TD 3 Exercice 1

1) On vérifie déjà que $X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2,\ x^2+y^2=1\}$ est une surface de Riemann. On pose $P(x,y) = x^2+y^2-1$ de sorte que X est le lieu d'annulation de P. Le système d'équations $P=0$, $\frac{\partial P}{\partial x}=0$, $\frac{\partial P}{\partial y}=0$ s'écrit $x^2+y^2=1$, $2x=0$, $2y=0$. et on voit qu'il n'a pas de solutions. X est donc une surface de Riemann.

On écrit après $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow (x+iy)(x-iy)=1$

Si on pose $z = x+iy$ on aura alors $z^{-1} = x-iy$

soit $x = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$ et $y = \frac{1}{2i}(z-z^{-1})$

Le morphisme
$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\to X \\ z &\mapsto \left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2}\right) \end{aligned}$$
est une bijection holomorphe. C'est donc un biholomorphisme.

2) On pose $P(x,y) = a+bx+cy+dxy$ et on résout le système $P=0$, $\frac{\partial P}{\partial x}=0$, $\frac{\partial P}{\partial y}=0$.

Cela donne
$$\begin{cases} a+bx+cy+dxy=0 & (1) \\ b+dy=0 \\ c+dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bx+dxy=0 \\ cy+dxy=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ en reportant dans (1) $a+cy = a+bx = 0$.

Le système $\begin{cases} a+bx=0 \\ c+dx=0 \end{cases}$ n'a pas de solution si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Par contre, si $ad-bc=0$ on a alors $c=\lambda a$, $d=\lambda b$ (ou l'inverse). On vérifie que $x = -\frac{b}{a}$, $y = -\frac{b}{d} = -\frac{1}{\lambda}$ vérifie toutes les équations. On n'a donc pas une surface de Riemann dans ce cas.

Supposons $ad-bc \neq 0$: on peut exprimer y en fonction de x :

$a+bx+y(c+dx)=0 \Rightarrow y = -\frac{a+bx}{c+dx}$

L'application
$$\begin{aligned} \mathbb{C}\setminus\{-c/d\} &\to X \\ x &\mapsto \left(x, -\frac{a+bx}{c+dx}\right) \end{aligned}$$
est un biholomorphisme sur son image.

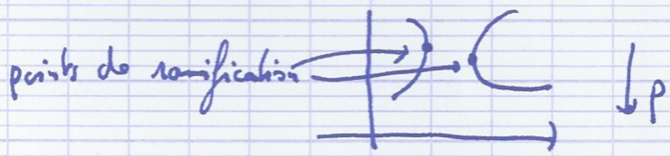
3) D'après le théorème de réduction de Gauss, toute forme quadratique non dégénérée (sur $\mathbb{C}$) est équivalente à $x^2+y^2+z^2$. Cela signifie qu'il existe une base e_1, e_2, e_3 telle que $q(xe_1+ye_2+ze_3) = x^2+y^2+z^2$.
Dans la carte $z=1$, on trouve l'exemple 1.
Cela signifie que $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow C_q$

$$z \longmapsto \left[\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}, 1\right]$$

est un biholomorphisme sur son image. Dans la carte $z=0$ l'équation $x^2+y^2+z^2=0$ a deux solutions $[1,i,0]$ et $[1,-i,0]$ (modulo $\mathbb{C}^*$). Ce sont les deux "points cycliques". On prolonge $\varphi : \mathbb{C}^* \to C_q$ en posant $\varphi(0) = [1,-i,0]$ et $\varphi(\infty) = [1,i,0]$. D'après le TD2 dernier exercice, φ est un biholomorphisme sur son image. (On peut aussi le prouver en étudiant dans une carte).
Les deux premiers exemples correspondent à
$q_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ $\quad q_2(x,y,z) = az^2+bxz+cyz+dxy$.

4) On pose $P(x,y) = x^n+y^n-1$ et on calcule
$\frac{\partial P}{\partial x} = nx^{n-1}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = ny^{n-1}$.
Si $n=1$, X_1 est la droite d'équation $x+y=1$ qui est une surface de Riemann.
Si $n \geq 2$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow x=y=0$ et $(x,y) \notin X_n$ donc X_n est une surface de Riemann.
On pose $\hat{X}_n = \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2 \ / \ x^n+y^n = z^n\}$.
A l'∞, $z=0$ donc $x^n+y^n=0$ a pour solutions $[1,\omega,0]$ où $\omega^n=-1$. Cela fait n points qui sont tous dans la carte $x=1$.
Dans cette carte, $\hat{X}_n$ a pour équation $1+y^n = z^n$.
La même analyse montre que $\hat{X}_n$ est lisse dans cette carte, donc $\hat{X}_n$ est une surface de Riemann (compacte).

5) L'application $p : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$
$$[x,y,z] \longmapsto [x,z]$$
prolonge bien l'application $(x,y) \mapsto x$, mais attention, elle n'est pas bien définie si $x = z = 0$. Heureusement, un point $[x,y,z]$ de $\hat{X}_n$ satisfaisant $x = z = 0$ satisfait $x^n + y^n = z^n$, soit $y = 0$, ce qui est impossible car $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. L'application $p|_{\hat{X}_n} : \hat{X}_n \to \mathbb{P}^1$ est alors bien définie et, forcément, holomorphe.
A x fixé, l'équation $x^n + y^n = 1$ admet n solutions (avec multiplicités) : cela montre que le degré de p est n.



Dans $\mathbb{C}^2$, un point de ramification $(x,y) \to x$ correspond à une tangente verticale, i.e à $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ où $P(x,y) = x^n + y^n - 1$
Cela donne $y = 0$ puis $x^n = 1$, soit $x = \alpha$ avec $\alpha^n = 1$.
Pour chacune de ces valeurs de x, il n'y a qu'une valeur correspondante de y. En vertu de la formule
$$\deg p = n = \sum_{y \in p^{-1}(\{x\})} k_y \qquad \text{on a} \quad k_{(\alpha,0)} = n \quad \forall \alpha$$

Comme l'∞ a n préimages distinctes, la même formule nous dit que p n'est pas ramifiée à l'∞. En conclusion, on a n points de ramification d'ordre n.
On applique la formule de Riemann-Hurwitz qui donne $\chi(\hat{X}_n) = 2n - n(n-1)$. En notant g le genre de $\hat{X}_n$ on a $2 - 2g = 2n - n^2 + n$ soit $g = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

6) On pose $P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3\lambda xyz$ et on résout le système $P = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$. S'il n'admet pas de solution non nulle, la courbe $C_\lambda = \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2 \quad P(x,y,z) = 0\}$

qu'il définit est lisse. On a ici $x^3+y^3+z^3+3\lambda xyz=0$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x^2+3\lambda yz=0 \\ 3y^2+3\lambda xz=0 \\ 3z^2+3\lambda yz=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x^3=-\lambda xyz & (a) \\ y^3=-\lambda xyz & (b) \\ z^3=-\lambda xyz & (c) \end{array} \right.$$

On oublie le cas $\lambda=0$ dont on a montré que c'était lisse dans la question précédente. Si $y=0$ (1) prouve $x=0$ et (3) prouve $z=0$. Symétriquement, on peut supposer $x,y,z\neq 0$. On fait le produit des équations (a) (b) (c) : cela donne

$$x^3y^3z^3=(-\lambda)^3(xyz)^3 \quad \text{donc} \quad (-\lambda)^3=1$$

Cette équation a trois solutions $\lambda=-1, -j, -j^2$. Pour chacune de ces valeurs $C\lambda$ n'est pas une surface de Riemann. Remarquez que $x^3+y^3+z^3-3xyz$ se factorise comme un produit de 3 formes linéaires et donc $C\lambda$ est une réunion de trois droites.

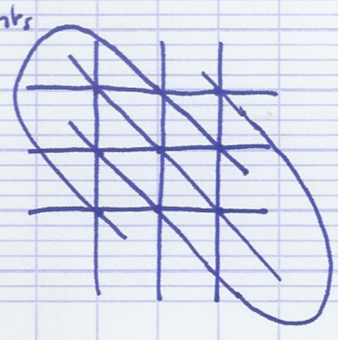
7) $C\lambda \cap C\mu = \{(x,y,z) \mid x^3+y^3+z^3+3\lambda xyz=0,\ x^3+y^3+z^3+3\mu xyz=0\}$

$\Rightarrow (\lambda-\mu)xyz=0 \Rightarrow x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$.

si, disons, $z=0$ on a $x^3+y^3=0$ donc

$[x,y,z]=[1,-1,0]$, $[1,-j,0]$ $[1,-j^2,0]$.

Symétriquement, on a aussi $[1,0,-1]$, $[1,0,-j]$, $[1,0,-j^2]$ puis $[0,1,-1]$, $[0,1,-j]$, $[0,1,-j^2]$. Cela fait 9 points d'intersection qui sont toujours les mêmes. C'est ce qu'on appelle un "pinceau de cubiques" ici, le pinceau de Hesse. C'est un objet mathématique magnifique, regardez sur internet... les trois cubiques singulières sont chaque fois des réunions de trois droites passant par les neuf points comme sur la figure imagée ci-contre.



Ex 2 $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$ à racines simples

1) On pose $Q(x,y) = y^2 - P(x)$ et on calcule

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -P'(x) \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y$$

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 0, \; P(x) = 0, \; P'(x) = 0$$

Ceci est impossible car P est à racines simples. Donc X est bien une surface de Riemann.

2) <u>n pair</u> : $\frac{1}{f(x)^2} = P\left(\frac{1}{x}\right) \iff f(x)^2 = \frac{1}{\prod\left(\frac{1}{x} - a_i\right)} = \frac{x^n}{\prod(1 - x a_i)}$

La série entière $\sqrt{1 - x a_i}$ est bien définie (non nulle) tant que $|x| < \frac{1}{|a_i|}$

On pose alors $f(x) = \pm \frac{x^{n/2}}{\prod \sqrt{1 - x a_i}}$

Ce sont les deux seules possibilité. Le rayon de convergence est $R = \min\left\{\frac{1}{|a_i|}\right\}$.

<u>n impair</u> $f(x)^2 = \frac{1}{\prod\left(\frac{1}{x^2} - a_i\right)} = \frac{x^{2n}}{\prod(1 - x^2 a_i)}$

dans ce cas on a $f(x) = \pm \frac{x^n}{\prod \sqrt{1 - x^2 a_i}}$ avec $|x| < \frac{1}{\sqrt{|a_i|}}$ $\forall i$.

3) Prenons le cas n impair et posons $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ avec la topologie de la Compactification d'Alexandroff. Pour décrire la structure de surface de Riemann sur $\hat{X}$, il suffit de donner une carte qui contient l'∞. On pose

$$\phi : \begin{cases} x \mapsto \left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{f(x)}\right) \\ 0 \mapsto \infty \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = \frac{x^n}{\prod \sqrt{1 - x^2 a_i}}$$

Cette application $\phi : D(0,R) \to \hat{X}$ est un homéomorphisme sur son image U et elle est holomorphe sur $D(0,R) \setminus \{0\}$.

En ajoutant la carte (U, ϕ^{-1}), on munit $\hat{X}$ d'une structure de surface de Riemann.

Dans le cas où n est pair, on ajoute deux points à l'∞, i.e on pose $\hat{X} = X \cup \{p_1\} \cup \{p_2\}$.

puis on pose $\phi_1 : \begin{cases} x \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{\prod \sqrt{1-xa_i}}{x^n}\right) \\ 0 \mapsto p_1 \end{cases}$

et $\phi_2 : \begin{cases} x \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{\prod \sqrt{1-xa_i}}{x^n}\right) \\ 0 \mapsto p_2 \end{cases}$

A nouveau ϕ_1 et ϕ_2 : $D(0,R) \to \hat{X}$ sont des homéomorphismes sur leur image(*) et holomorphes sur $D(0,R) \setminus \{0\}$.

(*) On met sur $\hat{X}$ la topologie qui rend ϕ_1 et ϕ_2 continues.

Ainsi $\hat{X}$ est bien une surface de Riemann.

4) L'application $p(x,y) = x$ est de degré 2 puisque à x fixé, l'équation $y^2 = P(x)$ a deux solutions génériquement. les valeurs de x pour lesquelles il n'y a qu'une solution correspond aux points de ramification (d'ordre 2) grâce à la formule $2 = \deg p = \sum_{y / p(x,y) = x} k_{(x,y)}$.

On a donc si n est pair n points de ramification finis et si n est impair n points de ramifications finis et 1 infini.

La formule de Riemann - Hurwitz donne

$$\chi(\hat{X}) = 2 \times 2 - n \quad \text{si } n \text{ pair}$$
$$= 4 - n - 1 \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$2 - 2g = 4 - n \Rightarrow g = \frac{n-2}{2}$ si n pair $g = \frac{n-1}{2}$ sinon.

Exercice 3

1) $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2$ représente dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ le même point que $(\lambda_1 x_1, \lambda_1 y_1, \lambda_2 x_2, \lambda_2 y_2)$ de sorte que $P(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 \Leftrightarrow P(\lambda_1 x_1, \lambda_1 y_1, \lambda_2 x_2, \lambda_2 y_2) = 0$.

Cela prouve que $X = \{([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ tq } P(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0\}$ est bien défini.

Pour que X soit une surface de Riemann il faut vérifier dans les 4 cartes $(x_1 = 1, x_2 = 1)$ $(x_1 = 1, y_2 = 1)$ $(y_1 = 1, x_2 = 1)$ $(y_1 = 1, y_2 = 1)$

que P y définit une surface de Riemann. De façon équivalente, il suffit de s'assurer que $P = \frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial P}{\partial y_2} = 0$ n'a pas de solution avec $(x_1, y_1) \neq (0,0)$ et $(x_2, y_2) \neq (0,0)$.

2) Dans l'équation $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, si on se place dans les cartes affines comme dans 1) on trouve une droite ou une hyperbole. Une surface de Riemann en tous cas.
On reconnaît $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$
Dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, il s'agit donc des paires de vecteurs colinéaires, ou encore de la diagonale ie $\{(x,x) / x \in \mathbb{P}^1\}$.

3) Prenons $P(x_1, x_2) = \sum a_{ij} x_1^i x_2^j$ et posons
$a = \max\{i / a_{ij} \neq 0\}$ $b = \max\{j / a_{ij} \neq 0\}$. On peut bihomogénéiser P en posant $Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sum a_{ij} x_1^i y_1^{a-i} x_2^j y_2^{b-j}$
Ce polynôme définit dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ un fermé $\hat{X}$ qui contient X car $P(x_1, x_2) = Q(x_1, 1, x_2, 1)$.
Il reste à voir que tout point de $\hat{X}$ est bien dans l'adhérence de X pour conclure $\hat{X} = \overline{X}$.
Supposons par exemple qu'on ait $Q(1, 0, x_2, 1) = 0$
le polynôme $Q(1, u, v, 1)$ s'annule en $(0, x_2)$ et donc doit s'annuler au voisinage. S'il ne s'annule que pour $u = 0$ c'est qu'il est divisible par u. Alors a aurait pu être choisi plus petit. C'est impossible, donc $([1,0], [x_2, 1])$ est bien limite de points de X.

4). On bihomogénéise en posant $P = x_1^a y_2^b + x_2^b y_1^a + x_1^a x_2^b - y_1^a y_2^b$
de sorte qu'on retrouve la bonne équation en posant $y_1 = y_2 = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial P}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} (y_2^b + x_2^b) & \frac{\partial P}{\partial y_1} = a y_1^{a-1} [x_2^b - y_2^b] \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} = b x_2^{b-1} (y_1^a + x_1^a) & \frac{\partial P}{\partial y_2} = b y_2^{b-1} [x_1^a - y_1^a] \end{array} \right.$$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 \neq 0$ et $y_2 = 0$ puis $x_2 \neq 0$, ne marche pas
$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 \neq 0$ et $x_2 = 0$ puis $y_2 \neq 0$, non plus
Par symétrie, aucune variable ne s'annule mais alors
$x_1^a + y_1^a = x_1^a - y_1^a = 0 \Rightarrow x_1^a = y_1^a = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 = 0$
C'est impossible donc la courbe définie par P est une surface de Riemann.

La projection $(x,y) \to x$ est de degré b [nombre de solutions de l'équation à x fixé].

~~L'équation s'écrit~~ $\cancel{x^a(y^b+1) = 1 - y^b}$ ~~donc si~~
$\cancel{y^b = 1}$, ~~il n'y a qu'une solution :~~ $\cancel{x = 0}$.
~~Si~~ $\cancel{y^b = -1}$, ~~on a seulement~~ $\cancel{x = \infty}$

L'équation s'écrit $y^b(1+x^a) = 1 - x^a$ donc
si $x^a = 1$, on a une seule solution $y = 0$.
Si $x^a = -1$, on a ———————— $y = \infty$
Enfin, si $x = \infty$, on obtient $y^b = -1$ qui a b solutions.
Il y a donc $2a$ points de ramification de multiplicité b.
La formule de Riemann-Hurwitz donne

$$2 - 2g = 2b - 2a(b-1) = 2b + 2a - 2ab \Rightarrow g = ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1).$$

Exercice 4

1) Soit ω une différentielle holomorphe sur $\mathbb{P}^1 = \hat{\mathbb{C}}$.
Dans la carte de $\mathbb{C}$, elle s'écrit $\omega = f(z)\,dz$ avec f holomorphe. Dans la carte de l'∞, on a $\omega = g(t)\,dt$ avec g holomorphe.
Ecrivons le changement de carte : $z = \frac{1}{t}$

$$f(z)\,dz = f\left(\frac{1}{t}\right) d\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$g(t)\,dt = -\frac{dt}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

Soit $f\left(\frac{1}{t}\right) = -t^2 g(t)$.
En particulier, quand $t \to 0$ $f\left(\frac{1}{t}\right)$ tend vers 0.
La fonction f est donc constante par le théorème de Liouville et comme f tend vers 0, $f = 0$. Ainsi $\omega = 0$.

On observe que dz sur $\mathbb{C}$ est invariante par translation et donc passe au quotient en une forme différentielle sur $\mathbb{C}/\Lambda$. Comme dz ne s'annule jamais, toute forme différentielle ω sur $\mathbb{C}/\Lambda$ s'écrit $\omega = f(z)\,dz$ avec f holomorphe sur $\mathbb{C}/\Lambda$. Or les seules fonctions holomorphes sur la surface de Riemann compacte $\mathbb{C}/\Lambda$ sont les constantes. Donc $\omega = \lambda\, dz$.

2) C'est du cours (en théorie). Toute forme différentielle méromorphe s'écrit $f\omega$ avec f méromorphe. On vérifie dans des cartes que $\deg(f\omega) = \sum_x k_x(f) + \deg \omega$. Comme f est méromorphe, elle est holomorphe : $X \to \mathbb{P}^1$ et on a $\deg f = \sum_{x / f(x)=0} k_x(f) = \sum_{x/f(x)=\infty} -k_x(f)$ de sorte que $\deg f\omega = \deg \omega$.

Prenons $f : X \to \mathbb{P}^1$ et $\omega = f^* dz$.
Au voisinage de x tq $f(x) \neq \infty$ il existe une carte telle que f s'écrive $f = z^n$: on aura alors $\omega = n z^{n-1} dz$, d'où $k_x(\omega) = n-1$.
~~On a donc~~ $\cancel{\deg \omega = \sum_{x \in X} (k_x - 1)}$.
~~D'après la formule de Riemann-Hurwitz~~
Quitte à composer f par une homographie, on peut supposer que f est non ramifiée à l'infini : comme dz a un pôle double à l'∞, f^*dz aura un pôle double à chaque préimage.
Au final, $\deg \omega = \sum_{x / f(x) \neq \infty} (k_x - 1) - 2 \deg f$.

Or par la formule de Riemann-Hurwitz
$2 - 2g = 2\deg f - \sum (k_x - 1)$ donc $\deg \omega = 2g - 2$

3) En posant $\omega = \frac{dx}{\ }$, on définit une différentielle méromorphe : elle n'y a de pôles a priori qu'à l'infini

et aux points où $y=0$. D'après l'exercice 2 4), la projection $(x,y) \to x$ ramifie seulement là où $y=0$. On en déduit que ω n'a ni pôle ni zéros en dehors de l'infini et des points où $y=0$.

En différentiant l'égalité $y^2 = P(x)$ on trouve $2y\,dy = P'(x)dx$

donc $\omega = \dfrac{dx}{y} = 2\dfrac{dy}{P'(x)}$

Or, là où $y=0$, y est une coordonnée locale, donc dy ne s'annule pas et $P(x)=0$, d'où $P'(x) \neq 0$. Ainsi ω n'a ni pôle ni zéro en dehors de l'infini.

A l'infini, on a une coordonnée locale t où $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \pm\dfrac{\prod\sqrt{1-ta_i}}{t^n}$

d'où $y \sim \dfrac{\pm 1}{t^n}$. On en déduit

$\omega = \dfrac{dx}{y} \sim \left(\dfrac{-dt}{t^2}\right)(\pm t^n) = \mp\, dt.t^{n-2}$

Ainsi, aux deux points à l'infini ω a un zéro d'ordre $n-2$.

On vérifie $\deg \omega = 2(n-2) = -\chi(\hat{X})$ comme attendu.

4) Notons $\phi(x,y) = (x,-y)$. Il s'agit d'une involution de $\hat{X}$. Si elle n'avait pas de point fixe on aurait que toute forme invariante par ϕ passerait au quotient. Etudions précisément ce qui se passe aux points fixes. D'après TD 2 Ex 5 3) il existe au voisinage d'un point fixe une coordonnée locale t telle que $\phi(t) = -t$. Toute forme invariante s'écrit localement $\alpha = f(t)\,dt$ avec $\phi^*\alpha = f(-t)\,d(-t) = -f(-t)\,dt = \alpha$ donc f est impaire. En particulier il existe g telle que $f(t) = t\,g(t^2)$ et $\alpha = t\,g(t^2)\,dt = \frac{1}{2}g(u)\,du$ avec $u = t^2$

Cela prouve bien que α est de la forme $\alpha = p^*\beta$ avec $p : \hat{X} \to \mathbb{P}^1$, $(x,y) \mapsto x$ et β holomorphe sur $\mathbb{P}^1$.

Or d'après la question 1), la seule différentielle holomorphe sur $\mathbb{P}^1$ est nulle : donc $\beta = 0$ et du coup $\alpha = 0$.

5) Soit α holomorphe. $\alpha = \underbrace{\dfrac{\alpha + \phi^*\alpha}{2}}_{\substack{\text{invariante}\\ \text{donc nulle.}}} + \underbrace{\dfrac{\alpha - \phi^*\alpha}{2}}$

On déduit de la question précédente que α vérifie $\phi^*\alpha = -\alpha$. C'est déjà le cas de ω : $\phi^*\omega = -\omega$. En faisant le quotient, on trouve que $\frac{\alpha}{\omega}$ est une fonction méromorphe sur $\hat{X}$ invariante par ϕ. Ainsi $\frac{\alpha}{\omega} = f(x)$ et $\alpha = f(x)\omega$. Comme ω n'a pas de zéros à part à l'infini, f n'a pas de pôles, c'est donc un polynôme.
A l'∞ on a $x = \frac{1}{t}$ $\omega \sim \pm t^{n-2}$ donc $f\left(\frac{1}{t}\right) t^{n-2}$ ne doit pas avoir de pôle en 0 : c'est que $\deg f \leq n-2$.
En conclusion, toute différentielle holomorphe sur $\hat{X}$ est de la forme $f(x)\,\frac{dx}{y}$ avec $f \in \mathbb{C}[x]$ de degré $\leq n-2$.

<u>Vérification</u> : la dimension de l'espace des différentielles holomorphes est donc $n-1$. Le théorème de Riemann-Roch dit que cela vaut g. Or $2g-2 = 2n-4$, c'est donc correct.