Chapitre sur les sous-groupes de Lie

Rappel : G groupe de Lie connexe

$H \subset G$ un sous-groupe de Lie (H est un sous-groupe mais pas une sous-variété : H est un groupe de Lie et $i : H \to G$ est un morphisme de groupes de Lie qui est une immersion : $D_x i : T_x H \to T_x G$ est injective

$\Leftrightarrow$ $D_1 i : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ est injective.

$\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Théorème : il y a une bijection entre les sous-groupes de Lie H connexes et les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.

[si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre alors $H = \langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle$]

Exemples : Dans $so(3) = \text{Lie } SO(3)$ groupe des rotations

$\simeq (\mathbb{R}^3, \times)$ produit vectoriel

dans cette algèbre de Lie les seules sous-algèbres de Lie non triviales ($\neq \{0\}$ et $so(3)$) sont de dimension 1. En effet si on a un plan $P \subset so(3)$ on choisit une base orthogonale e_1, e_2 de P

$e_3 = e_1 \times e_2 \notin P$ donc P n'est pas une sous-algèbre de Lie

Exemple : $sl_2(\mathbb{R})$ = algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R})$
$\det A = 1\}$.

$sl_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \text{Tr } A = 0\}$.

Mq $sl_2(\mathbb{R})$ n'a pas d'idéaux non triviaux.

déf : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ si $\forall X \in \mathfrak{h}$ et $\forall Y \in \mathfrak{g}$

on a $[X,Y] \in \mathfrak{h}$.

<u>Rque</u> : si $H \subset G$ est un sous-groupe de Lie <u>distingué</u> (normal) alors l'algèbre de Lie de H est un idéal. (en plus d'être une sous algèbre).

En effet soit $X \in \mathfrak{h}$ et $Y \in \mathfrak{g}$, on veut prouver que $[Y,X] \in \mathfrak{h}$ i.e $ad(Y)(X) \in \mathfrak{h}$.

pour cela on observe que $\underbrace{\exp(Y)}_{\in G} \underbrace{\exp(X)}_{\in H} \underbrace{\exp(Y)^{-1}}_{\in G} \in H$ car H est distingué.

or $\exp(Y)\exp(X)\exp(Y)^{-1} = \exp(Ad(\exp(Y))X)$

$= \exp(\exp(ad\, Y)(X)) \in H$

$\Rightarrow \exp(ad\, Y)(X) \in \mathfrak{h} \Rightarrow$ remplaçant Y par tY, $t \to 0$

$X + t\, \underbrace{ad\, Y\, X}_{} + t^2 \ldots$

$ad(Y)(X) \in \mathfrak{h} \Rightarrow [Y,X] \in \mathfrak{h}$

<u>Exemple</u> : $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ n'a pas d'idéal non trivial

On a une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule

$[H,E] = HE - EH = 2E$ $\qquad [H,F] = -2F$

$[E,F] = H$

Supposons que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ soit un idéal.

$$F \xrightarrow{ad\,E} H \xrightarrow{-\frac{1}{2} ad\,E} E \xrightarrow{ad\,E} 0$$

Si on a $X = aF + bH + cE \in \mathfrak{h}$

qui est un idéal alors $\mathrm{ad}\,E(X) = [E,X] \in \mathfrak{h}$.

par définition
$$\mathrm{ad}\,E(X) = aH - 2bE \qquad \in \mathfrak{h}.$$
$$\mathrm{ad}\,E^2(X) = -2aE \qquad \in \mathfrak{h}$$

on en déduit suivant que $a \neq 0$ $b \neq 0$ ou $c \neq 0$

que $E \in \mathfrak{h}$ toujours.

De même en remplaçant E par F on déduit que $F \in \mathfrak{h}$.

puis $[E,F] \in \mathfrak{h}$ donc $H \subset \mathfrak{h}$.

<u>Conclusion</u>. $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ n'a pas d'idéal non trivial. On dit que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est <u>simple</u>.

$(\mathbb{R}$, crochet nul$)$ est simple

$(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), [\,,\,])$ est simple etc...

$(\mathbb{R}^2$, crochet nul$)$ n'est pas simple.

II Théorie de Cartan / Von Neumann

<u>Thm 1</u> : tout sous-groupe fermé $H \subset G$ où G est un groupe de Lie est une sous-variété de G.

L

<u>Thm 2</u> : tout morphisme de groupes $\Phi : H \to G$ entre deux groupes de Lie quelconques dont le graphe est fermé est un morphisme de groupes de Lie (i.e C^∞).

<u>Rappel</u> : $\mathrm{Graphe}\,\Phi = \{(x, \phi(x)) \in H \times G\} \subset H \times G$

Montrons que Thm 1 ⇒ Thm 2

On se donne un morphisme $\phi : H \to G$ morph. de groupes.

$F = \{(x, \Phi(x)) \in H \times G\}$ qu'on suppose fermé.

Comme Φ est un morphisme, F est un sous-groupe

$$(x, \phi(x)) \cdot (y, \phi(y)) = (xy, \phi(x)\phi(y)) = (xy, \phi(xy)) \in F$$

D'après le thm 1, F est un sous-groupe fermé de $H \times G$ donc c'est une sous-variété de $H \times G$.

On veut prouver que ϕ est $\mathcal{C}^\infty$.

Pour cela on considère $p_1 : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & H \\ (x, \phi(x)) & \longmapsto & x \end{array}$ $\quad p_2 : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ (x, \phi(x)) & \longmapsto & \phi(x) \end{array}$

Les applications p_1 et p_2 sont $\mathcal{C}^\infty$ comme restriction à une sous-variété d'applications $\mathcal{C}^\infty$. De plus l'application p_1 est bijective.

donc si on montre que p_1 est un difféomorphisme alors

$\phi = p_2 \circ p_1^{-1}$ sera bien $\mathcal{C}^\infty$.

Pour prouver que p_1 est un difféo, il suffit de montrer que c'est un difféomorphisme local.

⚠ un petit peu délicat à justifier

On commence par observer que p_1 étant un morphisme de groupes de Lie $D_x p_1$ est de rang constant. En particulier $\dim \operatorname{Ker} D_x p_1$ ne dépend pas de x. Le théorème du rang constant dit que localement p_1 est une fibration. Or p_1 est une bijection.

$\Rightarrow$ $\boxed{D_x p_1 \text{ est injective.}}$

De plus si $D_x p_1$ n'est pas surjective, elle ne l'est nulle part

$\Rightarrow$ $\dim p_1(F) \subset H$ est de dim $< \dim H$.

Or p_1 est bijective donc contradiction. $D_x p_1$ est bijective $\forall x \in F$.

Conclusion p_1 est un difféomorphisme. (son inverse est $\mathcal{C}^\infty$).

Démo du thm ①

$H \subset G$ un sous-groupe fermé $\Rightarrow$ H est une sous-variété
(G : groupe de Lie)

<u>Lemme 1</u> : Supposons que $X_i \in \mathfrak{g}$ tq $X_i \to 0$ et $X_i \neq 0 \ \forall i$
mais telle que $\mathbb{R}X_i \longrightarrow \mathbb{R}X$

[On travaille dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$
$(X_i) \to [X]$]

alors si $\exp(X_i) \in H \ \forall i$ alors $\exp(\mathbb{R}X) \in H$.

<u>Démo</u> : Soit $Y \in \mathbb{R}X$ $Y \neq 0$.
il existe alors $\exists\, n_i \in \mathbb{N}$ $n_i \to +\infty$ tq $n_i X_i \longrightarrow Y$

alors $\exp(n_i X_i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} \exp(Y)$

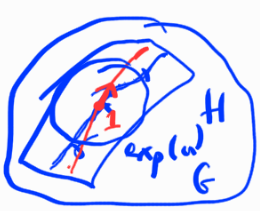
$$\exp(n_i X_i) = \underbrace{\underbrace{\exp(X_i)}_{\in H}{}^{n_i}}_{\in H}$$

comme H est <u>fermé</u> on a $\exp(Y) \in H$.

cqfd $\boxed{\exp(\mathbb{R}X) \subset H}$

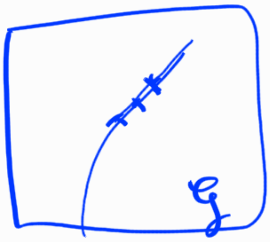
<u>Lemme 2</u> : $\gamma : \mathbb{R} \to G$ une courbe C^∞ tq $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(t) \in H$ $\forall t$

alors en posant $X = \gamma'(0)$ on a $\exp(\mathbb{R}X) \subset H$.



<u>Démo</u> : soit $U \subset \mathfrak{g}$ un ouvert tq $\exp : \underset{\mathfrak{g}}{\underset{\cap}{U}} \to \underset{G}{\underset{\cap}{\exp(U)}}$

soit un difféomorphisme. On se donne une suite $t_i \to 0$
tq $\gamma(t_i) \in \exp(U)$ ie $\gamma(t_i) = \exp(X_i)$
$X_i \in U$.



on a bien $\mathbb{R}X_i \longrightarrow \mathbb{R}\gamma'(0)$

donc d'après le lemme 1 $\exp(\mathbb{R}\gamma'(0)) \subset H$.

cqfd.

<u>Démo du Thm</u> : on veut prouver que H est une sous-variété
il suffit de prouver que c'est vrai au voisinage de 1 (par translation à gauche)

On pose $V = \{ X \in \mathfrak{g} \text{ tq } \exp(\mathbb{R}X) \subset H \}$.

prouvons que V est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$.

Par construction, il est stable par multiplication par un scalaire.

Il faut montrer qu'il est stable par addition.

Soit $X, Y \in V$ $\exp(tX) \in H$ et $\exp(tY) \in H$.

On pose $\gamma(t) = \exp(tX)\exp(tY)$ $\quad (\neq \exp(t(X+Y)))$

C'est un chemin $\mathcal{C}^\infty$ à valeur dans H et $\gamma'(0) = X+Y$

D'après le lemme 2 $\exp(\mathbb{R}(X+Y)) \subset H$ donc $X+Y \in V$.

Soit V' un supplémentaire de V dans $\mathfrak{g}$ et

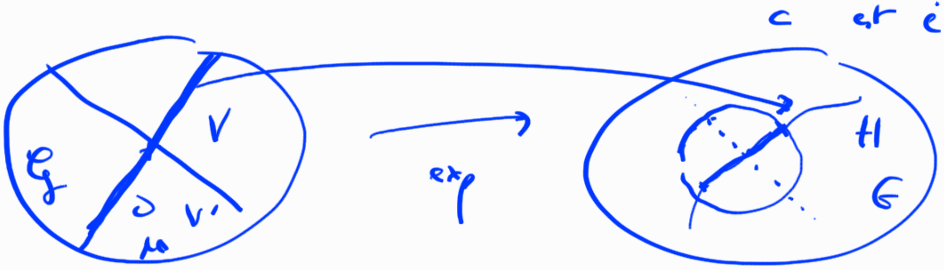
$$\phi : V \oplus V' \longrightarrow G$$
$$(X, Y) \longmapsto \exp(X)\exp(Y).$$

La dérivée de ϕ en 0 est l'identité donc ϕ est un difféomorphisme local en 0. Soit U un voisinage de $0 \in V \oplus V'$ tq

$\phi : U \to \phi(U)$ soit un difféomorphisme

On veut prouver $\phi(U \cap V) = \Phi(U) \cap H$

$\subset$ est évidente



il faut montrer l'inclusion réciproque.

Si elle n'est pas vraie il existe une suite $(X_i, Y_i) \in V \oplus V'$

tq $(X_i, Y_i) \to 0$ $\quad \phi(X_i, Y_i) = e^{X_i} e^{Y_i} \in H$

et $(X_i, Y_i) \notin V$ ie $Y_i \neq 0$

On par construction $e^{X_i} \in H$ et $e^{X_i} e^{Y_i} \in H \implies e^{Y_i} \in H$

de plus quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$\mathbb{R}Y_i \longrightarrow \mathbb{R}Y \neq 0$ D'après le lemme 1 on a $\exp(\mathbb{R}Y) \subset H$

Par définition de $V \Rightarrow Y \in V$ or $Y_i \in V'$

$\exists\, n_i \in \mathbb{N}$ tq $\underbrace{n_i Y_i}_{\in V'} \to Y$ donc $Y \in V'$

$Y \in V \cap V' = \{0\}$.

contradiction.

III Revêtements de groupes de Lie

Problème : il n'y a pas de bijection entre

$\underset{\text{morph. de gp. de Lie}}{\{\Phi : G \to H\}}$ et $\underset{\text{morph. d'alg. de Lie}}{\{\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}\}}$

$$\Phi \longmapsto \varphi = D_1\Phi$$

ex : $\phi : S^1 \overset{?}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ si on voulait définir un tel morphisme

$\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ ϕ on devrait avoir

$\phi(\exp(i\theta)) = \underset{\text{réelle}}{\text{"}\exp\text{"}}(\theta) = \theta$

il y a un problème global qui est dû au fait que S^1 n'est pas simplement connexe.

Définitions Soit G, H deux groupes de Lie connexes et $\Phi : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. On dit que Φ est un revêtement si $D_1\Phi$ est un isomorphisme ($\Leftrightarrow$ Φ est un difféo local).

exemples : . $\mathbb{R} \to S^1$ est un revêtement.
$\theta \to \exp(i\theta)$

. $SU_2 \to SO(3)$ est un revêtement etc...
$g \to Ad(g)$

Proposition : $\phi : G \to H$ est un revêtement $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \phi \text{ est surjective et} \\ \operatorname{Ker}\phi \text{ est un sous-groupe} \\ \text{discret et distingué dans } G. \end{cases}$

démo : $\Rightarrow$ Comme ϕ est un difféo local $\exists\, U$ vois. de 1 dans G

tq $\phi|_U : U \to \exp(u)$ est un difféo

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\phi \cap U = \{1\}$ donc $\operatorname{Ker}\phi$ est discret.

Comme G est connexe $G = \langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$

donc $\Phi(G) = \langle \Phi(\exp(\mathfrak{g}))\rangle = \langle \exp(D_1\Phi(\mathfrak{g}))\rangle$

or $D_1\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un iso donc $D_1\Phi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$.

$= \langle \exp(\mathfrak{h})\rangle = H$.

$\Leftarrow$ on suppose que $\phi : G \to H$ surjective de noyau discret distingué

et on veut montrer que ϕ est un difféo local.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\exp"] \arrow[d] & G \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathfrak{h} \arrow[r, "\exp"] & H \end{tikzcd}$$

On sait que $\mathrm{Ker}\,\Phi$ est un sous-groupe de Lie de G donc une sous-variété de G dont l'espace tangent est $\mathrm{Ker}\, D_1\Phi$

$$\boxed{T_1 \mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Ker}\, D_1\Phi}$$

or Φ est discret donc $D_1\Phi$ est injective.

comme Φ est surjective $H = \langle \exp(D_1\Phi(\mathfrak{g}))\rangle$

$\Rightarrow D_1\Phi$ est surjective.

donc $D_1\Phi$ est bijective et $\Phi : G \to H$ est un revêtement.

exemples : $\cdot$ $\Phi : \mathbb{R} \to S^1$, $\theta \to e^{i\theta}$ $\quad \mathrm{Ker}\,\Phi = 2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ discret.

$\cdot$ $\Phi : SU_2 \to SO(3)$, $g \mapsto (X \to gXg^{-1})$, $X \in su_2$ $\quad \mathrm{Ker}\,\Phi = \{\pm 1\} \subset SU_2$ discret.

Def : Un groupe G est simplement connexe si pour tout $\tilde{G}$ tq $\phi : \tilde{G} \to G$ soit un revêtement, ϕ est un isomorphisme.

Thm : Soit G, H deux groupes connexes, G simplement connexe alors $\forall\, \varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ morphisme d'algèbres de Lie $\exists!\, \Phi : G \to H$ tq $\varphi = D_1\Phi$.

idée : comme G est engendré par $\exp(\mathfrak{g})$, tout élément $g \in G$ s'écrit $g = \exp(X_1) \cdots \exp(X_n)$ avec $X_i \in \mathfrak{g}$.

donc $\Phi(g) = \Phi(\exp X_1) \cdots \Phi(\exp(X_n)) = \exp(\underbrace{\varphi(X_1)}_{\mathfrak{h}}) \cdots \exp(\underbrace{\varphi(X_n)}_{\in \mathfrak{h}})$

prouve l'unicité Φ.

<u>démo</u> : $\mathrm{Graphe}(\varphi) \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$

$\mathrm{Graphe}(\varphi) = \{ (X, \varphi(X)) , X \in \mathfrak{g} \} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$

est un sous-algèbre de Lie car φ est un morph. d'alg. de Lie.

D'après un théorème précédent il existe $F \subset G \times H$ un sous-groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathrm{Graphe}(\varphi)$.

On considère alors
$$p_1 : F \longrightarrow G$$
$$p_2 : F \longrightarrow H$$

Par construction F est un groupe de Lie connexe. et
$$D_1 p_1 : \mathrm{Graphe}(\varphi) \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad \text{est un isomorphisme.}$$
$$(X, \varphi(X)) \longrightarrow X$$

donc $p_1 : F \to G$ est un revêtement. Comme G est simplement connexe p_1 est alors un isomorphisme

on pose $\Phi = p_2 \circ p_1^{-1}$ on a bien $\Phi : G \to H$ est un morph de groupes de Lie et $D_1 \Phi = \varphi$.

<u>Problème</u> : comment on vérifie que G est simplement connexe ?

Si G n'est pas simplement connexe que fait on ?