partie $P \subset \mathbb{C}$ est un voisinage de z si $\exists r>0$ tq $D(z,r) \subset P$
ainsi P est ouvert si c'est un vois de chacun de ses points.

- Une partie est fermé si son complémentaire est ouvert.

Thm : P est fermé ssi $\forall (z_n) \in P$ suite convergente $\lim z_n \in P$

- Une partie P est bornée si $\exists r>0$ tq $P \subset D(0,r)$

- Une partie P est compacte si $\forall (z_n)$ suite de P il existe $\varphi : \mathbb{N} \to$
st. croissante tq $\lim z_{\varphi(n)}$ existe.

Thm P est compacte ssi P est fermée et bornée

- L'adhérence de P est l'ensemble des limites de suites d'éléments de P. Il est noté $\overline{P}$, c'est un fermé et c'est le plus petit contenant P.
- L'intérieur de P est $\mathring{P} = \{ z \in P \text{ tq } \exists r>0 \ D(z,r) \subset P \}$ c'est un ouvert, et c'est le plus grand ouvert $\subset P$
- $z \in P$ est dit isolé si $\exists r>0$ tq $D(z,r) \cap P = \{z\}$.
  P est discret si tous ses points sont isolés

<u>exemple</u> : $P = \{ \frac{1}{n}, n>0 \}$

P n'est pas ouvert, ni fermé, 1 est un point isolé

$\overline{P} = P \cup \{0\}$, $\{0\}$ n'est pas un point isolé de P

<u>Connexité</u> : Une partie de $P \subset \mathbb{C}$ est non-connexe si il existe U, V ouverts disjoints tq $P \subset U \cup V$ et $P \cap U \neq \emptyset$ et $P \cap V \neq \emptyset$.

dans le cas contraire, il est dit connexe

de manière équivalente, P est non connexe ssi il existe une application continue $f : P \to \{0,1\}$ non constante

<u>Connexité par arcs</u> P est connexe par arcs si $\forall x, y \in P$ $\exists \ \gamma : [0,1] \to P$ continue tq $\gamma(0) = x$ $\gamma(1) = y$

<u>Thm</u> si P est connexe par arcs, P est connexe

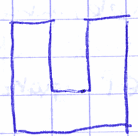
en effet sinon $\exists$ $f : P \to \{0,1\}$ non constante ie $\exists x, y \in P$ $f(x) = 0$ $f(y) = 1$. Mais $\exists \ \gamma : [0,1] \to P$ ... $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ qui vaut 0 en 0, 1 en 1 pas possible

<u>exemples & contrexemples</u>

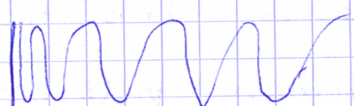
Un ensemble convexe P ie $\forall x, y \in P$ $[x,y] \subset P$ est connexe par arcs et donc connexe. De même si P est étoilé par rapport à x $[\forall z \in P \ [x,z] \subset P]$, on a de même

<u>ex</u>: un disque, un carré un triangle, un demi-plan etc...

<u>Contrex</u>:



ni convexe, ni étoilé mais conn. par arcs



$= \{ (x, \sin(\frac{1}{x})), x>0 \} \cup \{0\} \times [-1,1]$

est connexe mais pas connexe par arcs.

<u>thm</u>. Si $P \subset \mathbb{C}$ est ouvert alors P est connexe $\Leftrightarrow$ P est connexe par arcs.

preuve.

3 Différentiabilité des fonctions complexes

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.

En tant que fonction de $U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, on dispose des notions suivantes.

Def : • f est continue en $z \in U$ si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq si $z' \in U$ et $|z - z'| < \delta$ alors $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$.

• f est continue sur U si elle est continue en chaque point

• f est différentiable en $z \in U$ s'il existe $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ linéaire tq

$$f(z+h) = f(z) + u(h) + |h|\, \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h)$$

dans ce cas u est unique est s'appelle la dérivée de f en z $f'(z)$ ou $D_z f$

• f est dérivable $//x$ resp $//y$ en $z = x_0 + iy_0$ si la fonction $x \to f(x + iy_0)$ est dérivable en $x = x_0$. On note la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ resp $\frac{\partial f}{\partial y}$

⚠ c'est un nombre complexe !

• On a le théorème suivant : si f admet en tout point z de U des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ qui sont continues $//z$ alors f est différentiable en z et :

$$D_z f(u + iv) = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$$

• La somme et le produit de fonctions à valeurs réelles et différentiables est différentiables

$\Rightarrow$ si $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : U \to \mathbb{C}$ sont diff, de même pour $f+g$, λ; fg et même f/g si g ne s'annule pas

• Si $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable et $g : V \to \mathbb{C}$ aussi avec $f(U) \subset V$ alors $g \circ f$ est dérivable et $D_z(g \circ f) = D_{g(z)} g \circ D_z f$.

Toutes ces choses sont du programme du L2 et n'ont rien à voir avec la structure complexe. On va s'intéresser à un type de fonctions différentiables particulières, qui sont "compatibles" avec la st. complexe.

Définition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in U$

f est $\mathbb{C}$ dérivable en a si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers une limite quand $h \underset{\neq}{\to} 0$. Cette limite s'appelle la dérivée complexe et est notée $f'(a)$

Cela revient à dire que $f(a+h)-f(a) = f'(a)h + h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

et donc que f est différentiable en a avec $D_af(h) = f'(a)\,h$.

f est $\mathbb{C}$-dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est dérivable au sens usuel et

$$D_af(h) = f'(a)\,h$$

si on note $f'(a) = x+iy$, la matrice de D_af est donc $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

écrivons $f = P + iQ$ on a $D_af = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$

On a donc que f est $\mathbb{C}$-dérivable en a ssi f est dérivable en a

et $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$ équations de Cauchy-Riemann (CR)

<u>Thm</u>: Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application, U ouvert de $\mathbb{C}$
alors f est $\mathbb{C}$-dérivable + continue en tout point de U $\Leftrightarrow$ f admet des dérivées partielles // x et y continues sur U et vérifiant (CR).

<u>Exemples</u>:

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$: $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = 1$ $\mathbb{C}$ dérivable et $f'(z) = 1$

- $z \mapsto z^2$: $\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{2zh + h^2}{h} = 2z + h$
$\mathbb{C}$ dérivable et de dérivée $2z$

- Plus généralement $z \mapsto P(z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable de dérivée $P'(z)$

- $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{1}{z}$: $\frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = \frac{z-(z+h)}{hz(z+h)} = \frac{-1}{z(z+h)} \to -\frac{1}{z^2}$

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x+iy \mapsto xy$: $P = xy$ $Q = 0$
$\frac{\partial P}{\partial x} = y$ $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ ×

$x+y$ non plus

$z \mapsto \bar{z}$: $P = x$ $Q = -y$
$\frac{\partial P}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial Q}{\partial y} = -1$ non plus.

On peut alors montrer les propriétés suivantes.

Si f est $\mathbb{C}$dérivable en a et f' continue pour tout $a \in U$ alors on dit que f est holomorphe sur U et on note $f \in \mathcal{O}(U)$.

- si $V \subset U$ et $f \in \mathcal{O}(U)$ alors $f|_V \in \mathcal{O}(V)$
- si f est holomorphe sur U alors f est continue
- si $f, g \in \mathcal{O}(U)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\lambda f + \mu g \in \mathcal{O}(U)$
  et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
- si $f, g \in \mathcal{O}(U)$ alors $fg \in \mathcal{O}(U)$ et $(fg)' = f'g + fg'$
- si $f, g \in \mathcal{O}(U)$ g ne s'annule pas alors $f/g \in \mathcal{O}(U)$
  et $(f/g)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$
- si $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$ et $f(U) \subset V$ alors $g \circ f \in \mathcal{O}(U)$
  et $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$

<u>Une notation</u> : si $u, v \in \mathbb{R}$ $u \dfrac{\partial f}{\partial x} + v \dfrac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(u+iv)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(u-iv)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$= z \frac{\partial f}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

où on a posé $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

Ainsi une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe si elle est dérivable et de dérivée continue et vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

<u>Lemme</u>. (accroissements finis) soit $f \in \mathcal{O}(U)$, $[a, b] \subset U$
alors $|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{[a,b]} |f'(t)|$.

<u>preuve</u>. On pose $g(t) = \operatorname{Re} f(a + t(b-a))$ - g est dérivable et
$g'(t) = \operatorname{Re}((b-a) f'(a + t(b-a)))$ donc d'après TAF
$|g(b) - g(a)| \leq \sup_{t \in [a,b]} |\operatorname{Re}((b-a) f'(t))| \leq \sup_{t \in [a,b]} |b-a||f'(t)|$

$\exists \theta$ tq $e^{i\theta}(f(b) - f(a))$ soit réel de sorte qu'on a
$|f(b) - f(a)| = |e^{i\theta}(f(b) - f(a))| = |\operatorname{Re}(f(b) - f(a))| \leq |b-a| \sup |f'(t)|$

<u>Application</u> : si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe, $f' = 0$ et U connexe $\Rightarrow f = C$
$\forall z_0 \in U$ $\exists r > 0$ $D(z_0, r) \subset U$ d'après le lemme, $f(z) = f(z_0)$ $\forall z \in D(z_0, r)$

posons $V = \{z \,/\, f(z) = f(z_0)\}$ bien sûr c'est un ouvert d'après ce qui précède
mais le complémentaire aussi $\Rightarrow$ $V = U$ et f est constante

interprétation géométrique de CR

si f est holomorphe en z $D_z f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire

ie = composée d'une rotation d'angle $\arg f'(z)$ et d'une homothétie de rapport $|f'(z)|$ en particulier $D_z f$ préserve les angles.

ie si $\gamma :]-1,1[\to \mathbb{C}$ et $\delta :]-1,1[\to \mathbb{C}$ sont deux arcs dérivables

avec $\theta = \widehat{(\gamma'(0), \gamma'(1))}$ et $\gamma(0) = \delta(0) = z$ alors

les dérivées de $f \circ \gamma$ et $f \circ \delta$ forment le même angle.

$$\widehat{((f\circ\gamma)'(0), (f\circ\delta)'(0))} = \theta$$

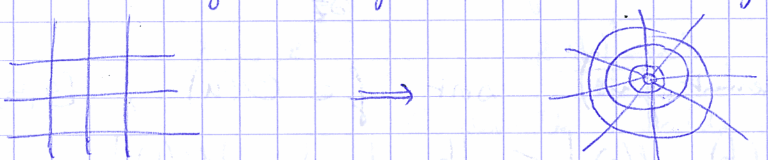
ainsi une application holomorphe préserve les angles infinitésimaux on dit qu'elle est "conforme"

Pour l'instant, on pourrait croire à tort qu'il n'y a que les fractions rationnelles qui sont holomorphes. Voyons en une autre.

$f(z) = \exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ où $z = x + iy$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y + i \sin y) + i e^x(-\sin y + i \cos y)\right) = 0$$

Regardons l'image des lignes $x = cte$ et $y = cte$



elles sont orthogonales : c'est ça être holomorphe !