Licence, Analyse Complexe, 2013

Exponentielle et logarithmes.

Exercice 1.

(1) Démontrer que l'application $t \mapsto e^{it}$ est un homéomorphisme de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$. En déduire que l'exponentielle est un difféomophisme de $B = \{z \in \mathbb{C}, -\pi < \mathrm{I}mz < \pi\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

(2) Déterminer l'image par l'exponentielle des droites $\mathrm{R}ez = cte$ et $\mathrm{I}mz = cte$, ainsi que l'image du segment $\mathrm{R}ez = cte$ et $\mathrm{I}mz \in [0, 2\pi[$.

Quelques rappels: Soit O un espace topologique connexe, et $f : O \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une application continue. On appelle détermination continue de l'argument (noté dca) de f une application continue $\theta : O \to \mathbb{R}$ telle que $f = |f|e^{i\theta}$ sur O. De même, on appelle détermination continue du logarithme (dcl) de f toute application $l : O \mapsto \mathbb{C}$ continue telle que $f = e^l$ sur O.

i l est une dcl ssi $l = \log|f| + i\theta$ avec $\theta : O \to \mathbb{R}$ une détermination continue de l'argument de f.

ii Deux dca de f diffèrent par un multiple entier de $2i\pi$.

Exercice 2.

(1) Pour $\alpha_0 \in [-\pi, \pi[$, on note $D_{\alpha_0} = \mathbb{R}^+ e^{i\alpha_0}$. Montrer que l'application $\mathbb{R} \times]\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi[\ni (x, y) \mapsto e^{x+iy} \in \mathbb{C} \setminus D_{\alpha_0}$ est un difféomorphisme. En déduire l'existence d'un logarithme continue sur $\mathbb{C} \setminus D_{\alpha_0}$ d'argument à valeurs dans $]\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi[$ (lorsque $\alpha_0 = -\pi$, on parle de la détermination principale de l'argument que l'on note Arg). Lorsque $\alpha_0 = -\pi$, donner une formule explicite pour l'argument principale

(2) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que toute dcl sur U est holomorphe, de dérivée $z \mapsto \dfrac{1}{z}$. En déduire qu'elle est analytique sur U. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Développer en série entière de la variable $z - a$ la détermination principale du logarithme. Quel est le disque de convergence D_a de cette série. Lorsque $D_a \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ n'est pas connexe, calculer la somme de cette série sur chaque composante connexe de$D_a \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ en fonction de la détermination principale du logarithme. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(1 + \dfrac{z - z_0}{z_0}) + \log(z_0)$ pour tout $z \in D(z_0, \delta)$ avec $\delta = d(z_0, \mathbb{R}^-)$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \dfrac{z}{n})^n = e^z$.

Exercice 4. Calculer $\mathrm{Log}(i - 1)$ et $\mathrm{Log}(i - 1)^2$.

(1) Comment doit on restreindre les applications suivantes pour qu'elle possède une détermination principale de l'argument? $z \mapsto z + 1$, $z \mapsto z + i$, $z \mapsto z - i$, $z \mapsto z^2 + 1$.

(2) Donner le domaine de définition de la fonction $z \mapsto \mathrm{Log}(z^2 + 1) - \mathrm{Log}(z - i) - \mathrm{Log}(z + i)$ et calculer cette fonction sur chaque composante connexe de son domaine de définition.

Exercice 5. Supposons que l'application identique de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$ admets une dca θ. Montrer que θ est injective, en déduire que c'est un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$. En déduire qu'une telle application n'existe pas.

Exercice 6. Soit O un espace topologique connexe et $f : O \mapsto \mathbb{C}^*$ continue. On appelle détermination continue de la racine $n-$ième (dcrn) de f toute application continue $r : O \mapsto \mathbb{C}^*$ telle que $f = r^n$.

(1) Démontrer que si O est connexe et si f possède une dcrn r alors f possède exactement n dcrn déduites de r par multiplication par les racines $n-$ème de l'unité.

(2) Montrer que si f admet une dcl l alors $e^{\frac{1}{n}l}$ est une dcrn de f ($n \in \mathbb{N}^*$). En particulier si la détermination principale Log$f$ existe ($f(O) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$), on dira que $e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log} f}$ est la détermination principale de la racine $n-$ième de f. Sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, montrer qu'il existe une unique dcrn d'argument dans $]-\dfrac{\pi}{n}, \dfrac{\pi}{n}[$. Sur quel ouvert de $\mathbb{C}$ la détermination principale de la racine carrée de $z \mapsto z^2 + 1$ est-elle définie?

(3) Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, si f possède une dcl l, on associe une puissance $\alpha-$ème de f par $g = e^{\alpha l}$. On parle comme précédement de détermination principale de la puissance $\alpha-$ième de f lorsque $l = \mathrm{Log} f$ (existe). Calculer la détèrmination principale de $z \mapsto z^i$ au voisinage du point i. Calculer toute les détèrminations de i^i.

Exercice 7.

(1) Trouver une détermination de $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ holomorphe sur I$mz > 0$, continue sur I$mz \geq 0$, valant 1 en 0.

(2) Traiter le même probleme dans le demi-plan I$mz < 0$.

(3) En déduire qu'il n'existe pas de détermination de $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ continue sur $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{+1, -1\}$.

Exercice 8.

(1) Calculer $\mathrm{s}h(iz), \mathrm{c}h(iz), \sin(iz), \cos(iz)$.

(2) Calculer $|\cos z|^2$.

(3) Résoudre $\sin z = w$.

Exercice 9.

(1) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Sur quel ouvert $z \mapsto \mathrm{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$ est-elle définie? Si I$mb >$ Ima, comparer cette fonction avec $z \mapsto \mathrm{Log}(z-a) - \mathrm{Log}(z-b)$ sur l'intersection des domaines de définitions.

(2) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$, $\Im c > 0$. Calculer $\mathrm{Log}\dfrac{z-a}{z-b} + \mathrm{Log}\dfrac{z-b}{z-c} + \mathrm{Log}\dfrac{z-c}{z-a}$ sur $\mathbb{C} \setminus triangle(a, b, c)$.