Revêtements des groupes de Lie

def : $\Phi : G \to H$ entre deux groupes de Lie connexes

on dit que Φ est un revêtement si $D_1\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Prop : $\Phi : G \to H$ est un revêtement ssi Φ est surjective et $\operatorname{Ker}\Phi \subset G$ est un sous-groupe discret de G.

def : G est simplement connexe si il n'a pas de revêtement non trivial i.e. $\forall\ \Phi : \tilde{G} \to G$ revêtement on a que Φ est un isomorphisme.

Thm : Si G est $\boxed{\text{simplement connexe}}$ et H est un gp. de Lie connexe alors $\forall\ \varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ morph. d'algèbre de Lie $\exists!\ \Phi : G \to H$ morph de gp de Lie tq $\varphi = D_1\Phi$.

Construction du revêtement universel

Thm : Tout groupe de Lie connexe G admet un unique revêtement simplement connexe $\tilde{G}$. Ce groupe s'appelle le revêtement universel de G.

"démo" : On considère $\tilde{G} = \{ (\gamma, g)$ avec $\gamma : [0,1] \to G$ tq $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = g \in G \} / \sim$

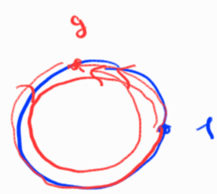
on va quotienter par la relation d'homotopie

$(\gamma, g) \sim (\gamma', g)$ s'il existe $H : [0,1]^2 \to G$

tq $H(t,0) = \gamma(t)$ $\quad H(t,1) = \gamma'(t)$

$H(0,s) = 1$ $\quad H(1,s) = g$

ex : S^1



$\tilde{S}^1 = \mathbb{R}$.

<u>1ère étape</u> : $\tilde{G}$ est un groupe. On pose $(\gamma, g)\cdot(\gamma', g') = (\gamma\gamma', gg')$

où $(\gamma\gamma')(t) = \gamma(t)\gamma'(t)$.

vérifier que cette structure de groupe est compatible avec la relation d'homotopie.

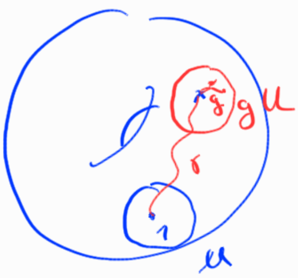
<u>2ème étape</u> : $\tilde{G}$ est une variété différentielle.

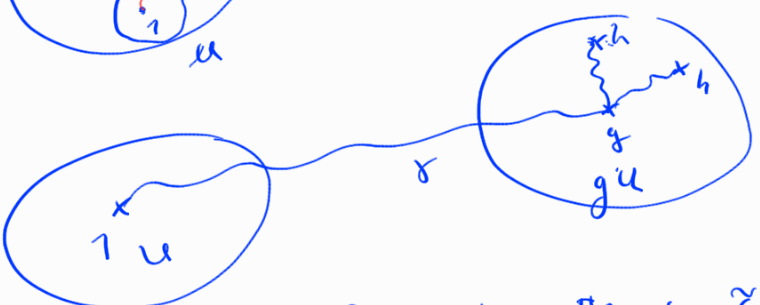
On choisit $\mathcal{U} \subset \mathfrak{g}$ ouvert $\simeq$ Boule tq

$$\exp : \underset{\mathfrak{g}}{\underset{\cap}{\mathcal{U}}} \longrightarrow \underset{G}{\underset{\cap}{V}}$$

soit un difféomorphisme

et on pose $\mathcal{U}(\gamma, g) = \{ (\alpha, h) \in \tilde{G}$ tq $h \in g\mathcal{U}$ et α est homotope à la composée de γ avec un chemin à valeurs dans $g\mathcal{U}$ $\}$





On montre facilement que cet ensemble est en bijection avec $\mathcal{U}$

On recouvre $\tilde{G}$ par de tels ensembles

Cela forme un système de cartes

On peut mettre sur $\tilde{G}$ une seule topologie telle que les $\mathcal{U}(\gamma, g)$ soient des ouverts et la bijection $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}(\gamma, g)$ soit un homéomorphisme. On vérifie que $\tilde{G}$ est un groupe de Lie

$$p : \tilde{G} \longrightarrow G \quad \text{est un morphisme de groupes de Lie}$$
$$(\gamma, g) \longmapsto g$$

et que $D_1 p = id$ i.e. p est un revêtement. ■

<u>Rque</u> : Comme p est un revêtement $\operatorname{Ker} p$ est un sous-groupe discret de $\tilde{G}$.

On $\operatorname{Ker} p = \{ (\gamma, 1)$ où $\gamma : [0,1] \to G$ tq $\gamma(0) = \gamma(1) = 1 \}/\sim$

$= \pi_1(G)$ par définition.

On observe que $\pi_1(G)$ est muni de deux lois de groupe :

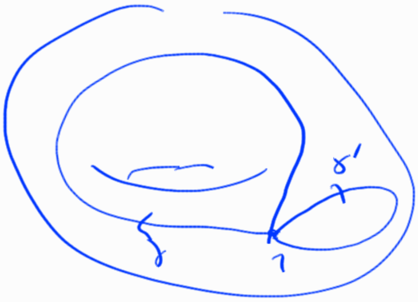
<u>la 1ère</u> est celle qui vient de la loi de $\tilde{G}$:

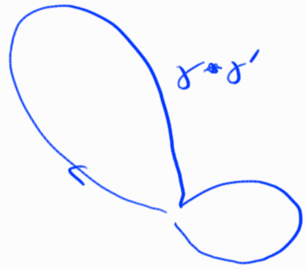
$$[\gamma][\gamma'] = [\gamma\gamma'] \quad \text{où} \quad \gamma\gamma'(t) = \gamma(t)\gamma'(t)$$

<u>la 2ème</u> : la concaténation $[\gamma] * [\gamma'] = [\gamma * \gamma']$

où $\gamma * \gamma'(t) = \gamma(2t)$ si $t \le \frac{1}{2}$

$= \gamma'(2t-1)$ si $t \geq \frac{1}{2}$





on peut montrer que $[\gamma\gamma'] = [\gamma * \gamma']$
donc ces deux structures de groupe coïncident, en plus $\pi_1(G)$ est toujours un groupe abélien alors G ne l'est pas et que $\pi_1(X)$ n'est pas abélien pour X quelconque.

<u>exemple</u> : – S^1 a pour revêtement universel $\mathbb{R}$

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad \theta \mapsto \exp(i\theta) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(S^1) = \operatorname{Ker}\phi \simeq \mathbb{Z}$$

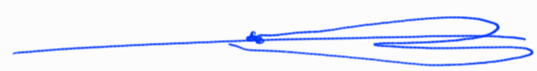
– $SO(3)$ a pour revêtement universel SU_2

$$\phi : SU_2 \to SO(3), \quad g \to Ad_g \qquad \operatorname{Ker}\phi = \{\pm 1\} \qquad \pi_1(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

car SU_2 est simplement connexe.

<u>En effet</u> pour montrer qu'un groupe G est simplement connexe on montre que $\pi_1(G) = 1$ (groupe trivial).

On voit bien que $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$



γ

$H(t,s) = s\gamma(t)$ est une homotopie entre γ et le chemin constant.

Pour SU_2, on se rappelle que $SU_2 \simeq S^3$ difféomorphe.
il suffit de montrer que $\pi_1(S^3) = 1$

or $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$

$S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$

Si $\gamma : [0,1] \to S^3$ $\gamma(0) = \gamma(1) = 0 \in \mathbb{R}^3 \cup \infty$.

on veut mq $\gamma \sim 0$

Si γ évite ∞ on fait comme avant.

sinon on peut approximer γ par une application $\mathcal{C}^\infty$ (travail)

γ est homotope à son approximation

alors γ n'est pas surjective, donc elle évite un point, on peut supposer que ce point c'est l'∞. On se ramène au cas précédent.

En général. $\pi_1(S^n) = 1$ $\forall n \geq 2$.

On peut montrer que $\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $n \geq 3$

$\pi_1(SU_n) = 0$ $n \geq 2$

Autre exemple: Soit G un groupe abélien connexe.

On a le morphisme $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local.

donc un revêtement. Comme $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel, il est simplement connexe, donc $\mathfrak{g}$ est le revêtement universel de G.

En particulier, en notant $K = \mathrm{Ker}[\exp : \mathfrak{g} \to G]$

K est un groupe discret de $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$

(Thm classique) $\exists\, e_1, \dots, e_n$ base de $\mathbb{R}^n$ tq $K = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_k$

donc $G = \mathfrak{g}/K = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$

$= (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$

Conclusion, tout groupe de Lie abélien est un produit de S^1 et de $\mathbb{R}$.

Chapitre 4 Représentation des groupes (de Lie) compacts

I Opérations sur les représentations des groupes de Lie

Def: Soit G un groupe de Lie. Une représentation réelle de G est un morphisme de groupes de Lie $\rho_V : G \to GL(V)$ où V est un espace vectoriel réel.

$GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{R})$

Une représentation complexe est un morphisme $\rho_V : G \to GL(V)$ où V est un espace vectoriel complexe et $GL(V) = \{ A : V \to V$ sont des isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires$\}$

$GL(V) = GL_n(\mathbb{C})$

Si V est un espace vectoriel réel, on peut considérer l'espace vectoriel $V \otimes \mathbb{C}$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V, on a que $e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1$ est une base de $V \otimes \mathbb{C}$ comme espace vectoriel complexe.

à toute matrice $A \in End(V)$ on peut associer $A \otimes 1 \in End(V \otimes \mathbb{C})$

cela donne un morphisme de groupes $GL(V) \longrightarrow GL(V \otimes \mathbb{C})$

qui dans une base comme précédemment est le morphisme $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$

Ainsi à toute représentation $\rho_V : G \to GL(V)$ on peut associer sa représentation complexifiée $\rho_V^{\mathbb{C}} : G \to GL(V \otimes \mathbb{C})$

Réciproquement, toute représentation complexe $\rho_V : G \to GL(V)$ où V est un espace vect. complexe peut être vue comme une rep. réelle si on pense à V comme un espace vectoriel réel ⚠ si V est de dim n sur $\mathbb{C}$ alors $V^{\mathbb{R}}$ est de dim $2n$ sur $\mathbb{R}$.

Cela donne un morphisme

$$GL(V) \longrightarrow GL(V^{\mathbb{R}})$$
$$GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_{2n}(\mathbb{R})$$

On peut associer à toute rep. complexe $\rho_V : G \to GL(V)$ une représentation "réélifiée" $\rho_V^{\mathbb{R}} : G \to GL(V^{\mathbb{R}})$

⚠ ce ne sont pas des applications inverses l'une de l'autre.

Représentation triviale : $\rho : G \longrightarrow GL_1(\mathbb{R}) \,/\, GL_1(\mathbb{C})$
$\qquad\qquad g \longmapsto 1$ $\qquad (GL_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*, \; GL_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*)$

Représentation somme : si $\rho_V : G \to GL(V)$ et $\rho_W : G \to GL(W)$

on définit $\rho_V \oplus \rho_W : G \to GL(V \oplus W)$

définie par $\rho_V \oplus \rho_W(g)(v + w) = \rho_V(g)(v) + \rho_W(g)(w)$

matriciellement, on peut écrire $\rho_V \oplus \rho_W = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \rho_V & 0 \\ \hline 0 & \rho_W \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} V \\ W \end{array}$

Représentation produit si $\rho_V : G \to GL(V)$ $\rho_W : G \to GL(W)$

on définit $\rho_V \otimes \rho_W : G \longrightarrow GL(V \otimes W)$

définie par $\rho_V \otimes \rho_W(g)(v \otimes w) = (\rho_V(g)\, v) \otimes (\rho_W(g)\, w)$

matriciellement plus compliqué : en général assez difficile à comprendre

Représentation contragrédiente : si $\rho_V : G \to GL(V)$ est une représentation

la représentation contragrédiente est $\rho_{V^*} : G \longrightarrow GL(V^*)$

définie par $\rho_{V^*}(g)\, \lambda = \lambda \circ \rho_V(g)^{-1} = \lambda \circ \rho_V(g^{-1})$

Notation : Si on considère $\rho_V : G \to GL(V)$ qui est bien claire

on notera $\rho_V(g).v = gv$ (on pense que G agit sur V linéairement)

Irréductibilité : Une représentation $\rho_V : G \to GL(V)$ est irréductible

si tout sous-espace W stable est soit égal à $\{0\}$ soit égal à V.

où $W \subset V$ est stable si $\forall g \in G \; \forall w \in W \quad \rho_V(g)(w) \in W$

($\forall g \in G \quad \rho_V(g)$ stabilise W).

⚠ l'irréductibilité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas la même notion.

ex. $\rho : S^1 \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes de Lie

$\qquad e^{i\theta} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ donc une représentation.

observation : elle est irréductible :

aucune droite $D \subset \mathbb{R}^2$

n'est stable par la rotation

d'angle $90°$.

Par contre, la même représentation vue dans $GL_2(\mathbb{C})$ est réductible : si on note e_1, e_2 la base canonique on peut poser $f_1 = e_1 + ie_2$ $f_2 = e_1 - ie_2$ base complexe

La matrice de ρ dans cette base $\rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

les sous-espaces $W_1 = \mathbb{C} f_1$ et $W_2 = \mathbb{C} f_2$ sont stables par la représentation. $\rho^{\mathbb{C}}$ n'est pas irréductible, elle est <u>réductible</u>.

Le prototype de résultats qu'on cherche est une classification des représentations irréductibles d'un groupe compact.

<u>Def.</u> on dit que $\rho_V : G \to GL(V)$ et $\rho_W : G \to GL(W)$ sont isomorphes s'il existe $\varphi : V \to W$ isomorphisme d'espaces vectoriels tq $\varphi(\rho_V(g)(v)) = \rho_W(g)\,\varphi(v)$ $\forall g \in G$ $\forall v \in V$.

<u>Thm</u> : toute représentation de dim finie de S^1 est somme directe des représentation de dim 1 irréductibles suivantes.

$$\rho_n : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \\ e^{i\theta} & \longmapsto & e^{in\theta} \end{array}$$

Les représentations forme un système de représentants des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de S^1.

<u>Exercice</u> : $\rho_n \otimes \rho_m = \rho_{n+m}$

Peut-on faire la même chose avec des groupes de Lie plus generaux ?

Réponse : oui si G est compact.

Par exemple si $G = SU_2$ groupe d'isométrie du spin.

classification des rep donne un $\frac{1}{2}$ entier (positif) appelé spin.

<u>II Propriétés des groupes de Lie compacts</u>

Si G est un groupe de Lie compact, la théorie des représentations se simplifie grâce à l'existence de la <u>mesure de Haar</u>.

<u>Thm</u> : Soit G un groupe de Lie compact, il existe une unique mesure de Radon invariante à gauche et telle que $\mu(G) = 1$

De plus elle est automatiquement invariante à droite.

<u>Rappel</u> : μ mesure de Radon sur G signifie que μ est une mesure sur la tribu Borélienne qui vérifie :

① $\mu(U) = \sup \mu(K)$ $K \subset U$ compact U ouvert.

② $\mu(B) = \inf \mu(U)$ $B \subset U$ B borélien, U ouvert

μ est invariante à gauche / droite si $\forall B$ borélien $\forall g \in G$

$\mu(gB) = \mu(B)$ / à droite $\mu(Bg) = \mu(B)$

Le théorème de Riesz dit que la donnée de μ est équivalente à la donnée d'une forme linéaire $I : \underset{\{\text{fonctions continues de } G \text{ dans } \mathbb{R}\}}{\mathcal{C}(G)} \to \mathbb{R}$

tq I est continue pour la topologie de la convergence uniforme, $I(f) \geq 0$ si $f \geq 0$, $I(1) = 1$, $I(f \circ L(g)) = I(f)$

Bien sûr, on va noter $\boxed{I(f) = \int_G f \, d\mu}$

<u>Démo</u> : (pas au programme). utilise l'intégration des formes différentielles.

<u>Rappel</u> : Soit G, groupe de Lie alors G est une variété <u>orientable</u>

ie on peut munir les espaces tangents $T_g G$ d'une orientation globalement bien définie : en effet $D_g L(g) : T_1 G \xrightarrow{\sim} T_g G$

permet d'identifier tous les espaces tangents $T_g G$ à $T_1 G = \mathfrak{g}$.

il suffit donc d'orienter $\mathfrak{g}$ (déclarer quelles sont les bases positives)

pour orienter G.

Or sur une variété orientée M, on peut intégrer les formes différentielles de degré $n = \dim M$. Une telle forme différentielle, c'est la donnée

$\forall x \in M$ $\omega_x : \underbrace{T_x M \times \cdots \times T_x M}_{} \longrightarrow \mathbb{R}$

qui est n-linéaire alternée et dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$ de $x \in M$.

Pour une telle forme ω, on peut définir $\int_M \omega \in \mathbb{R}$.

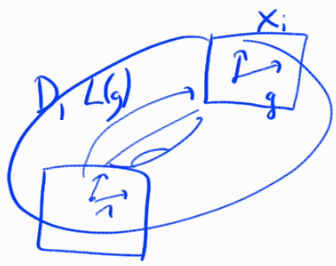
La mesure de Haar s'obtient en posant $I(f) = \int_G f \omega$

pour une certaine forme différentielle ω sur G qui est <u>invariante à gauche</u>.

On choisit $\omega_0 : \underbrace{\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}}_{n = \dim G} \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme n-linéaire alternée sur l'algèbre de Lie, puis on la prolonge à G tout entier en posant

$$\omega_g(X_1, \dots, X_n) = \omega_0\left(D_1L(g)^{-1}X_1, \dots, D_1L(g)^{-1}X_n\right).$$

où $X_i \in T_gG$



Cela définit une forme diff. ω sur G qui est par construction invariante à gauche.

On pose alors $I(f) = \int_G f\omega$ on a $I(1) = \int_G \omega > 0$

on remplace $I(f) = \dfrac{1}{\int_G \omega} \int_G f\omega$: ceci vérifie toutes les hypothèses du théorème.

<u>Exemple</u>. $S^1 = \{ e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi[\}$

La mesure de Haar est construite à partir de la forme différentielle $\dfrac{d\theta}{2\pi}$.

Sur SU_2 $\quad g = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$

$x_1 = \cos\theta \qquad x_2 = \sin\theta\cos\varphi \qquad x_3 = \sin\theta\sin\varphi\cos\psi \qquad x_4 = \sin\theta\sin\varphi\sin\psi$

$\theta \in [0, \pi[\qquad \varphi \in [0, \pi[\qquad \psi \in [0, 2\pi[$

alors $\boxed{\omega = \sin^2\theta \, \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\psi.}$

invariance à gauche revient à montrer

$$\omega_h(X_1, \dots, X_n) = \omega_{gh}(DL(g)X_1, \dots, DL(g)X_n)$$

$\forall \, X_1, \dots, X_n \in T_hG.$