Chapitre II Séries entières et fonctions analytiques

I Rappels sur les séries de fonctions

① Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $u_n : U \to \mathbb{C}$ une famille de fonctions

. On dit que la série $\sum_n u_n$ converge simplement si $\forall z \in U$ $\sum_n u_n(z)$ conve[rge]

, dans ce cas on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ et $R_N(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{N} u_n(z)$

$= \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(z)$.

. On dit que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur U si elle converge simplement vers $f(z)$ et

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \quad |R_n(z)| \leq \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(z)\right|$$

. On dit que la série $\sum u_n$ converge normalement si la série

$$\sum_n \sup_{z \in U} |u_n(z)| \quad \text{converge.}$$

Proposition : $\sum u_n$ converge normalement $\underset{(i)}{\Rightarrow}$ $\sum u_n$ converge unif. $\underset{(ii)}{\Rightarrow}$ $\sum u_n$ converge si[mplement] (iii)

preuve : (ii) ⇒ (iii) évident

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \sup_U |u_n| \leq \varepsilon$.

on aura $\forall n \geq N$ $|R_N(z)| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p(z)\right| \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} |u_p(z)| \leq \sum_{p=N}^{+\infty}$

$\leq \sum_{p=N+1}^{+\infty} \sup_U u_p \leq \varepsilon$.

Théorème : ① si $u_n : U \to \mathbb{C}$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément vers f alors f est continue

② si $u_n : I \to \mathbb{C}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ est une série de fonctions $\mathcal{C}$[^{1}] telles que
- $\exists x_0 \in I$ avec $\sum u_n(x_0)$ cvg
- $\sum u_n'$ converge uniformément sur I

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(t)$

② Séries doubles. On se donne une famille $(a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ de nombres co[mplexes]

Théorème : Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right) < +\infty$ (ii) $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right) < +\infty$ (iii) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} |a_{p,q}|\right)$

et si ces propriétés sont vérifiées, les 3 séries ci-dessous convergent vers la même so[mme]

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q} a_{p,q}\right)$$

③ Séries entières

Lemme d'Abel : soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $r>0$ tq la suite $a_n r^n$ soit bornée alors

- La série $\sum a_n z^n$ converge absolument $\forall z \in D(0,r)$
- La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,s)}$ $\forall s<r$.

preuve : soit $M>0$ tel que $|a_n r^n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $0<s<r$ on a

$$\forall z \in \overline{D(0,s)} \qquad |a_n z^n| \leq |a_n| s^n \leq M\left(\frac{s}{r}\right)^n$$

$$\text{donc} \quad \sup_{z \in \overline{D(0,s)}} |a_n z^n| \leq M\left(\frac{s}{r}\right)^n$$

$\sum$ série géométrique cvg.

Corollaire : Soit $r = \sup\{ s \geq 0$ tels que la suite $a_n s^n$ est bornée $\} \in [0,+\infty]$
La série $\sum a_n z^n$ converge si $|z|<r$ et diverge si $|z|>r$.

r est appelé rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$
Si on note $D = \{ z \in \mathbb{C}$ tq $\sum a_n z^n$ cv$\}$

on a $D(0,r) \subset D \subset \overline{D(0,r)}$

Si $|z|=r$, on ne peut rien dire a priori : car le cercle d'incertitude

Exemples
- $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad r=+\infty$
- $\sum n!\, z^n$ diverge $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\quad r=0$
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ converge si $|z|<1$, diverge si $|z|>1$ $\quad r=1$
  - si $\alpha<-1$, $\sum n^\alpha z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,1)}$
  - si $\alpha \geq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 : divergence partout
  - si $-1 \leq \alpha < 0$ la série converge si $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, elle diverge en 1.

Curiosité : $\sum z^{2^n}$ série lacunaire de rayon 1
elle diverge en tout point de la forme $e^{2i\pi k/2^n}$

Pour une série $\sum a_n z^n$, on appelle série dérivée la série $\sum n a_n z^{n-1}$

Lemme : toute série entière a le même rayon de convergence que sa dérivée

preuve : soit r et r' les rayons respectifs de la série et de sa dérivée
prenons $s<t<r$ de sorte qu'il existe M tq $|a_n| t^n < M$

pour $z \in \overline{D(0,s)}$ on a

$$|n a_n z^{n-1}| \leq n|a_n| s^{n-1} \leq n\frac{M}{t^n} s^{n-1} = n\frac{M}{t}\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1}$$

or la série $\sum n\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1}$ est convergente car $s/t < 1$ donc $r' \geq r$.

Réciproquement, prenons $t \leq r'$. Par Abel, $\exists M$ tq $|n a_n t^{n-1}| \leq M$.

on aura donc $|a_n t^n| \leq \frac{t}{n} M$ qui sera aussi borné. donc $r \geq$

Formule d'Hadamard le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est donné par la formule

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n \to +\infty}} |a_n|^{1/n}.$$

preuve soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \overline{\lim} |a_n|^{1/n} < 1$.
Cela implique qu'il existe $C < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$

$|z| |a_n|^{1/n} \leq C \Rightarrow |a_n| |z|^n \leq C^n$. la série $\sum a_n z^n$ cv.

soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \overline{\lim} |a_n|^{1/n} > 1$
il existe $\varphi(n)$ et $C > 1$ tq $\forall n \geq N$ $|z| |a_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)} \geq C$
$|z|^{\varphi(n)} |a_{\varphi(n)}| \geq C^{\varphi(n)}$

en particulier la suite ne tend pas vers 0 et $\sum a_n z^n$ DV.

II Fonctions analytiques

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$
Notons $f(z)$ la somme de la série dans $D(0,r)$

alors f est holomorphe sur $D(0,r)$ et $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

preuve : En appliquant deux fois le lemme, les séries $g_1(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ et $g_2(z) = \sum n(n-1) a_n z^{n-2}$ convergent normalement sur $\overline{D(0,s)}$ $\forall s$

Fixons $0 < s < r$, z et $h \in \mathbb{C}$. tq $|z| \leq s$ et $|z| + |h| \leq s$.

$f(z+h) - f(z) = \sum_n a_n\left[(z+h)^n - z^n\right] = \sum_n a_n\left(h\, n z^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2}\right)$

d'où $f(z+h) - f(z) - h g_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n h^2 \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2}\right)$

or $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z^{n-k} h^{k-2}| = \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} |z^{n-k}| |h|^{k-2} \leq n(n-1)(|z| + |h|)$

La série g_2 converge normalement, donc la série $G(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2}\right)$ aussi.
En particulier, G est continue en 0 et

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g_1(z) = \lim_{h \to 0} h G(h) = 0.$$

Ainsi f est dérivable et de dérivée $f' = g_1$. Encore continue puisque c'est une série entière $\Rightarrow$ f est holomorphe

Corollaire : f est indéfiniment dérivable et $\forall z \in D(0,r)$ $f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

Exemple : $g(z) = (1+z)^{\frac{1}{2}}$ $g^{(k)}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-k\right) z^{\frac{1}{2}-k} = k!\binom{\frac{1}{2}}{k}(z+1)^{\frac{1}{2}-k}$

En posant $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k$ on construit une fonction sur $D(0,1)$ qui vérifie $f^2(z) = 1+z$

En effet, posons $u_n(z) = \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k$ et fixons $z \in \mathbb{C}$

on a $\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{\frac{1}{2}-n}{n+1} z$ donc $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \longrightarrow |z|$

par le critère de D'Alembert, $r = 1$.

soit $z \in D(0,1)$. $f^2(z) = \sum_{p,q} \binom{\frac{1}{2}}{p}\binom{\frac{1}{2}}{q} z^{p+q}$ série double convergente.

il suffit de montrer que $\forall n > 1$ $\sum_{p+q=n} \binom{\frac{1}{2}}{p}\binom{\frac{1}{2}}{q} = 0$

Autre méthode : montrer que $f(z) = 2(1+z) f'(z)$ puis dériver $\frac{f^2(z)}{1+z}$.

Définition : Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.
On dit que f est analytique sur U si elle est développable en série entière en tout point de U ie

$\forall z_0 \in U \ \exists r > 0$ tq $D(z_0, r) \subset U$ et $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n \qquad \forall z \in D(z_0, r).$$

On notera $A(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U.

Théorème : si $f \in A(U)$ alors $f \in \mathcal{O}(U)$

preuve : la fonction $g(h) = f(z_0+h)$ est une série entière de rayon $\geq r$
d'après le théorème précédent, elle est holomorphe sur $D(0,r)$
donc f est holomorphe sur $D(z_0, r)$.

Rque : On a unicité des coefficients a_n puisque $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Proposition : Si $f(z) = \sum a_n z^n$ avec un rayon de convergence $r > 0$
alors $f \in A(D(0,r))$.

preuve : ce n'est pas aussi évident que ça en a l'air !

soit $0 < t < r$, $z, h \in \mathbb{C}$ tq $|z| + |h| \leq t$.

en écrivant $\sum_{n,k} a_n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k$ on obtient une série double CV.

car $\exists M$ tq $|a_n t^n| \leq M$ et $|a_n| \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\right| = |a_n| (|z|+|h|)^n \leq |a_n| t^n$

On peut donc la ressommer et écrire $f(z+h) = \sum_k h^k \left(\sum_{n \geq k} a_n \binom{n}{k} z^{n-k}\right)$

on en déduit que f est développable en série entière en z

et que le rayon de la série est $\geq |z| - |h|$

Proposition : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in A(U) \setminus \{0\}$ alors l'ensemble des zéros de f est fermé et discret dans U i.

si $Z = \{z \in U \text{ tq } f(z) = 0\}$ alors

- si $z_n \in Z$ et $\lim_{n \to +\infty} z_n = x$ avec $x \in U$ alors $x \in Z$
- $\forall z \in Z \quad \exists r > 0 \quad$ tq $\quad D(z,r) \cap Z = \{z\}$.

preuve le point 1 provient directement de la continuité de f.

Soit $z_0 \in Z \quad \exists r > 0$ et (a_n) tq $D(z_0,r) \subset U$ et $f(z_0+h) = \sum a_n h^n$ $\forall h \in D(z_0,r)$, $a_0 = 0$

1er cas : $\exists N$ tq $a_N \neq 0$. Prenons le plus petit N.

On a $f(z_0+h) = h^N \underbrace{\sum_{n \geq N} a_n h^{n-N}}_{g(h)}$ avec $\lim_{h \to 0} g(h) = a_N$

par continuité de g, $\exists r < s$ tq g ne s'annule pas sur $D(0,r)$ ainsi f ne s'annule pas sur $D(0,r)$ à part en 0 cqfd.

2ème cas $\forall n, a_n = 0$ dans ce cas $f \equiv 0$ sur $D(z_0, r)$.

On considère $\mathring{Z}$, comme $f \neq 0$ $\mathring{Z} \neq U$, comme $\mathring{Z}$ est ouvert et que U est connexe, $\mathring{Z}$ n'est pas fermé donc $\exists z_n \in \mathring{Z}$ $z_n \to z_0 \in \setminus \mathring{Z}$

Comme $z_0 \notin \mathring{Z}$, on est dans le 1er cas et f n'est pas nulle au voisinage de z_0 (sauf en z_0). Contradiction. donc $\mathring{Z} = \emptyset$ et le 2ème cas n'arrive pas.

Proposition : $A(U)$ est un anneau, (si $f, g \in A(U)$ g ne s'annule pas alors $f/g \in A(U)$) NON

preuve : si f et g sont analytique sur U

$\forall z_0 \in U \quad \exists r > 0 \quad (a_n) \quad r' > 0 \quad (a_n')$ tq $f(z_0+h) = \sum a_n h^n$ $g(z_0+h) = \sum a_n' h^n$

en prenant $|h| < \inf(r, r')$ on a une série double $\sum a_n a_m' h^{n+m} = \sum h^n \left(\sum_{p+q=n} a_p a_q'\right)$

donc $f(z_0+h)\, g(z_0+h) = \sum b_n h^n$ avec $b_n = \sum_{p+q=n} a_p a_q'$.

Proposition Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f \in A(U) \setminus \{0\}$

alors $\forall z_0 \in U \quad \exists! n \in \mathbb{N}$ et $\exists! g \in A(U)$ telle que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$

preuve d'après la proposition précédente, on sait que f n'est pas nulle au vois de z_0

$f(z_0 + h) = \sum a_n h^n \qquad N = \inf\{n \mid a_n \neq 0\} \qquad f(z_0+h) = h^N \sum_{n \geq N} a_n h^{n}$

on pose $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^n}$ alors g est analytique sur $U \setminus \{z_0\}$

et si $|z - z_0| < r$ l'expression $g(z) = \sum_{n \geq N} a_n (z - z_0)^{n-N}$

montre que g est analytique en z_0. Unicité : $N = \inf\{n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0)$

III Exponentielle et logarithme

<u>Définition</u> la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini

On pose $\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$: c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

<u>proposition</u> : on a
$$\begin{cases} \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z') \\ \exp(-z) = \exp(z)^{-1} \\ \overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) \\ \exp'(z) = \exp(z) \end{cases}$$

<u>preuve</u> – $\sum_{n\geq 0} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z) \Rightarrow \exp(z)' = \exp(z)$

– écrivons $h(z) = \exp(z)\exp(-z)$ $\quad h'(z) = e^z e^{-z} - e^z e^{-z} = 0$

donc $h(z) = h(0) = 1$ $\quad$ et $e^{-z} = (e^z)^{-1}$

– $\exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \overline{\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)} = \overline{\exp(z)}$

– $\exp(z)\exp(z') = \sum_{p,q} \frac{z^p}{p!}\frac{z'^q}{q!} = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} z^p z'^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$

<u>Proposition</u> la fonction exp induit un morphisme de groupe surjectif

$\exp : (\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$

<u>preuve</u> Posons $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ sur $D(0,1)$

On a $f'(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$ et $f(0) = 0$

Dérivons $h(z) = (1-z)\exp(f(z))$

$h'(z) = -\exp(f(z)) + (1-z) f'(z) \exp(f(z)) = 0$ $\quad$ donc $h(z) = h(0) = 1$

Donc l'image de l'exponentielle contient tous les $u = \frac{1}{1-z}$ avec $|z|<1$

d'où $z = \frac{u-1}{u}$ avec $\left|\frac{u-1}{u}\right| < 1$ $\quad$ $|u-1|^2 < |u|^2$

$-2\,\mathrm{Re}(u) + 1 < 0$ $\quad$ $\mathrm{Re}\, u > \frac{1}{2}$.

De plus l'image de l'exponentielle contient tous les réels positifs

si $z = ru$ avec $r>0$ $\quad$ $\mathrm{Re}\, u > \frac{1}{2}$ alors z est dans l'image

donc elle contient tous les u avec $\mathrm{Re}\, u > 0$

Tout complexe z s'écrit u^4 avec $\mathrm{Re}\, u > 0$ donc exp est surjective si $\exp(z)=1$ alors $\exp(\bar{z})=1$ et $\exp(z+\bar{z})=1$

or $x \mapsto \exp(x)$ est l'exponentielle réelle donc $z+\bar{z}=0$ et $z \in i\mathbb{R}$

soit K le noyau de exp. Comme $\exp - 1$ est analytique, K est discret. De plus $\exists z$ tq $\exp(z)=-1$ donc $K \neq \{0\}$

soit $\pi = \inf\{x>0 / \exp(ix)=-1\}$. On a $K = 2i\pi\mathbb{Z}$

On définit à partir de ces fonctions $\begin{cases} \cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} & \sin(z) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \\ ch(z) = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} & sh(z) = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} \end{cases}$

Il s'agit de fonctions holomorphes étendant les fonctions usuelles à $\mathbb{C}$.

La formule $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ est établie $\forall z \in \mathbb{C}$.

si $z = x+iy$ on a $|e^{z}| = e^{x}$ et $\arg e^{z} = y$ mod

<u>Définition</u> : Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Une détermination continue du logarithme est une fonction continue

$$L : U \to \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad \exp(L(z)) = z \quad \forall z \in U.$$

Une détermination continue de l'argument est une fonction continue

$$\theta : U \to \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \exp(i\theta(z)) = \frac{z}{|z|} \quad \forall z \in U.$$

<u>Remarque</u> : Si L est une d.c.l alors $\theta = \operatorname{im} L$ est une d.c.a
si θ est une d.c.a alors $L(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ est une d.c.l.

<u>Définition</u> : si $U = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on note $\operatorname{Arg}(z)$ l'unique argument de z qui appartient à $]-\pi, \pi[$.
C'est une d.c.a appelée argument principal.
La d.c.l associée est appelée logarithme principal

<u>Preuve</u> : il suffit de montrer que la fonction Arg est continue et pour cela il suffit de le faire en restriction aux $\frac{1}{2}$ plans

$\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ et $\operatorname{Im} z < 0$.

Par exemple sur $\operatorname{Re} z > 0$ on a $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta$ ou mieux

$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)$ bien continue.

<u>Proposition</u> : (i) Si $L : U \to \mathbb{C}$ est une dcl alors L est holomorphe et $L'(z) =$

(ii) Si U est connexe et L_1, L_2 sont deux DCL alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $L_2 - L_1 = 2ik$

(iii) Si U est connexe et $L : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe avec $L'(z) = \frac{1}{z}$ alors $\exists c \in \mathbb{C}$ tq $L + c$ soit une dcl.

preuve : (i) $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{L(z)-L(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{L(z)-L(z_0)}{e^{L(z)}-e^{L(z_0)}} = \lim\limits_{w \to L(z_0)} \frac{w-L(z_0)}{e^w - e^{L(z_0)}}$

$= \frac{1}{e^{L(z_0)}} = \frac{1}{z_0}$.

(ii) la dérivée de $L_1 - L_2$ est nulle sur un ouvert connexe donc $\exists C$ tq $L_2 = L_1 + C$

$\forall z \in U$ $z = e^{L_2(z)} = e^{L_1(z)+C} = z e^C$ donc $e^C = 1$ et $\exists k \in \mathbb{Z}$, $C = 2\pi k$.

(iii) la fonction $z \exp(-L(z))$ est de dérivée nulle sur U connexe, elle est donc constante $= C \neq 0$

$\exp(L(z)) = \frac{1}{C} z$ on écrit $C = \exp(u)$ et $L(z) - u$ convient.

Théorème : Il n'existe pas de d.c.a sur $\mathbb{C}^*$

preuve : par l'absurde soit $\theta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ une d.c.a

on a $e^{it} = e^{i\theta(e^{it})}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ donc $t - \theta(e^{it}) \in 2\pi\mathbb{Z}$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $t - \theta(e^{it}) = k$ $\begin{cases} 0 - \theta(1) = k \\ 2\pi - \theta(1) = k \end{cases}$ contradiction

Remarque : s'il existe sur $U \subset \mathbb{C}^*$ une d.c.l L on peut définir $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ la fonction puissance par

$z \in U \longmapsto \exp(\alpha . L(z))$. qu'on note abusivement z^α.