

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS

CONTENTS

1. Exemples d'invariants	1
1.1. Formes binaires quadratiques	1
1.2. Formes binaires cubiques	2
1.3. Formes binaires quartiques	3
1.4. Formes binaires quintiques	4
1.5. Paires de formes quadratiques	4
1.6. Formes cubiques ternaires	5
1.7. Le calcul symbolique/graphique	6
2. Quotients algébriques	9
2.1. Groupes algébriques affines	9
2.2. Actions de groupes	10
2.3. Groupes réductifs	13
2.4. Quotient affine	15
2.5. Exemples de quotients	17
2.6. Le critère de Hilbert-Mumford	20
2.7. Applications du critère	22
2.8. Le cas projectif	25
3. Application aux espaces de modules de fibrés	28
3.1. Espaces de modules de fibrés en droites	28
3.2. Généralités sur les fibrés vectoriels	31
3.3. Espace des modules des fibrés de rang 2	34
3.4. Exemples d'espaces de modules	37
4. Espaces de modules et représentabilité	38
4.1. La grassmannienne	39
4.2. Le groupe de Picard	40
References	42

1. EXEMPLES D'INVARIANTS

1.1. **Formes binaires quadratiques.** Une des toutes premières motivations pour l'étude des invariants algébriques est l'étude des polynômes. Par exemple, si on considère le polynôme $P(x) = ax^2 + 2bx + c$, on ne peut pas nier l'importance de la quantité $\Delta = b^2 - ac$.

Sa propriété fondamentale est la suivante: si on homogénéise P en posant $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ on obtient une forme quadratique et le discriminant $\Delta(q)$ est le déterminant de q dans la base canonique. Ainsi, pour toute transformation linéaire $f \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ on aura $\Delta(q \circ f) = \det(f)^2 \Delta(q)$.

Mieux encore, si on suppose que f est de déterminant 1, on a simplement $\Delta(q \circ f) = \Delta(q)$, ou encore Δ est un *invariant* (pour l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ sur les formes quadratiques à deux variables - binaires dans la terminologie du 19ème siècle). En fait, tout polynôme dans les variables a, b, c qui satisfait la même condition d'invariance est un polynôme en Δ . Il n'y a pas à en chercher d'autres, et d'ailleurs, le discriminant suffit en général à l'étude des polynômes de degré 2.

1.2. Formes binaires cubiques. Regardons ce qui se passe dans le cas des formes cubiques: soit $q(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ une telle forme. Si on pense au polynôme $P(x) = q(x, 1)$, il semble que ce qui va jouer le rôle de Δ est le discriminant, à savoir le résultant de P et P' . Précisément, il s'agit de la quantité Δ suivante:

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 3a & 0 & 0 \\ 3b & a & 6b & 3a & 0 \\ 3c & 3b & 3c & 6b & 3a \\ d & 3c & 0 & 3c & 6b \\ 0 & d & 0 & 0 & 3c \end{pmatrix} = -a\Delta, \quad \Delta = -a^2d^2 + 6abcd - 4b^3d - 4a^2c^2 + 3b^2c^2.$$

A nouveau, on peut prouver que cette quantité vérifie $\Delta(q \circ f) = \Delta(q)$ et que tout polynôme en a, b, c, d satisfaisant la même propriété est un polynôme en Δ . Avant de le vérifier, rappelons une propriété élémentaire du discriminant en tout degré: si $P(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ alors $\Delta = \pm \prod_{i < j} (a_i - a_j)^2$. Cette formule n'est pas bien étonnante: par définition le discriminant mesure si P et P' sont premiers entre eux. Si tel n'est pas le cas, P doit avoir une racine double et donc Δ est formellement divisible par $(a_i - a_j)$. Écrit de façon homogène, si $q = \prod_i l_i$ où l_i désigne des formes linéaires $l_i(x, y) = x - a_i y$ dans le cas précédent on aura

$$\Delta(q) = \pm \prod_{i < j} \det(l_i, l_j)^2.$$

Outre son aspect esthétique, cette formule permet de montrer l'invariance du discriminant en effet, notons V le dual de \mathbb{C}^2 . Le déterminant est une application $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\det(f(l), f(l')) = \det(l, l')$ pour tout $f \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$. L'invariance de Δ s'en déduit immédiatement.

Prouvons la proposition: soit $\phi(q)$ un invariant polynomial dans les coefficients de q . Il se décompose en somme de polynômes homogènes et on se convainc que chacun est obligatoirement invariant. Ainsi on peut supposer que ϕ est de degré disons d par rapport aux coefficients de q .

Fixons une forme cubique q_0 de discriminant non nul et posons $c = \frac{\phi(q_0)^4}{\Delta(q_0)^d}$. Pour toute forme q vérifiant $\Delta(q) \neq 0$ il existe $f \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $q = \lambda q_0 \circ f$. En effet, chaque forme est un produit de trois formes linéaires distinctes et SL_2 agit transitivement sur les triplets de points distincts dans $\mathbb{P}(V)$. Par invariance de Δ et de ϕ on aura $\phi(q) = \lambda^d \phi(q_0)$ et $\Delta(q) = \lambda^4 \Delta(q_0)$ et donc $\phi(q)^4 = c \Delta(q)^d$. Finalement l'ensemble $\{q, \Delta(q) \neq 0\}$ est dense dans l'espace des formes cubiques - pour la topologie usuelle comme pour celle de Zariski et l'égalité est vraie pour tout q . Il reste à se convaincre que Δ est irréductible pour en déduire que d est divisible par 4 et que ϕ est proportionnel à $\Delta^{d/4}$.

1.3. Formes binaires quartiques. Les choses changent à partir du degré 4: le discriminant n'est plus le seul invariant. Pour s'en convaincre, on peut se rappeler que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ n'agit pas transitivement sur les quadruplets de points dans $\mathbb{P}(V)$, au contraire, l'action préserve un autre invariant, le birapport.

Soit l_1, l_2, l_3, l_4 quatre formes linéaires non nulles et deux à deux indépendantes dans V , on pose

$$[l_1, l_2, l_3, l_4] = \frac{\det(l_1, l_2) \det(l_3, l_4)}{\det(l_1, l_3) \det(l_2, l_4)}$$

Cette expression vérifie $[f(l_1), f(l_2), f(l_3), f(l_4)] = [l_1, l_2, l_3, l_4]$, c'est donc aussi un invariant. Cependant ce n'est pas un invariant des formes binaires quartiques car le birapport n'est pas symétrique dans les quatre formes linéaires, contrairement à l'expression $q = l_1 l_2 l_3 l_4$.

Dans ce cas, il y a deux invariants particulièrement simples.

Étant donné $q(x, y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$ on pose

$$I(q) = ae - 4bd + 3c^2, \quad J(q) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Il se trouve que l'algèbre des fonctions polynomiales en a, b, c, d, e invariante est précisément l'algèbre $\mathbb{C}[I, J]$ des polynômes en I et J . Il s'agit d'un très vieux théorème, dû à Boole et Cayley dans les années 1840, peut-être le premier résultat non trivial de la théorie des invariants.¹

En particulier, le discriminant Δ est un polynôme en I et J : précisément $\Delta = I^3 - 27J^2$. L'idée naïve de la théorie est que les invariants suffisent à déterminer les classes d'équivalence de formes; par exemple ici que deux formes quartiques q et q' sont équivalentes au sens où il existe $f \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $q' = q \circ f$ si et seulement si $I(q) = I(q')$ et $J(q) = J(q')$.

Voyons tout de suite que ce n'est pas le cas en déterminant toutes les formes quartiques q pour lesquelles $I(q) = J(q) = 0$.

¹Boole a d'abord montré l'invariance du discriminant en tout degré, Cayley a trouvé l'invariant I , puis Boole l'invariant J , puis Cayley le fait que tout invariant était un polynôme en I et J .

Si $q = l_1 l_2 l_3 l_4$ vérifie que au moins trois formes sont distinctes (le polynôme associé a au plus une racine double) alors quitte à appliquer une transformation linéaire on peut supposer que $l_1(x, y) = x$, $l_2(x, y) = y$ et $l_3(x, y) = x - y$. Du coup on écrit $l_4(x, y) = \alpha x + \beta y$ et on calcule directement

$$I(q) = \frac{1}{12}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \quad J(q) = \frac{1}{432}(\alpha - \beta)(\alpha + 2\beta)(\beta + 2\alpha).$$

On en déduit que dans ce cas $\alpha = \beta = 0$ et donc $q = 0$. Ainsi, il y a au plus deux formes distinctes parmi l_1, l_2, l_3, l_4 . On a trois cas possibles représentés par les expressions suivantes: $q_1(x, y) = x^4$, $q_2(x, y) = x^3 y$, $q_3(x, y) = x^2 y^2$. On constate immédiatement que seules q_1 et q_2 vérifient $I(q) = J(q) = 0$. La conclusion est que $I(q) = J(q) = 0$ si et seulement si q contient une forme au cube (ou le polynôme associé a une racine triple).

Que de tels polynômes ne soient pas distingués du polynôme nul par un invariant est un vrai problème qui sera traité par la théorie de Mumford.

1.4. Formes binaires quintiques. Cela devient infernal, l'algèbre des invariants est engendrée par I_4, I_8, I_{12}, I_{18} de degrés respectifs notés en indice. Les trois premiers sont algébriquement indépendants tandis que le carré du dernier est un polynôme dans les trois premiers. Le problème de déterminer ces invariants a longtemps obsédé Cayley mais a été finalement résolu par Hermite en 1858. On arrive difficilement à décrire complètement l'algèbre des invariants seulement jusqu'en degré 12. On sait par ailleurs beaucoup de choses sur ces invariants, mais on n'en dira pas grand chose ici.

1.5. Paires de formes quadratiques. Prenons deux formes quadratiques q_1, q_2 définies sur \mathbb{C}^n . Comme dans le cas $n = 2$, il n'y a pour chaque forme considérée individuellement qu'un seul invariant à savoir les déterminants q_1 et q_2 . La preuve est le théorème d'inertie de Sylvester, ami et collaborateur de Cayley, indiquant que deux formes non dégénérées quelconques q_1 et q_2 sont équivalentes au sens où il existe $f \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $q_1 = q_2 \circ f$. Le déterminant $\det(q)$ est donc invariant pour le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ et tout autre invariant est un polynôme en $\det(q)$ comme précédemment.

Il n'en est pas de même si on fait agir f simultanément sur q_1 et q_2 comme le montre le raisonnement géométrique suivant.

Supposons $n = 3$ et q_1, q_2 non-dégénérées: notons $C_i = \{[v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), q_i(v) = 0\}$ les coniques associées pour $i = 1, 2$. D'après le théorème de Bézout, deux telles quadriques se coupent en 4 points que l'on suppose distincts. Chaque conique étant isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, le birapport de ces quatre points sur chaque conique fournit deux invariants - si on oublie temporairement le problème de l'ordre des points. Ainsi, on a 4 invariants au total, ce qui est en adéquation avec le compte heuristique valable en toute dimension $2 \times \frac{n(n+1)}{2} - (n^2 - 1) = n + 1$.

Il est très facile de construire le bon nombre d'invariants: écrivons $\det(\lambda q_1 + q_2) = \sum_{i=0}^n \lambda^i I_i(q_1, q_2)$. On se convainc facilement que l'algèbre des invariants est l'algèbre des polynômes en I_0, \dots, I_n . Pour voir à quoi cela peut bien servir, essayons de déterminer à quelle condition les deux coniques C_1 et C_2 sont tangentes. Écrit correctement, il s'agit d'un fermé algébrique dans l'espace des paires de formes quadratiques, invariant par $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Il doit donc correspondre à l'annulation d'expressions polynomiales dans les variables I_0, \dots, I_3 .

À équivalence près, on peut supposer que $q_1(x, y, z) = 2xy + z^2$ et que la deuxième conique C_2 est tangente à C_1 au point e_1 . L'espace tangent commun est alors engendré par e_1 et e_3 . On a donc les expressions matricielles suivantes:

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det(\lambda q_1 + q_2) = -(\lambda + a)^2(\lambda + d)$. Ce polynôme a donc une racine double et son discriminant est nul. Rappelons nous la partie 1.2, une telle équation est une expression explicite de degré 4 dans les variables I_0, I_1, I_2, I_3 .

1.6. Formes cubiques ternaires. Terminons cette série d'exemple par l'étude de "l'espace des modules des courbes elliptiques". Toute courbe elliptique X se plonge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ comme une cubique, et ce plongement est unique modulo l'action du groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$.

Pour s'en convaincre, partons d'une courbe elliptique X , choisissons un point $p \in X$ et considérons le plongement associé au diviseur $3p$. Cela nous fournit un plongement de X comme une cubique dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si maintenant on se donne deux plongements $i_1 : X \rightarrow \mathbb{P}(V_1)$ et $i_2 : X \rightarrow \mathbb{P}(V_2)$, on choisit des points d'inflexion p_1 et p_2 de $i_1(X)$ et $i_2(X)$ respectivement. Par définition, la tangente à $i_1(X)$ en p_1 coupe $i_1(X)$ à l'ordre 3 et donne l'isomorphisme $i_1^* \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}_X(3p_1)$, de même pour i_2 . On conclut en constatant que la translation τ qui envoie p_1 sur p_2 définit un isomorphisme $\tau^* : H^0(X, \mathcal{O}_X(3p_2)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(3p_1))$. Son adjoint induit un isomorphisme $V_1 \rightarrow V_2$ qui commute aux plongements i_1 et i_2 .

Ainsi à toute courbe elliptique on peut faire correspondre une forme cubique ternaire $q(x, y, z)$ bien définie à transformation près. Les invariants de formes cubiques ternaires sont donc des invariants des courbes elliptiques. La détermination explicite des invariants a été obtenue par le mathématicien Aronhold [A50], il y a deux invariants S et T de degrés respectifs 4 et 6. Leur formule explicite est très longue, on se contentera ici de la donner en supposant que q est sous forme de Weierstrass, ce qu'on peut toujours supposer si la cubique associée est lisse.

Proposition 1. *Soit q une forme cubique ternaire et X la sous-variété projective $X = \{v \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), q(v) = 0\}$ définie par q . Alors X est lisse si et seulement si $R = S^3 - T^2$ est non nul et dans ce cas, q est équivalente à la forme cubique*

suivante:

$$q(x, y, z) = -xz^2 + 4y^3 + ax^2y + bx^3, \text{ avec } a = -27S(q), b = 27T(q)$$

La preuve se trouve dans [Du10] Proposition 4.4.3. On en conclut qu'une cubique lisse $X(q)$ est déterminée par le couple S, T modulo l'action de \mathbb{C}^* donnée par $\lambda.(S, T) = (\lambda^4 S, \lambda^6 T)$. Il revient au même de se donner le couple $[S^3, T^2]$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou l'invariant $j = \frac{S^3}{R} = \frac{S^3}{S^3 - T^2}$.

Observons la similarité entre les invariants des cubiques ternaires et ceux des quartiques binaires. Elle a bien sûr une origine géométrique: si X est une courbe elliptique et p un point de X , l'involution elliptique τ de centre p a pour quotient la sphère de Riemann avec 4 points de ramification. La courbe X est donc déterminée par ces 4 points, on peut donc lui associer une quartique binaire bien définie à équivalence près, notons la ϕ . Sous forme de Weierstrass, l'involution elliptique est l'application $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ et le revêtement double $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est induit par la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Ses points de ramification sont donc les zéros de la forme $4y^3 + ax^2y + bx^3$ ainsi que le point $x = 0$. On peut donc poser $\phi(x, y) = x(4y^3 + ax^2y + bx^3)$. Un calcul direct montre que $I(\phi) = -a$ et $J(\phi) = -b$. Cela montre une analogie frappante entre les deux familles d'invariants.

1.7. Le calcul symbolique/graphique. Aux anglais Cayley et Sylvester revient le mérite d'avoir commencé l'étude systématique des invariants comme ébauché dans cette première partie. Malgré leurs capacités de calcul colossales ils n'ont pas trouvé de procédure générale pour produire tous les invariants - disons des formes à n variables de degré d . Sylvester doutait même qu'il en suffise un nombre fini pour engendrer l'algèbre des invariants. C'est à l'école allemande représentée principalement par Aronhold, Clebsch et Gordan que revient l'invention du calcul symbolique. Ils en ont déduit une famille d'invariants (dont on peut extraire une sous-famille finie et génératrice) et une famille génératrice de relations, qu'ils ont appelé syzygies. On en donne ici une représentation graphique, déjà considérée par Sylvester, longtemps oubliée mais remise au goût du jour par - disons - Feynman et Penrose.

Soit q une forme à n variables de degré d . On écrit

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = d} a_{i_1, \dots, i_n} \binom{n}{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Notons V le dual de \mathbb{C}^n . La forme q s'interprète naturellement comme un élément de $S^d V$ qui est par définition l'ensemble des tenseurs symétriques de $V^{\otimes d}$. Si on veut écrire l'élément correspondant à q dans $V^{\otimes d}$ on obtient la formule

$$q = \sum_{k_1, \dots, k_d=1}^n a_{i_1, \dots, i_n} x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_d}$$

où pour tout j , i_j est le nombre de k_l égaux à j . On remarque l'heureuse disparition des coefficients binomiaux. Donnons un exemple très simple: la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ a pour forme tensorielle $ax \otimes x + bx \otimes y + by \otimes x + cy \otimes y$.

On va construire un invariant de degré k pour les formes de degré d à n variables à partir d'un graphe avec k sommets *symétriques* d -valents et $\frac{kd}{n}$ sommets *antisymétriques* n -valents. Formellement un tel graphe est un quadruplet $\Gamma = (S, A, E, o)$ où S, A sont des ensembles finis et $E \subset S \times A$. On note pour $v \in S$ $\text{Lk}(v) = \{w \in A, (v, w) \in E\}$ (symétriquement pour $v \in A$), et on suppose que $|\text{Lk}(v)| = d$ pour tout $v \in S$ et $|\text{Lk}(v)| = n$ pour tout $v \in A$. La notation o indique que l'on choisit pour tout $v \in A$ une orientation sur l'ensemble $\text{Lk}(v)$, à savoir une numérotation modulo l'action du groupe alterné. En comptant le nombre d'arêtes, on observe que nécessairement n divise kd .

Construisons une application linéaire $L_\Gamma : (S^d V)^k \rightarrow \mathbb{C}$. Il suffira de poser $I_\Gamma(P) = L_\Gamma(P, \dots, P)$. Par multilinéarité, on peut supposer que l'on applique L_Γ sur un k -uplet de tenseurs monomiaux. Numérotions $\text{Lk}(v)$ pour tout $v \in S \cup A$ en respectant l'orientation des sommets de A . On distribue chaque tenseur monomial sur un sommet de S , et à chaque sommet, on répartit les monômes sur les arêtes qui lui sont incidentes. Pour chaque sommet de A , on collecte les monômes qui sont placés au bout de l'arête. Le nombre I_Γ est finalement le produit sur tous les sommets de A des déterminants des monômes incidents à ce sommet multipliés par les coefficients correspondants.

Regardons quelques exemples: Soit Γ le graphe avec deux sommets symétriques (noirs) et deux sommets antisymétriques (blancs) représentés sur la Figure 1. On calcule $L_\Gamma(ax \otimes x + bx \otimes y + by \otimes x + cy \otimes y, ax \otimes x + bx \otimes y + by \otimes x + cy \otimes y)$ en On calcule $L_\Gamma(ax \otimes x + bx \otimes y + by \otimes x + ay \otimes y, ax \otimes x + bx \otimes y + by \otimes x + ay \otimes y)$

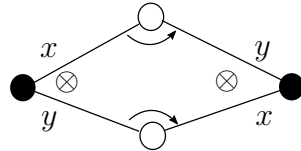
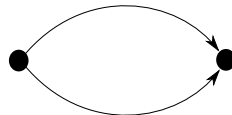


FIGURE 1. Delta

en utilisant la multilinéarité et la règle $L_\gamma(u \otimes v, u' \otimes v') = \det(u, u') \det(v, v')$. On obtient $L_\Gamma(q, q) = ac - b^2 - b^2 + ac = 2\Delta(q)$.

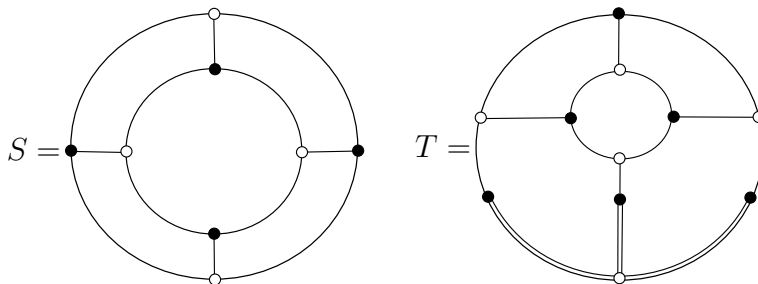
On remarque que comme les sommets antisymétriques sont bivalents dans le cas des formes binaires, il est plus simple de représenter ces sommets avec une flèche, c'est-à-dire ainsi:



On vérifie que les deux invariants I et J sont donnés à un scalaire près par les deux graphes suivants:



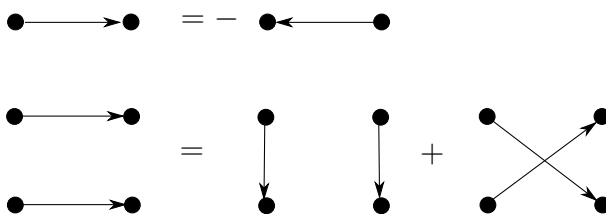
Enfin, les deux invariants d'Aronhold sont donnés par le graphe suivant:



Un des théorèmes fondamentaux des invariants qu'on ne démontrera pas tout de suite est le suivant:

Théorème 1. *L'algèbre des invariants de degré k dans les formes de degré d à n variables est engendrée linéairement par les invariants I_Γ où Γ a k sommets symétriques de valence d et $\frac{kd}{n}$ sommets antisymétriques de valence n .*

De plus, on peut décrire explicitement les relations (syzygies) entre ces invariants, dans le cas des formes binaires, les relations sont engendrées par les relations suivantes parmi les graphes orientés, cf [OS89].



Une conséquence importante du calcul symbolique est le résultat suivant dû à Gordan.

Théorème 2. *Pour tout n et d , il existe un nombre fini d'invariants I_1, \dots, I_N des formes de degré d à n variables tel que tout invariant soit un polynôme en I_1, \dots, I_N .*

Ce résultat est considéré comme un résultat majeur de la théorie du 19ème siècle, dû à l'école allemande. L'école anglaise (essentiellement Sylvester) a longtemps essayé de retrouver ce résultat à partir de ses propres méthodes sans succès.

David Hilbert a redémontré et généralisé ce théorème en 1890 en introduisant des méthodes non effectives (Noetherianité). Son apport révolutionnaire a été difficilement assimilé et - quand ce fut le cas - a considérablement diminué l'activité dans ce domaine.

2. QUOTIENTS ALGÈBRIQUES

On attaque maintenant le problème général de la théorie des invariants qui consiste à former le quotient d'une variété algébrique par l'action d'un groupe algébrique. Dans les exemples qui nous ont concerné jusqu'ici, les variétés algébriques étaient des espaces vectoriels, et les groupes algébriques, les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ ou $SL_n(\mathbb{C})$. Notre première généralisation sera de remplacer l'espace vectoriel par une variété algébrique affine générale et de remplacer les groupes ci-dessus par des groupes algébriques affines quelconques. A partir de maintenant, l'adjectif "algébrique" sera le plus souvent sous-entendu.

Une variété affine est par définition le spectre d'une algèbre de type fini A sur \mathbb{C} . Ainsi \mathbb{C}^n est le spectre de l'algèbre $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, et très généralement, la sous-variété V de \mathbb{C}^n définie par l'annulation des polynômes $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est définie par l'algèbre $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ où I est l'idéal engendré par P_1, \dots, P_m . On notera généralement $A = \mathbb{C}[V]$.

Par simplicité, on remplacera souvent $\text{Spec } A$ par le spectre maximal

$$\text{Spm}(A) = \{\mathfrak{m} \subset A, \text{ idéal maximal}\} = \{\phi : A \rightarrow \mathbb{C}, \text{ morphisme d'algèbre}\}$$

On constate que comme A est toujours supposée de type fini, elle est toujours de la forme $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$. Comme $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est noetherien, I est engendré par un nombre fini de polynômes P_1, \dots, P_m . Ainsi, $\text{Spm}(A)$ s'identifie au lieu d'annulation dans \mathbb{C}^n des polynômes P_1, \dots, P_m .

Pour clore ce bref rappel de géométrie algébrique, rappelons qu'un morphisme $f : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$ est par définition donné par un morphisme de \mathbb{C} -algèbres $f^* : B \rightarrow A$. L'application $f : \text{Spm } A \rightarrow \text{Spm } B$ est donnée par $\phi \mapsto \phi \circ f^*$. Enfin, le produit de deux variétés affines $\text{Spec } A$ et $\text{Spec } B$ est donné par la formule $\text{Spec } A \times \text{Spec } B = \text{Spec } A \otimes_{\mathbb{C}} B$.

Anticipons la suite: on appellera variété algébrique un schéma noetherien séparé défini sur \mathbb{C} , c'est-à-dire un espace topologique localement annelé (X, \mathcal{O}_X) recouvert par un nombre fini d'ouverts isomorphes aux spectres de \mathbb{C} -algèbres de type fini. On demande que X est séparé au sens où la diagonale est fermée dans $X \times X$. Souvent, on demandera aussi que X soit réduit, c'est-à-dire qu'aucun des anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ n'ait d'éléments nilpotents, où ce qui revient au même, que toutes les algèbres servant à recouvrir X soient réduites.

2.1. Groupes algébriques affines. Un groupe algébrique affine G est une variété affine munie d'une structure de groupe compatible. C'est-à-dire que $G = \text{Spm}(A)$ où A est une \mathbb{C} -algèbre de type fini. Une telle structure de groupe est donnée par

les morphismes suivants:

unité	$e : \{pt\} \rightarrow G$	counité	$e^* : A \rightarrow \mathbb{C}$
multiplication	$G \times G \rightarrow G$	comultiplication	$m^* : A \rightarrow A \otimes A$
inversion	$i : G \rightarrow G$	coinversion	$i^* A \rightarrow A$

Les axiomes de groupe se traduisent directement en terme des counités, comultiplication et coinversion. Par exemple, $x \cdot e = x$ pour tout $x \in G$ se traduit par $m \circ (\text{Id} \times e) = \text{Id}$ et donc $(\text{Id} \otimes e^*) \circ m^* = \text{Id}$, etc.

Intuitivement, si on pense à A comme l'algèbre des fonctions sur G on a $e^*(f) = f(e)$, $(m^*f)(g, h) = f(gh)$ et $i^*f(g) = f(g^{-1})$.

Voyons quelques exemples:

- Le groupe additif \mathbb{C} (parfois noté \mathbb{G}_a). On a $\mathbb{C}[\mathbb{C}] = \mathbb{C}[t]$ avec $e^*(t) = 0$, $m^*(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$ et $i^*(t) = -t$.
- Le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* (parfois noté \mathbb{G}_m). On a $\mathbb{C}[\mathbb{C}^*] = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $e^*(t) = 1$, $m^*(t) = t \otimes t$ et $i^*(t) = t^{-1}$.
- Le groupe SL_n est défini par $\mathbb{C}[\text{SL}_n] = \mathbb{C}[x_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}] / (\det(x_{ij}) - 1)$. La counité est donnée par $e^*(x_{ij}) = \delta_{ij}$, la comultiplication par $m^*x_{ij} = \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}$ et $i^*(x_{ij}) = (x_{ij})_{ij}^{-1}$. On remarque que dans cette dernière formule la matrice $(x_{ij})^{-1}$ est donnée par la transposée de la comatrice, c'est donc bien une matrice à coefficients dans A .
- On définit de façon analogue les groupes classiques, GL_n , O_n , Sp_{2n} et même les groupes exceptionnels.
- Un groupe fini est aussi un groupe algébrique affine. Par exemple le groupe μ_n des racines n -ièmes de l'unité est donné par $\mathbb{C}[\mu_n] = \mathbb{C}[t]/(t^n - 1)$ avec les mêmes formules que pour \mathbb{G}_m .

On peut montrer que tout groupe algébrique affine G est un sous-groupe affine d'un groupe linéaire GL_n . C'est une variété lisse et le quotient G/G^0 est fini où G^0 désigne la composante connexe (ou irréductible) de l'identité. On renvoie à [Br10, Bo69] pour les preuves et beaucoup d'autres choses.

2.2. Actions de groupes. Soit G un groupe affine et X une variété algébrique (affine pour commencer). Une action de G sur X est un morphisme $\sigma : G \times X \rightarrow X$ satisfaisant les axiomes d'action de groupe.

Dans le cas où X est affine, l'action est donnée un morphisme d'algèbres

$$\sigma^* : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[X]$$

donnée par $\sigma^*f = \sum h_i \otimes f_i$. Une telle formule induit une représentation $G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}[X])$ par la formule $g.f = \sum_i h_i(g)f_i$.

Considérons l'exemple où $G = \mathbb{C}^*$. Comme $\mathbb{C}[\mathbb{C}^*] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}t^i$ on a pour tout $f \in A = \mathbb{C}[X]$

$$(1) \quad \sigma^*f = \sum_i t^i \otimes f_i$$

L'application π_i envoyant f sur f_i est un projecteur sur un sous-espace noté A_i . En effet, la formule (1) se comprend sous la forme $t.f = \sum_i t^i f_i$: en particulier $A_i = \{f \in A, t.f = t^i f\}$, ce qu'on peut encore écrire $f(t^{-1}x) = t^i f(x)$.

On a donc $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ avec $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$. Ainsi, A est une algèbre graduée, et réciproquement, toute algèbre graduée admet une coaction de \mathbb{C}^* par la formule (1). Par exemple, à l'action de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^n correspond la décomposition de $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ en composantes homogènes, précisément $A_{-d} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$.

Définition 1. *On dira qu'une action linéaire de G sur un espace vectoriel V de dimension finie est rationnelle si le morphisme $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ est un morphisme de groupes algébriques.*

Une représentation $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ (pas forcément de dimension finie) est dite rationnelle si tout vecteur $v \in V$ est inclus dans un sous-espace $W \subset V$ qui soit stable par G et tel que l'action de G sur W soit rationnelle.

Par exemple, l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^n est rationnelle, mais aussi celle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ puisque c'est la réunion croissante des sous-espaces de polynômes de degré inférieur ou égal à d .

Lemme 1. *Si G agit algébriquement sur une variété affine X alors l'action de G sur $\mathbb{C}[X]$ (donnée par $(g.f)(x) = f(g^{-1}x)$) est rationnelle.*

De plus on peut trouver un G -module rationnel de dimension finie V et un morphisme G -équivariant $i : X \rightarrow V$ qui identifie X à une sous-variété fermée et G -invariante de V .

Preuve. Soit f un élément quelconque de $\mathbb{C}[X]$. On écrit $\sigma^*(f) = \sum_{i=1}^n h_i \otimes f_i$. Notons $W = \mathrm{Vect}\{f_1, \dots, f_n\}$. On a $g.f = \sum_i h_i(g) f_i$ ainsi l'espace vectoriel $U = \mathrm{Vect}\{g.f, g \in G\}$ est G -invariant et de dimension finie car inclus dans W . De plus, prenant une forme linéaire quelconque λ sur U , on peut la prolonger à W et on observe que pour tout $f' \in U$ l'application $g \mapsto \lambda(g.f')$ est algébrique, ce qui prouve bien que $\mathbb{C}[X]$ est un G -module rationnel.

Prenons maintenant f_1, \dots, f_m des générateurs de l'algèbre $\mathbb{C}[X]$. Il existe un sous-espace de dimension finie W de $\mathbb{C}[X]$ G -invariant et contenant f_1, \dots, f_m . L'application $i : X \rightarrow W^*$ définie par $x \mapsto (\phi \mapsto \phi(x))$ est un morphisme G -équivariant. Il induit une surjection $\mathbb{C}[W^*] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ puisque W contient les générateurs de X . Ainsi i est bien une immersion fermée. \square

Comme application, considérons pour un groupe affine quelconque G l'action par multiplication à gauche. Le lemme précédent permet d'identifier G à une sous-variété G -invariante d'un espace vectoriel de dimension finie V sur lequel G agit linéairement. L'action de G dans V définit un morphisme $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ qui est une immersion fermée. Ceci prouve que G est linéaire.

Définition 2. *Soit G un groupe affine agissant sur une variété X et x un point de X . On appelle orbite de x par l'action de G et on note $G \cdot x$ l'image du morphisme*

$\sigma_x : G \rightarrow X$ défini par $g \mapsto g.x$. On pose $G_x = \sigma_x^{-1}(x)$ et on l'appelle stabilisateur de x .

Le stabilisateur G_x est un sous-groupe fermé de G , l'orbite $G \cdot x$ n'est pas forcément fermée mais on a le résultat général suivant:

Proposition 2. *Supposons que G agisse algébriquement sur une variété X réduite et irréductible.*

- (1) *Toute orbite $G \cdot x$ est ouverte dans son adhérence.*
- (2) *L'adhérence d'une orbite $\overline{G \cdot x}$ est la réunion de l'orbite et d'une famille finie d'orbites de dimensions strictement plus petite. En particulier, cette adhérence contient une orbite fermée.*
- (3) *Pour tout $x \in X$ on a $\dim G \cdot x + \dim G_x = \dim G$.*
- (4) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des $x \in X$ tels que $\dim G \cdot x \leq n$ est fermé dans X .*

Preuve. On suppose que \overline{G} est connexe. Le cas général est laissé en exercice.

(1) L'application $\overline{G} \rightarrow \overline{G \cdot x}$ est dominante. Son image contient donc un ouvert non vide de $\overline{G \cdot x}$. Comme G agit transitivement dans $G \cdot x$, cette orbite est ouverte dans $\overline{G \cdot x}$.

(2) En remplaçant X par $\overline{G \cdot x}$, on peut supposer que $G \cdot x$ est ouvert dans X . Ainsi $X \setminus G \cdot x$ est un fermé G -stable de dimension strictement plus petite. On conclut par récurrence.

(3) Les fibres du morphisme $G \rightarrow G \cdot x$ sont les translatés de G_x . Ainsi, ils ont tous la même dimension égale à celle de G_x . On conclut par le Théorème 3.

(4) Considérons le morphisme $G \times X \rightarrow X \times X$ défini par $(g, x) \mapsto (x, gx)$. Sa fibre en (g, x) est isomorphe à G_x . D'après le théorème 3, l'ensemble des couples (g, x) tels que $\dim G_x \geq n$ est fermé dans $G \times X$ pour tout n . On conclut grâce au point précédent.

Théorème 3. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant avec X et Y irréductibles et réduits. Alors*

- (1) *Il existe un ouvert U de Y tel que pour tout $y \in U$ la fibre $f^{-1}(\{y\})$ soit équidimensionnelle de dimension $\dim X - \dim Y$.*
- (2) *L'application $x \mapsto \dim f^{-1}(f(\{x\}))$ est semi-continue supérieurement sur X .*
- (3) *Si f est propre, l'application $y \mapsto \dim f^{-1}(\{y\})$ est semi-continue sup. sur Y .*

□

Regardons quelques exemples.

Si \mathbb{C}^* agit sur \mathbb{C}^n par multiplication, il n'y a qu'une orbite fermée $\{0\}$, toutes les autres orbite, indexées par $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ lui étant adhérentes. Si on enlève $\{0\}$, toutes les orbites deviennent fermées.

Si $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit sur \mathbb{C}^n , il n'y a qu'une orbite fermée - $\{0\}$ - et une orbite ouverte, son complémentaire. Si on fait agir le même groupe sur $(\mathbb{C}^n)^2$ en supposant $n \geq 2$, on obtient les orbites suivantes: $\{(0, 0)\}$, $\{0\} \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$, $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \{0\}$, $\{(u, \lambda u), u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Soit $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agissant sur $M_n(\mathbb{C})$ par conjugaison. Toute matrice M est conjuguée à une matrice par blocs de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

En conjuguant cette matrice par une matrice diagonale d'entrées t^{a_1}, \dots, t^{a_n} , on remplace le 1 en i -ième ligne par $t^{a_{i+1}-a_i}$. Si $a_{i+1} = a_i + 1$, on constate que la matrice converge vers $\lambda \mathrm{Id}$ à laquelle elle n'est pas conjuguée. Ainsi, l'orbite de M est fermée si et seulement si M est diagonalisable. On peut d'ailleurs comprendre précisément quelles orbites sont dans l'adhérence d'une matrice sous forme de Jordan: n'importe quelle matrice obtenue en remplaçant certains 1 par 0.

Prenons comme dernier exemple le cas des formes binaires de degré d . Une telle forme s'écrit $q = \prod_i l_i$ où chaque l_i est une forme linéaire. Le groupe SL_2 agit sur q en permutant les racines. En particulier, si au moins trois de ces formes sont distinctes, le stabilisateur G_q est fini, et d'après le point 3 de la Proposition 2, l'orbite $G \cdot q$ est de dimension 3. Supposons donc $d \geq 3$ et prenons q à racines distinctes, i.e. $\Delta(q) \neq 0$. Alors l'orbite $G \cdot q$ est fermée. En effet, on a $\overline{G \cdot q} \subset \Delta^{-1}(\Delta(q))$. Le fermé $\Delta^{-1}(\Delta(q))$ ne contient que des orbites de dimension 3 d'après ce qui précède. Le point 2 de la Proposition 2 implique que l'orbite de q est fermée.

2.3. Groupes réductifs. Soit G un groupe algébrique affine agissant rationnellement sur V . On notera $V^G = \{v \in V, gv = v \forall g \in G\}$ l'espace des invariants de V .

Définition 3. *On dit que V est simple s'il n'admet pas de sous-espaces G -invariants stricts. On dira que V est semi-simple s'il satisfait les propriétés équivalentes suivantes:*

- (i) *V est somme directe de sous-espaces G -invariants et simples.*
- (ii) *Tout sous-espace G -invariant de V admet un supplémentaire G -invariant.*

Définition 4. *On dit que G est réductif si toute représentation rationnelle est semi-simple.*

Le groupe \mathbb{C} n'est pas réductif, en effet, considérons l'action de \mathbb{C} sur \mathbb{C}^2 donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La droite $\mathbb{C} \oplus \{0\}$ n'admet pas de supplémentaire invariant puisque le groupe \mathbb{C} agit transitivement sur ces supplémentaires.

Sur \mathbb{C} , l'unique source d'exemples de tels groupes est donnée par le critère suivant.

Proposition 3. *Si G admet un sous-groupe compact Zariski dense, alors G est réductif. Ainsi \mathbb{C}^* , les groupes semi-simples complexes et leurs produits sont réductifs (car ce sont les complexifiés de leur compact maximal).*

Preuve. Soit K le sous-groupe compact Zariski dense de G et μ la mesure de Haar de K normalisée. Notons $R : V \rightarrow V$ l'opérateur défini par $R(v) = \int_K (gv) d\mu(g)$. On constate que $R(v)$ est invariant: en effet l'application de G dans V définie par $g.R(v) - R(v)$ est algébrique et nulle sur K . Elle est donc identiquement nulle.

Si W est un sous-espace G -invariant de V , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow W \rightarrow V \xrightarrow{p} V/W \rightarrow 0$$

et la donnée d'un supplémentaire invariant est équivalente à celle d'une section G -invariante s de la suite. Partons d'une section quelconque $s \in \text{Hom}(V/W, V)$. Le groupe G agit rationnellement sur $\text{Hom}(V/W, V)$ par la formule $(g.f)(x) = gf(g^{-1}x)$, on peut donc appliquer R à s , on vérifie que l'identité $p(s(x)) = x$ implique $p(R(s)(x)) = x$ comme p est G -invariante. Finalement, $R(s)$ est donc une section G -équivariante et la proposition est démontrée. \square

Il existe toujours une et une seule projection G -invariante $R : V \rightarrow V^G$. On l'appelle l'opérateur de Reynolds. En effet, soit V un G -module rationnel et décomposons V en sous-modules simples. On aura $V = V^G \oplus \bigoplus_i V_i$ où la somme porte sur les facteurs simples non triviaux. Toute application G -invariante $p_i : V_i \rightarrow V^G$ est nulle car sinon, son noyau serait un sous-espace G -invariant non trivial, ce qui est impossible. Ainsi R est nécessairement égal à la projection de V sur V^G parallèlement à $\bigoplus_i V_i$.

Le théorème fondamental de finitude du à Hilbert est le suivant.

Théorème 4. *Soit G un groupe réductif agissant rationnellement sur une algèbre de type fini A . Alors l'algèbre invariante A^G est de type fini, et c'est un facteur direct de A . De plus pour tout idéal I de A^G on a $AI \cap A^G = I$.*

Preuve. Soit $f \in A^G$. On a pour tout $\phi \in A$ l'égalité $R(f\phi) = fR(\phi)$ de manière évidente en pensant à la définition intégrale de R . Ainsi, le morphisme $R : A \rightarrow A^G$ est un morphisme de A^G -modules et donc A^G est un facteur direct de A .

Soit I un idéal de A^G . On a bien sûr $I \subset AI \cap A^G$. Réciproquement, si $f \in AI \cap A^G$ alors $f = \sum_i \phi_i f_i$ et

$$R(f) = f = \sum_i R(\phi_i f_i) = \sum_i R(\phi_i) f_i \in I.$$

Vérifions que A^G est noethérienne, sachant que A l'est par hypothèse. Soit I_k une suite croissante d'idéaux de A^G . La suite AI_k est une suite croissante d'idéaux de A qui doit donc se stabiliser. Comme $I_k = AI_k \cap A^G$, la suite I_k se stabilise, prouvant que A^G est noethérienne.

Soit x_1, \dots, x_n des générateurs de A . Il existe un sous- G -module rationnel W de dimension finie qui contienne x_1, \dots, x_n . L'application linéaire G -équivariante

$W \rightarrow A$ s'étend en un morphisme d'algèbre surjectif $\mathbb{C}[W^*] \rightarrow A$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{C}[V]$ est de type fini où on a posé $V = W^*$.

L'algèbre $\mathbb{C}[V]$ est naturellement graduée et on a

$$\mathbb{C}[V]^G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}[V]_n^G.$$

Soit I l'idéal engendré par les invariants homogènes non constants. Comme $\mathbb{C}[V]$ est noethérienne, I est engendré par un nombre fini d'éléments f_1, \dots, f_r que l'on peut supposer homogènes. Si $f \in \mathbb{C}[V]_n^G$ avec $n > 0$, on aura $f = \sum_i \phi_i f_i$ avec $\phi_i \in \mathbb{C}[V]$ homogènes. On en déduit que $f = R(f) = \sum R(\phi_i) f_i$ avec $R(\phi_i)$ invariant et homogène de degré strictement inférieur à celui de f . Par récurrence sur le degré de f , on en déduit que f est un polynôme dans les f_i . \square

2.4. Quotient affine. Soit X une variété affine sur laquelle agit un groupe réductif G . L'algèbre $\mathbb{C}[X]^G$ est de type fini par le théorème de Hilbert. Ainsi, la variété $X//G = \text{Spec}(\mathbb{C}[X]^G)$ est une variété affine, on l'appelle le quotient de X et on note $p : X \rightarrow X//G$ l'application induite par l'inclusion $\mathbb{C}[X]^G \rightarrow \mathbb{C}[X]$.

Voyons tout de suite quelques exemples élémentaires.

- (1) Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$ agit sur \mathbb{C} par multiplication. Son action sur $\mathbb{C}[\mathbb{C}] = \mathbb{C}[x]$ est simplement donnée par $(\pm 1.P)(x) = P(\pm x)$.

Les polynômes invariants sont les polynômes pairs: en posant $y = x^2$ on a donc $\mathbb{C}[x]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \mathbb{C}[y]$. Ainsi on a $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{C}$ et l'application quotient est l'application $x \mapsto x^2$.

- (2) Faisons agir le même groupe par multiplication sur \mathbb{C}^2 . On a $\mathbb{C}[\mathbb{C}^2] = \mathbb{C}[x, y]$ et tout polynôme invariant est un polynôme en x^2, xy, y^2 . En notant u, v, w ces trois polynômes on se convainc qu'on a plus précisément $\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \mathbb{C}[u, v, w]/(v^2 - uw)$. Ainsi le quotient $\mathbb{C}^2//(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le cône de \mathbb{C}^3 d'équation $v^2 = uw$. Il présente en particulier une singularité en 0.

- (3) Faisons agir \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^2 par $t.(x, y) = (tx, t^{-1}y)$. On a alors $\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[xy]$ et le quotient est simplement \mathbb{C} .

Il est clair que p est G -invariante et universelle pour cette propriété au sens où tout morphisme G -invariant $f : X \rightarrow Y$ vers une variété affine se factorise par p (on dit que c'est un quotient catégorique). On peut montrer d'autres propriétés de p .

Théorème 5. *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété affine X .*

- (1) *Le morphisme $p : X \rightarrow X//G$ est surjectif.*
- (2) *Si $Z \subset X$ est un fermé G -invariant, son image $p(Z)$ est fermée et la restriction $p|_Z : Z \rightarrow p(Z)$ est le quotient de Z par G .*
- (3) *Si Z_1 et Z_2 sont deux fermés G -invariants alors $p(Z_1 \cap Z_2) = p(Z_1) \cap p(Z_2)$.*
- (4) *Si $x \in X$, la fibre $p^{-1}(p(x))$ contient une unique orbite fermée, notée \mathcal{O}_x . De plus $p^{-1}(p(x))$ est l'ensemble des points z tels que $\mathcal{O}_x \subset \overline{G \cdot z}$.*

Preuve. (1) Soit x un point de $X//G$ et I_x l'idéal maximal correspondant dans $\mathbb{C}[X]^G$. D'après le Théorème 4, on a $\mathbb{C}[X]I_x \cap \mathbb{C}[X]^G = I_x$. En particulier, $\mathbb{C}[X]I_x$ n'est pas égal à $\mathbb{C}[X]$ et il existe donc un idéal maximal $\mathbb{C}[X]I_x \subset I_y \subset \mathbb{C}[X]$. On aura alors $p(y) = x$.

(2) L'application $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[Z]$ est surjective. Il en est donc de même de l'application $\mathbb{C}[X]^G \rightarrow \mathbb{C}[Z]^G$. Ainsi le deuxième point est montré. On a même que l'idéal définissant $p(Z)$ est $I \cap \mathbb{C}[X]^G = I^G$ où I est l'idéal définissant Z .

(3) Soit I_1 et I_2 les idéaux associés à Z_1 et Z_2 . L'idéal associé à $p(Z_1 \cap Z_2)$ est $(I_1 + I_2)^G = I_1^G + I_2^G$. On reconnaît l'idéal associé à l'intersection de $p(Z_1)$ et $p(Z_2)$. Précisons l'égalité $(I_1 + I_2)^G = I_1^G + I_2^G$: pour tout $f = f_1 + f_2 \in (I_1 + I_2)^G$ on a $f = R(f) = R(f_1) + R(f_2)$. On conclut en observant que R stabilise I_1 et I_2 .

(4) Puisque $p^{-1}(p(x))$ est un fermé G -invariant, il contient une orbite fermée. D'après le point (3), deux fermés G -invariants disjoints ont des images disjointes, ainsi il ne peut y avoir deux orbites fermées dans $p^{-1}(p(x))$. Si l'adhérence de $G \cdot z$ contient \mathcal{O}_x alors $p(z) = p(x)$. Réciproquement, si $p(z) = p(x)$ alors $\overline{G \cdot z}$ contient une orbite fermée qui ne peut être que celle associée à x . \square

On vient donc de construire un quotient avec d'excellentes propriétés et ceci dans une grande généralité. Pour autant, le quotient peut être très dégénéré comme le montrent les exemples de la Section 2.2. Pour autant, le quotient se comportera mieux si on se restreint au lieu stable.

Définition 5. Soit G un groupe réductif agissant sur X affine. On dit que $x \in X$ est stable si l'orbite $G \cdot x$ est fermée et le stabilisateur G_x est fini.

Si x est stable, on a nécessairement $p^{-1}(p(x)) = G \cdot x$. On en déduit la proposition suivante:

Proposition 4. L'ensemble X_s est un ouvert G -invariant de X (peut-être vide) et la restriction $p : X^s \rightarrow p(X^s)$ s'identifie au quotient topologique.

Preuve. La seule chose qui n'est pas claire, c'est que le lieu stable soit ouvert. Cependant, d'après les points (3) et (4) de la Proposition 2 et le fait que G_x est fini si et seulement si sa dimension est nulle, on sait que le lieu $Y = \{x \in X, \dim G_x > 0\}$ est fermé dans X et G -invariant.

Soit x un point stable. Comme $G \cdot x$ et Y sont des fermés G -invariants disjoints, il existe $f \in \mathbb{C}[X]^G$ tel que $f|_Y$ soit nulle et $f(x) \neq 0$. Alors l'ouvert $X_f = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$ contient x . Montrons que tout point y de X_f est stable. Par construction G_y est fini et donc toutes les orbites dans X_f sont de dimension égale à celle de G . Si $G \cdot y$ n'est pas fermée, il existe un point z adhérent à $G \cdot y$ dont l'orbite est de dimension strictement plus petite que celle de y . Mais comme z est adhérent à l'orbite de y , $f(z) \neq 0$ et on a une contradiction. Ainsi x appartient à l'ouvert X_f qui est entièrement contenu dans le lieu stable. \square

Le critère suivant s'avèrera très utile pour déterminer si une application $p : X \rightarrow Y$ G -invariante est bien le quotient décrit ci-dessus.

On rappelle qu'une variété X affine irréductible et réduite est dite normale si l'anneau $\mathbb{C}[X]$ est entier dans $\mathbb{C}(X)$ et qu'un diviseur de X est une sous-variété de codimension 1.

Proposition 5. *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété normale X . Alors*

- (1) *Le quotient $X//G$ est normal.*
- (2) *Si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme G -invariant avec Y normal tel que les fibres générales ont une unique orbite fermée et tel que l'image de π rencontre tout diviseur de Y alors π est le quotient.*

Preuve. (1) On a les inclusions $\mathbb{C}[X]^G \subset \mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}(X)$. Si $f \in \mathbb{C}(X//G) = \text{Frac}(\mathbb{C}[X]^G)$ est entière sur $\mathbb{C}[X]^G$, elle est entière sur $\mathbb{C}[X]$, donc dans $\mathbb{C}[X]$. Étant aussi G -invariante, elle est dans $\mathbb{C}[X]^G$ ainsi $X//G$ est normal. (2) On a un unique morphisme $f : X//G \rightarrow Y$ qui vérifie $p = f \circ \pi$. Soit $y \in Y$ telle que $\pi^{-1}(y)$ contienne une unique orbite fermée. Il lui correspond un unique point $x \in X//G$ tel que $f(x) = y$. Ainsi f est birationnelle. On conclut avec le lemme ci-dessous. \square

Lemme 2. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel avec X, Y affines, Y normal et tel que l'image de f rencontre tout diviseur. Alors f est un isomorphisme.*

Preuve. Considérons l'isomorphisme $f^* : \mathbb{C}(Y) \rightarrow \mathbb{C}(X)$. Comme Y est normale, l'algèbre $\mathbb{C}[Y]$ s'identifie à l'intersection des sous-anneaux locaux $\mathcal{O}_{Y,D}$ où D parcourt les diviseurs irréductibles de Y . Rappelons que $\mathcal{O}_{Y,D}$ est l'anneau des fonctions de $\mathbb{C}(Y)$ qui sont définies en au moins un point de D . Puisque chaque diviseur $D \subset Y$ rencontre l'image de f , il existe un diviseur $E \subset X$ tel que $f(E) \subset D$. On en déduit qu'une fonction ϕ non identiquement nulle sur D vérifiera que $\phi \circ f^{-1}$ est non identiquement nulle sur E . Ainsi, en identifiant $\mathbb{C}(Y)$ et $\mathbb{C}(X)$ on a $\mathcal{O}_{X,E} \subset \mathcal{O}_{Y,D}$. Finalement

$$\mathbb{C}[X] \subset \bigcap_{E \subset X} \mathcal{O}_{X,E} \subset \bigcap_{Y,D} \mathcal{O}_{Y,D} = \mathbb{C}[Y].$$

L'inclusion réciproque étant évidente (car induite par f^*), on en déduit le résultat. \square

2.5. Exemples de quotients. Classes de conjugaison

Considérons à nouveau l'action de $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison sur lui-même. Les coefficients du polynôme caractéristique

$$\det(M - X \text{Id}) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

définissent un morphisme G -invariant et surjectif $\pi : \text{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n$. Une fibre générale correspond à la classe de conjugaison d'une matrice à valeurs propres distinctes qui est fermée (cf Section 2.2). Comme \mathbb{C}^n est normale, la Proposition 5 implique que \mathbb{C}^n est bien le quotient algébrique.

Cet exemple se généralise à tout groupe réductif connexe G agissant par conjugaison sur lui-même.

Soit T un tore maximal de G et N son normalisateur. On rappelle que $W = N/T$ est un groupe fini: le groupe de Weyl. L'action de N sur T se factorise donc par le quotient W . Ainsi l'inclusion $T \rightarrow G$ induit un morphisme

$$p : T//W \rightarrow G//G.$$

Si g est un élément semi-simple régulier et $\pi : G \rightarrow G//G$ est le quotient, la fibre $p^{-1}(p(g))$ s'identifie à la classe de conjugaison de g qui rencontre T en une unique W -orbite. Le critère s'applique à nouveau et p est un isomorphisme. On peut aussi appliquer le critère à l'action de G sur son algèbre de Lie \mathcal{G} . On en déduit l'isomorphisme $t//W \simeq \mathcal{G}//G$. Cet isomorphisme prend la forme suivante

Théorème 6 (Chevalley). *L'application de restriction induit un isomorphisme*

$$\text{Res} : \mathbb{C}[\mathcal{G}]^G \rightarrow \mathbb{C}[t]^W.$$

Formes binaires

Soit V le dual de \mathbb{C}^2 . On rappelle que S^dV s'identifie à l'espace des formes binaires de degré d , muni de l'action algébrique de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. Un des buts primordiaux de la théorie des invariants est d'étudier le quotient $S^dV//\text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad V^d &\rightarrow S^dV \\ (l_1, \dots, l_d) &\mapsto \prod_i l_i \end{aligned}$$

Posons $T_d = \{(t_1, \dots, t_d) \in (\mathbb{C}^*)^d, \prod_i t_i = 1\}$. Ce groupe agit par multiplication sur V_d de sorte que Φ soit T_d -invariante, de même le groupe symétrique S_d . Ainsi, le groupe $\Gamma_d = T_d \times S_d$ agit sur V^d en laissant Φ invariante.

Toute forme q de degré d non nulle s'écrit comme un produit de d -formes linéaires, uniquement définies à permutation et normalisation près. Le critère s'applique une nouvelle fois, montrant que Φ induit un isomorphisme $V^d//\Gamma_d \rightarrow S^dV$. En termes d'algèbre de fonctions, on a:

$$\Phi^* : \mathbb{C}[S^dV] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[V^d]^{\Gamma_d}.$$

Cet isomorphisme préservant les degrés, on a pour tout n un isomorphisme

$$\mathbb{C}[S^dV]_n \rightarrow \mathbb{C}[V^d]_{nd}^{\Gamma_d}.$$

D'autre part, les éléments de $\mathbb{C}[V^d]_{nd}^{\Gamma_d}$ sont des fonctions polynomiales sur V^d qui sont homogènes de degré n sur chaque facteur. Autrement dit, $\mathbb{C}[V^d]_{nd}^{\Gamma_d} \simeq (S^nV)^{\otimes d}$. Considérant la partie symétrique, on obtient finalement la loi de réciprocité d'Hermité:

Proposition 6. *L'application naturelle ci-dessous est un isomorphisme de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -modules*

$$\mathbb{C}[S^dV]_n \rightarrow \mathbb{C}[S^nV]_d.$$

On en déduit en particulier qu'il y a autant d'invariants de degré n des formes de degré d que d'invariants de degré d des formes de degré n . Par exemple, il y a un invariant de degré 3 des formes quartiques (J) et un invariant de degré 4 des formes cubiques (Δ). Autre exemple: comme il y a un seul invariant de degré $2d$ des formes binaires, il y a un seul invariant de degré 2 des formes paires (par exemple I) et aucun des formes impaires.

Les d -uplets de vecteurs

L'exemple précédent nous amène naturellement à étudier le quotient de V^d par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Considérons l'application $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -invariante suivante:

$$\begin{aligned} \Psi & : V^d & \rightarrow \mathbb{C}^{\frac{d(d-1)}{2}} \\ (l_1, \dots, l_d) & \mapsto (\det(l_i, l_j))_{i < j} \end{aligned}$$

Si on considère 4 formes l_1, l_2, l_3, l_4 , elles sont linéairement dépendantes, donc le déterminant de la matrice $(\det(l_i, l_j))_{i,j=1,\dots,4}$ s'annule. Cette matrice est antisymétrique, et son déterminant est le carré de son Pfaffien

$$\mathrm{Pfaff}(\det(l_i, l_j)) = \det(l_1, l_2) \det(l_3, l_4) - \det(l_1, l_3) \det(l_2, l_4) + \det(l_2, l_3) \det(l_1, l_4)$$

On en déduit que Ψ prend ses valeurs dans la sous-variété Y_d de $\mathbb{C}^{\frac{d(d-1)}{2}}$ définie par les équations de Plücker

$$a_{ij}a_{kl} - a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk} = 0.$$

Si on se donne un élément $a = (a_{ij})$ non nul de Y_d - supposons par exemple qu'on a $a_{12} = 1$. On se propose de décrire la fibre $p^{-1}(a)$: on pose tout d'abord $l_1 = (1, 0)$ et $l_2 = (0, 1)$. Ensuite, pour tout $i > 1$ on doit avoir $\det(l_1, l_i) = a_{1i}$ et $\det(l_2, l_i) = a_{2i}$ donc on pose $l_i = (-a_{2i}, a_{1i})$. On vérifie aisément que $a = \Psi(l_1, \dots, l_n)$: ainsi $\Psi^{-1}(a)$ consiste en une unique orbite de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On peut conclure en utilisant le critère pourvu qu'on ait montré que Y_d est une variété normale.

On déduit de ce résultat le théorème annoncé dans la Section 1.7. Tout invariant de degré n des formes binaires de degré d s'écrit comme un polynôme dans les variables a_{ij} $i, j \in \{1, \dots, d\}$ dans lequel chaque variable i apparaît n fois, et invariant par permutation des variables.

- (1) Cas $d = 2$. La variable a_{12} est antisymétrique, son carré a_{12}^2 est le générateur de $\mathbb{C}[V^2]^{\mathrm{SL}_2 \times \Gamma_2}$. Il s'agit du discriminant des formes quadratiques.
- (2) Cas $d = 3$. On a $\mathbb{C}[V^3]^{\mathrm{SL}_2} = \mathbb{C}[a_{12}, a_{23}, a_{13}]$. Les invariants pour T_3 sont engendrés par $a_{12}a_{23}a_{13}$ qui est antisymétrique. Ainsi, l'unique invariant est $a_{12}^2a_{23}^2a_{13}^2$ qui correspond au discriminant des formes cubiques.
- (3) Cas $d = 4$. L'algèbre $\mathbb{C}[V^4]^{\mathrm{SL}_2 \times T_4}$ est engendrée par $x = a_{12}a_{34}, y = -a_{13}a_{24}, z = a_{14}a_{23}$ avec la relation $x + y + z = 0$. On prouve que les deux quantités $I = x^2 + y^2 + z^2$ et $J = x^3 + y^3 + z^3$ identifient le quotient à \mathbb{C}^2 . On retrouve ainsi les deux invariants fondamentaux des formes binaires quartiques.

- (4) Cas $d = 5$. C'est nettement plus compliqué mais c'est encore possible. Le calcul complet a été fait par Hermite [He54], Première Partie, §IV-VII.

2.6. Le critère de Hilbert-Mumford. On a pu voir l'importance des orbites fermées, ce sont celles qui se comportent bien dans le quotient. Il est difficile en général de déterminer si l'orbite d'un point x dans une variété algébrique affine X sur laquelle G agit est fermée: le critère ci-dessous montre qu'on peut se ramener aux sous-groupes de G à un paramètre, c'est-à-dire aux images des morphismes $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$.

On commence par étudier de manière plus systématique les actions de tores $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$. On note $X^*(T)$ le groupe des morphismes algébriques $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ (caractères) et $X_*(T)$ le groupe des morphismes $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T$ (sous-groupes à un paramètre).

- Proposition 7.** (1) *Tout caractère multiplicatif $\chi \in X^*(T)$ s'écrit de la forme $\chi(t_1, \dots, t_n) = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ pour un unique vecteur $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.*
 (2) *Tout sous-groupe à un paramètre $\lambda \in X_*(T)$ s'écrit de la forme $\lambda(t) = (t^{b_1}, \dots, t^{b_n})$ pour un unique vecteur $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$.*
 (3) *Pour tous $(\chi, \lambda) \in X^*(T) \times X_*(T)$ on a $\chi(\lambda(t)) = t^{\langle \chi, \lambda \rangle}$ et la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non-dégénérée.*
 (4) *Tout T -module rationnel V est somme directe des sous-modules*

$$V_\chi = \{v \in V, t.v = \chi(t)v\}$$

où χ parcourt $X^*(T)$.

Soit V un T -module rationnel et $v \in V$. On note $v = \sum_\chi v_\chi$ la décomposition précédente et on pose $\chi(v) = \{\chi \in X^*(T), v_\chi \neq 0\}$. On note $C(v)$ le cône convexe engendré par $\chi(v)$ dans $X^*(T)_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$. Pour chaque face F de $C(v)$, on note \mathcal{O}_F l'orbite par T du vecteur

$$v_F = \sum_{\chi \in \chi(v) \cap F} v_\chi.$$

On rappelle qu'une face de $C(v)$ est par définition l'intersection $C(v) \cap \{f = 0\}$ où f est une forme linéaire vérifiant $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in C(v)$.

Proposition 8. *L'application $F \mapsto \mathcal{O}_F$ est une bijection entre les faces de $C(v)$ et l'ensemble des T -orbites dans \overline{Tv} . De plus, pour deux faces arbitraires F et F' , on a $F \subset F'$ si et seulement si $\mathcal{O}_F \subset \overline{\mathcal{O}_{F'}}$.*

Preuve. L'application $f : T \rightarrow V$ qui envoie t sur tv induit le morphisme $f^* : \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[T]$ défini par $f^*P(t) = P(tv)$. Comme $v = \sum_{\chi \in \chi(v)} v_\chi$, on a $t.v = \sum_{\chi \in \chi(v)} \chi(t)v_\chi$. On en déduit que l'image de f^* est engendrée par les caractères $\chi \in \chi(v)$. Géométriquement, cette algèbre est l'algèbre des fonctions sur $X = \overline{Tv}$. L'application dominante $T \rightarrow X$ qui envoie t sur tv induit un morphisme injectif

T -équivariant $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[T]$. Or, on a la décomposition $\mathbb{C}[T] = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} \mathbb{C}\chi$. Ainsi, $\mathbb{C}[X]$ doit se décomposer comme une somme

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\chi \in S} \mathbb{C}\chi$$

où S est un semi-groupe de $X^*(T)$. D'après la remarque initiale, S est engendré par les éléments de $\chi(v)$.

Si $Y \subset X$ est une sous-variété fermée irréductible et stable par T , il lui correspond un idéal premier T -invariant $I \subset \mathbb{C}[X]$. On peut alors l'écrire

$$I = \bigoplus_{\chi \in S_I} \mathbb{C}\chi$$

avec $S_I \subset S$ un sous-ensemble S -invariant vérifiant pour tout $\alpha, \beta \in S$: $\alpha + \beta \in S_I \iff \alpha \in S_I$ ou $\beta \in S_I$.

On se convainc qu'un tel sous-ensemble S_I est associé à une unique face F de $C(v)$ tel que $\chi \in S_I \iff \chi \in S \setminus F$.

Montrons que $Y = \overline{\mathcal{O}_F}$. Puisque F est une face de $C(v)$, il existe une forme linéaire λ sur $X^*(T)_{\mathbb{R}}$ nulle sur F et positive sur $C(v)$. Comme $C(v)$ est engendrée par des points de $X^*(T)$, on peut choisir λ dans le réseau dual $X_*(T)$. Ainsi, pour tout $f \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout $x \in X$, la fonction $f(\lambda(t)x)$ est un polynôme de Laurent à exposants positifs, ainsi la limite $\lim_{t \rightarrow 0} f(\lambda(t)x)$ existe. Finalement, la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t).x$ existe et est dans Y . L'application

$$\begin{aligned} X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif et T -équivariant. Il envoie v sur v_F , d'où l'assertion. On a prouvé que toute sous-variété irréductible fermée et T -invariante de X était de la forme $\overline{\mathcal{O}_F}$. De plus, si F' est une sous-face de F alors on a $I \subset I'$ et $\mathcal{O}_{F'} \subset \overline{\mathcal{O}_F}$ comme annoncé. \square

Théorème 7. *Soit G un groupe algébrique opérant sur une variété affine X et x un point de X . Notons \mathcal{O} l'unique orbite fermée adhérente à $G \cdot x$. Alors il existe un sous-groupe à un paramètre λ de G tel que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x$ existe et est dans \mathcal{O} .*

Preuve. Première étape: On suppose que G est un tore T . On peut aussi supposer que X est une sous-variété fermée d'un espace vectoriel V sur lequel T agit rationnellement. On peut donc appliquer la Proposition 8. Le point $x \in X$ correspond au vecteur $v \in V$, les T -orbites contenues dans \overline{Tv} correspondent aux faces F de $C(v)$. Il y a une unique face minimale de $C(v)$ qui est décrite par une forme linéaire $\lambda \in X_*(T)$. Elle vérifie bien l'énoncé du théorème.

Deuxième étape: Utilisons la décomposition de Cartan $G = KTK$ où K est un sous-groupe compact maximal de G et T est le complexifié d'un tore maximal

de K (dans le cas $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on peut prendre $K = U(n)$ et T le sous-groupe des matrices diagonales). On munit aussi V d'un produit scalaire K -invariant. S'il existe $g \in G$ tel que \overline{Tgx} rencontre \mathcal{O} alors, d'après la première étape, il existera un sous-groupe à un paramètre λ de T tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)gx$ existe et appartient à \mathcal{O} . En appliquant g^{-1} , on trouve que le sous-groupe à un paramètre $g^{-1}\lambda g$ répond à la question.

Supposons donc par l'absurde que pour tout g , on a $\overline{Tgx} \cap \mathcal{O} = \emptyset$. Posons $y = gx$. Les deux ensembles \overline{Tgx} et \mathcal{O} sont des fermés T -invariants. Donc d'après le Théorème 5, il existe une fonction $f_y \in \mathbb{C}[X]^T$ telle que $f_y(y) = 1$ et $f_y(z) = 0$ pour tout $z \in \mathcal{O}$.

Notons $U_y = \{z \in X, f_y(z) \neq 0\}$ et recouvrons Kx avec un nombre fini d'entre eux. On a

$$Kx \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}.$$

La fonction $F = \sum_i |f_{y_i}|$ est continue, T -invariante, nulle sur \mathcal{O} et supérieure à ϵ sur Kx . On aura donc

$$F(z) \geq \epsilon \text{ pour tout } z \in \overline{TKx}.$$

Mais comme K est compact, on a $K\overline{TKx} = \overline{TKx} = \overline{Gx}$ qui rencontre \mathcal{O} par hypothèse, une contradiction. \square

Ce théorème permet de décider quelles sont les points stables d'une action.

Corollaire 1. *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété affine X . Alors $x \in X$ est stable si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ l'application $t \mapsto \lambda(t)x$ n'a pas de limite quand $t \mapsto 0$.*

Preuve. Supposons x stable, c'est-à-dire que Gx est fermée et G_x est fini. Si on a $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x = y$, alors $y \in Gx$ et λ stabilise y , contredisant l'hypothèse. Réciproquement, d'après le critère de Hilbert-Mumford, l'orbite Gx est fermée. Si G_x était infini, il contiendrait un sous-groupe à un paramètre, contredisant l'hypothèse. \square

2.7. Applications du critère. Supposons que G agisse rationnellement sur un espace vectoriel V .

Définition 6. *On appelle nilcône de V l'ensemble $\mathcal{N}(V) = p^{-1}(p(0))$ où $p : V \rightarrow V//G$ est l'application quotient.*

Les éléments de \mathcal{V} seront dits instables. On a de ces éléments les caractérisations suivantes:

$$\mathcal{N}(V) = \{v \in V, 0 \in \overline{Gv}\} = \{v \in V, \exists \lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G, \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)v = 0\}.$$

On a montré dans la Section 1.3 qu'une quartique q était instable si et seulement si elle avait une racine triple.

On peut grâce au critère de Hilbert-Mumford retrouver et généraliser ce résultat. Soit q une forme binaire de degré d instable. Alors il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)q = 0$.

Dans une base adaptée, on a $\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & t^{-n} \end{pmatrix}$. On peut même supposer que l'on a $n = 1$ ci-dessous. Si on écrit $q = \sum_{i=0}^d a_i x^i y^{n-i}$ dans cette base, on aura $\lambda(t).q = \sum_{i=0}^d a_i t^{n-2i} x^i y^{n-2i}$. Ainsi:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)q = 0 \iff \forall i > \frac{d}{2}, a_i = 0 \iff q \text{ a une racine de multiplicité } > \frac{d}{2}$$

De même, on obtient que q est stable si et seulement si toutes ses racines ont multiplicité $< \frac{d}{2}$.

Reprenons maintenant l'exemple des formes cubiques ternaires. On a admis que le quotient $S^3V//\mathrm{SL}_3$ est décrit par les deux invariants d'Aronhold S et T . Ainsi, le nilcône est l'ensemble des formes q telles que $S(q) = T(q) = 0$. C'est aussi celles qui vérifient $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)q = 0$ pour un sous-groupe à un paramètre λ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. On sait que de telles formes doivent être singulières puisqu'une forme non-singulière vérifie $\Delta(q) \neq 0$ où Δ est le discriminant.

Dans une base adapté, ce sous-groupe s'écrit

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^a & 0 & 0 \\ 0 & t^b & 0 \\ 0 & 0 & t^c \end{pmatrix}$$

avec a, b, c des entiers vérifiant $a + b + c = 0$. Les seuls monômes $x^i y^j z^k$ pouvant intervenir dans q doivent satisfaire $ai + bj + ck > 0$. Dans la figure 2, on place les monômes dans le plan affine d'équation $i + j + k = 3$. L'équation $ai + bj + kc = 0$ définit une droite qui passe par le monôme xyz . Quitte à changer les coordonnées x, y, z , on constate qu'une forme est instable si et seulement si elle s'écrit

$$q(x, y, z) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2z$$

pour certains complexes a, b, c, d, e .

La courbe algébrique $C(q)$ associée présente les singularités suivantes

- Si $e \neq 0$ $d \neq 0$, alors $C(q)$ a un point de rebroussement de coordonnée $[0, 0, 1]$ et de tangente $x = 0$.
- Si $e \neq 0, d = 0, c \neq 0$, alors $C(q)$ est la réunion de la conique $ax^2 + bxy + cy^2 + exz = 0$ et de sa tangente $x = 0$.
- Si $c = d = 0$ ou si $e = 0$, alors $C(q)$ est réunion de trois droites concourantes, éventuellement confondues.

On appelle semi-stable toute orbite non instable. Il nous reste les possibilités suivantes

- une cubique non-singulière.
- SS1: une cubique nodale irréductible, $xyz + x^3 + y^3 = 0$

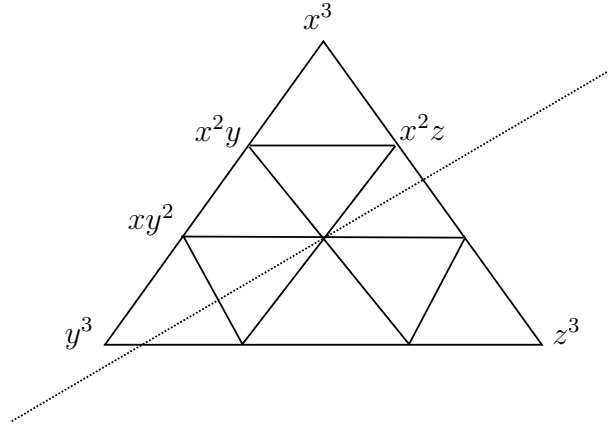


FIGURE 2. Cubiques instables

- SS2: a réunion d'une conique et d'une droite non tangente, $xyz + x^3 = 0$
- SS3: la réunion de trois droites non concourantes $xyz = 0$.

Le premier cas est stable comme vu précédemment. Dans chacun des cas suivants, on constate que toute forme q dans le cas considéré est équivalente à l'exemple joint. De plus, le sous-groupe $\lambda(t) = (1, t, t^{-1})$ préserve la courbe $SS2$ tandis que les matrices diagonales préservent $SS3$. On en déduit que les orbites correspondantes ont dimension au plus 7 et 6 respectivement. On constate qu'on peut faire dégénérer $SS1$ en $SS2$ puis en $SS3$. Ainsi, l'orbite de $SS1$ contient l'orbite de $SS2$ dans son adhérence qui contient l'orbite de $SS3$ dans son adhérence. A elles trois, elle forment donc une seule fibre du quotient, et $SS3$ en est le représentant d'orbite fermée.

Variétés de caractères

Soit Γ un groupe de type fini et $R(\Gamma) = \text{Hom}(\Gamma, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$ la variété des représentations de Γ dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. C'est une variété algébrique affine que l'on peut voir comme sous-variété de $\text{GL}_n(\mathbb{C})^k$ par l'application $\rho \mapsto (\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_k))$ où $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sont des générateurs de Γ . Faisons agir $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison sur $R(\Gamma)$ et notons $X(\Gamma) = R(\Gamma) // \text{GL}_n(\mathbb{C})$ le quotient algébrique.

Proposition 9. *Une représentation $\rho \in R(\Gamma)$ est stable si et seulement si elle est irréductible.*

Preuve. D'après le critère de Hilbert-Mumford, si ρ n'est pas stable, il existe $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{SL}_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe à un paramètre non trivial tel que $\lambda(t)\rho\lambda(t)^{-1}$ converge quand $t \rightarrow 0$. On peut écrire $\lambda(t)$ comme une matrice diagonale d'entrées t^{a_1}, \dots, t^{a_n} avec $a_1 \leq \dots \leq a_n$. La conjugaison par λ multiplie le coefficient de ρ d'indice (i, j) par $t^{a_i - a_j}$. Ainsi la convergence en $t = 0$ force ρ à être triangulaire par blocs et donc réductible. \square

On peut montrer qu'une représentation sera d'orbite fermée si et seulement si elle est somme directe de représentations irréductibles. Citons le théorème suivant de Procesi [P76] dans l'esprit de la théorie classique des invariants.

Théorème 8. (1) *L'algèbre des invariants $\mathbb{C}[X(\Gamma)] = \mathbb{C}[R(\Gamma)]^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}$ est engendrée par les fonctions traces $t_\gamma(\rho) = \mathrm{tr}(\rho(\gamma))$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

(2) *Par les formules de Newton, les coefficients a_i du polynôme caractéristique $\det(M - \lambda \mathrm{Id}) = \sum_{i=0}^n a_i(M) \lambda^i$ peuvent s'exprimer comme des polynômes $F_i(\mathrm{tr} M, \dots, \mathrm{tr} M^n)$. De même il existe un polynôme F tel que $\mathrm{tr} M^{n+1} = F(\mathrm{tr} M, \dots, \mathrm{tr} M^n)$.*

Alors $\mathbb{C}[X(\Gamma)] = \mathbb{C}[t_\gamma, \gamma \in \Gamma]/I$ où I est l'idéal engendré par les relations $\sum F_i(t_{\gamma^i}) t_{\gamma^i}$ et $t_{\gamma^{n+1}} - F(t_\gamma, \dots, t_{\gamma^n})$.

Citant Procesi, toutes les relations parmi les traces se déduisent du théorème de Cayley-Hamilton.

2.8. Le cas projectif. Bien sur, la théorie géométrique des invariants ne se limite pas aux variétés affines. Si X est une variété quelconque sur laquelle agit un groupe réductif G , la stratégie naturelle pour construire le quotient $X//G$ est de recouvrir X par des ouverts affines G -invariants U_i puis de recoller les quotients affines $U_i//G$. On ne s'y intéressera pas dans ces notes puisque les seuls exemples que l'on considérera sont soit affines soit projectifs. Dans ce dernier cas, on se ramène finalement au cas affine comme expliqué dans cette section.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et X une sous-variété de $\mathbb{P}(V)$. On suppose qu'il existe un sous-groupe réductif $G \subset \mathrm{GL}(V)$ qui stabilise X et on cherche à construire le quotient $X//G$. Notons \hat{X} la préimage de X dans V , il s'agit d'une variété affine définie par un idéal homogène $I_X \subset \mathbb{C}[V]$. Le quotient est une algèbre graduée R qui permet de retrouver X par la construction suivante. Soit $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$ une algèbre graduée et posons $R^+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} R_n$. On définit alors

$$\mathrm{Proj}(R) = \{ \mathfrak{p} \text{ idéal premier homogène, } R^+ \not\subset \mathfrak{p} \subset R \}.$$

Cet espace est muni d'une topologie, et l'ensemble des points fermés, noté $\mathrm{Proj}_m(R)$ correspond à l'ensemble des idéaux homogènes maximaux. Pour chaque $f \in R$ homogène, l'ouvert $D(f)$ des idéaux qui ne contiennent pas f forme un recouvrement de $\mathrm{Proj}(R)$ par des ouverts affines. Cela permet de le munir d'un faisceau structural \mathcal{O}_X et donc d'une structure de schéma.

Dans le cas où X est une sous-variété projective de V , en notant $x_0, \dots, x_n \in V^*$ les fonctions coordonnées, on obtient une famille génératrice de $R = \mathbb{C}[V]/I_X$. Les ouverts $D(x_i)$ correspondent aux variétés affines $X \cap \{x_i = 1\}$.

Revenons au contexte initial où un groupe réductif G agissait sur X via une action linéaire sur V . On est tenté de poser la définition

$$X//G = \mathrm{Proj}(R^G).$$

Ceci a bien un sens car l'algèbre R^G est toujours graduée et finiment engendrée d'après le Théorème 4. Comme dans le cas affine, notre problème revient maintenant à interpréter les points de cet espace comme les orbites de G sur X .

Pour tout $x \in X$ représenté par un vecteur $v \in \hat{X}$, on peut se demander si v est stable, semi-stable ou instable. Ceci ne dépend bien sûr que de la classe de v . Un point instable étant annulé par tout polynôme invariant, il ne peut pas survivre dans le quotient. Il faut donc restreindre l'application de passage au quotient au lieu semi-stable. Par analogie avec le Théorème 5, on a la proposition suivante:

Proposition 10. *L'application naturelle $p : X^{ss} \rightarrow X//G$ est surjective, sépare les fermés G -invariants et vérifie que pour tout $x \in X//G$, la fibre $p^{-1}(x)$ contient une unique orbite fermée dans X^{ss} .*

On constate immédiatement que si G contient le sous-groupe $\mathbb{C}^* \text{Id}$ alors aucun point n'est stable car $\lim_{t \rightarrow 0} tv = 0$. Pour cette raison, on se limitera au cas où G préserve une forme volume de V , c'est-à-dire correspond à un sous-groupe de $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Regardons l'exemple des cubiques ternaires. Soit V le dual de \mathbb{C}^3 . La classe d'une forme cubique ternaire non nulle est un élément $[q] \in \mathbb{P}S^3V$. Les invariants de Aronhold donnent l'isomorphisme $\mathbb{C}[S^3V]^{\text{SL}_3(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[S, T]$ où S et T ont degré respectivement 2 et 3. On a donc

$$\mathbb{P}S^3V//\text{SL}_3(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(2, 3)$$

où $\mathbb{P}(2, 3)$ est l'espace projectif à poids $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}/[x, y] \simeq [t^2x, t^3y]$. De manière très concrète, cet isomorphisme envoie la forme semi-stable $[q]$ sur la paire $[S(q), T(q)]$. On observe ici un phénomène très intéressant: le quotient projectif est par construction une variété projective. Les courbes elliptiques non singulières correspondent aux formes stables et donc aux points q vérifiant $S^3 \neq T^2$. Le complémentaire correspond à un point et un seul dans $\mathbb{P}(2, 3)$ à savoir $[1, 1]$ que l'on peut penser comme la classe d'une courbe nodale irréductible. C'est exactement cette image que l'on généralise en genre supérieur en construisant l'espace des modules des courbes.

Les n -uplets de points dans \mathbb{P}^1 .

Soit $n \geq 2$ un entier et considérons le quotient $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n//\text{SL}_2(\mathbb{C})$. Pour voir ce quotient comme un quotient projectif, on peut utiliser le plongement de Segré: soit E un espace vectoriel de rang 2 et X l'image du plongement $\mathbb{P}(E)^n \rightarrow \mathbb{P}(E^{\otimes n})$ défini par $([v_1], \dots, [v_n]) \mapsto [v_1 \otimes \dots \otimes v_n]$.

Un point $x = v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ non nul est instable s'il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)v_1 \otimes \dots \otimes v_n = 0$. Dans une base de diagonalisation (e_1, e_2) de λ , on écrit $v_i = x_i e_1 + y_i e_2$ et on déduit que $\prod_{i \in I} x_i \prod_{j \in J} y_j = 0$ pour toute décomposition $I \amalg J = \{1, \dots, n\}$ avec $|J| \geq |I|$. Par un principe des tiroirs, cela implique qu'il y a strictement plus de $\frac{n}{2}$ indices pour lesquels $y_i = 0$. Cela se traduit par le fait qu'il y a le même vecteur répété

(projectivement) strictement plus de $\frac{n}{2}$ fois. De même, si la multiplicité maximale d'un vecteur dans $\mathbb{P}(E)$ est strictement inférieure à $\frac{n}{2}$, alors la configuration est stable.

Voyons deux exemples: si $n = 3$ et que deux points sont égaux, la configuration est instable et ne doit pas être prise en considération. Sinon, les trois points sont distincts, et forment une seule $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -orbite. Le quotient géométrique est réduit à un point.

Si $n = 4$, on ne peut pas répéter plus de deux fois le même point. Il y a donc 3 configurations semistables, correspondant aux trois façons possibles d'apparier les 4 points $[v_1], [v_2], [v_3], [v_4]$. L'application birapport

$$p : [v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4] \rightarrow [\det(v_1, v_2) \det(v_3, v_4), \det(v_1, v_4) \det(v_2, v_3)]$$

identifie le quotient géométrique $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^4 // \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Les trois configurations semi-stables correspondent à 0, 1 et ∞ .

Quotients projectifs d'espaces affines Dans le cas où $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ agit sur une variété projective $X \subset \mathbb{P}E$ via une action linéaire sur E préservant le cône \hat{X} on peut construire le quotient projectif en considérant l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur \hat{X} et en définissant

$$\mathbb{C}[\hat{X}]_n^G = \{f \in \mathbb{C}[\hat{X}], f(gx) = (\det g)^n f(x) \forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}.$$

On dit qu'un tel f est un semi-invariant de poids n par rapport au déterminant.

Plus généralement, si un groupe réductif G agit sur une variété affine X et que l'on se donne un caractère $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$, on peut former un quotient projectif à partir des semi-invariants de poids n . En formules, on pose $X //_{\chi} G = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$ où $R_n = \{f \in \mathbb{C}[X], f(gx) = \chi(g)^n f(x) \forall g \in G\}$.

Dans ce cas, on suppose implicitement qu'il n'y a pas de semi-invariants de poids négatif. Cette construction est équivalente à la précédente mais permet de bien mettre en valeur le rôle du plongement projectif et de la linéarisation de l'action, à savoir le relèvement de l'action de G à E où $X \subset \mathbb{P}E$.

Reprenons l'exemple précédent dans ce langage. Définissons un invariant de poids k sur V^n comme une fonction $f \in \mathbb{C}[E^n]$ vérifiant

$$\begin{aligned} - f(t_1 v_1, \dots, t_n v_n) &= \prod t_i^k f(v_1, \dots, v_n) \text{ et} \\ - f(gv_1, \dots, gv_n) &= f(v_1, \dots, v_n) \text{ pour } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

On observe en prenant $t_1 = \dots = t_n$ qu'une telle fonction doit satisfaire $f(gv_1, \dots, gv_n) = (\det g)^{nk/2} f(v_1, \dots, v_n)$, en particulier k est pair si n ne l'est pas.

Si on note R_k l'ensemble des invariants de poids k , on peut définir le quotient $(\mathbb{P}E)^n / \mathrm{SL}_2$ comme $\mathrm{Proj} \bigoplus_n R_n$. C'est donc un cas particulier de la construction précédente où on a posé $G = (\mathbb{C}^*)^n \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\chi(t_1, \dots, t_n, g) = \prod_i t_i \det(g)^{n/2}$ si n est pair et $\chi(t_1, \dots, t_n, g) = \prod_i t_i^2 \det(g)^n$ si n est impair.

3. APPLICATION AUX ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS

3.1. Espaces de modules de fibrés en droites. Soit X une surface de Riemann de genre g . On rappelle que son groupe de Picard $\text{Pic } X$ est le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur X . On note $\text{Pic}^d X$ le sous-ensemble des fibrés de degré d de sorte qu'on a la suite suivante:

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0 X \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

L'interprétation de $\text{Pic } X$ comme le groupe $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ et la suite exacte exponentielle donne l'isomorphisme $\text{Pic}^0 X = H^1(X, \mathbb{C})/H^1(X, \mathbb{Z})$. Ainsi la jacobienne $\text{Pic}^0 X$ est naturellement un tore complexe. On va voir comment interpréter cette même jacobienne comme un quotient algébrique, et du coup la voir comme une variété projective, c'est-à-dire une variété abélienne.

A partir de maintenant, la courbe X sera sous-entendue dans la notation des groupes de cohomologie. On notera le produit tensoriel des fibrés multiplicativement, et avec les lettres h^0 et h^1 les dimensions des groupes de cohomologie correspondant. Enfin, pour $p \in X$, on notera L_p le fibré associé au point p .

Fixons un entier $d \geq 2g$ et un fibré $L \in \text{Pic}^{2d} X$. On constate que tout fibré ξ de degré d vérifie les conditions suivantes:

- (1) $H^1(\xi) = 0$
- (2) ξ est sans point base (pour tout $p \in X$, il existe $s \in H^0(\xi)$ avec $s(p) \neq 0$).
- (3) $\dim H^0(\xi) = d + 1 - g$

En effet, on a par dualité de Serre $h^1(\xi) = h^0(K\xi^{-1})$ or ce dernier fibré est de degré $2g - 2 - d < 0$. Le premier point est démontré, le troisième est une conséquence directe du théorème de Riemann-Roch. On note $N = d + 1 - g$. Si p est un point base de ξ , on aura alors $h^0(\xi L_p^{-1}) = N$. Le même calcul que ci-dessus montre que $h^1(\xi L_p^{-1}) = 0$ ce qui contredit le théorème de Riemann-Roch.

Notons $\xi' = L\xi^{-1}$. Ce fibré est aussi de degré d et donc satisfait les mêmes conditions que ξ . Considérons l'application suivante, induite par la multiplication des sections:

$$\begin{aligned} H^0(\xi) \times H^0(\xi') &\rightarrow H^0(L) \\ (s, t) &\mapsto st \end{aligned}$$

On appelle marquage de ξ la donnée de deux bases $S = (s_1, \dots, s_N)$ et $T = (t_1, \dots, t_N)$ de $H^0(\xi)$ et $H^0(\xi')$. On associe à chaque marquage la matrice $\Psi(\xi, S, T) = (s_i t_j) \in M_N(H^0(L))$.

Proposition 11. *Soit K le corps des fonctions de X et notons $H_m^0(L)$ le K -espace vectoriel de rang 1 des sections méromorphes de L .*

- (i) *La matrice $\Psi(\xi, S, T) \in M_N(H_m^0(L))$ est de rang 1 sur K .*
- (ii) *Chaque ligne de $\Psi(\xi, S, T)$ représente une famille libre dans $H^0(L)$.*

(iii) Chaque colonne de $\Psi(\xi, S, T)$ représente une famille libre dans $H^0(L)$.

Réciproquement, toute matrice $\Psi \in M_N(H^0(L))$ vérifiant (i), (ii) et (iii) est de la forme $\Psi(\xi, S, T)$ pour un $\xi \in \text{Pic}^d X$.

Preuve. Choisissons des sections méromorphes non nulles σ, τ de ξ et ξ' respectivement. On écrit $\Psi(\xi, S, T) = (\frac{s_i}{\sigma} \frac{t_j}{\tau} \sigma \tau)$ ce qui montre que $\Psi(\xi, S, T)$ est de rang 1 sur K . La liberté des lignes et des colonnes provient directement du fait que S et T sont des bases.

Montrons la réciproque. Soit $\Psi \in M_N(H^0(L))$ satisfaisant les trois hypothèses. En écrivant l'égalité des faisceaux $L = \text{Hom}(\mathcal{O}_X, L)$, on peut interpréter Ψ comme le morphisme de faisceaux suivant:

$$\Psi : \mathcal{O}_X^n \rightarrow L^n$$

Comme Ψ est de rang 1 sur K , le faisceau image - noté ξ - est un faisceau localement libre de rang 1, donc un fibré en droites. Calculons son degré: en notant s_i l'image de la i -ème section du faisceau \mathcal{O}_X , on définit N sections de ξ . Par hypothèse, elles sont libres et donc $h^0(\xi) \geq N > g$. D'après le Lemme 3, on a $\deg \xi \geq N + g - 1 = d$. Notons ξ' le faisceau image de la matrice Ψ^T . Par le même raisonnement, on a $\deg \xi' \geq d$.

Montrons que $\xi \otimes \xi' = L$ et que via cet isomorphisme $\Psi = \Psi(\xi, S, T)$. On en déduira en particulier $\deg \xi + \deg \xi' = 2d$ et donc $\deg \xi = d$.

Soit p un point de X et α un élément non nul de la fibre de L en p . Comme Ψ est de rang 1 sur K , la matrice $M = (\frac{\Psi_{ij}}{\alpha})$ est aussi de rang 1. Il existe donc deux vecteurs $X, Y \in \mathbb{C}^n$ tels que $M = X^T Y$. Par construction, la fibre de ξ en p est engendrée par le vecteur Y et la fibre de ξ' par le vecteur X (relativement à α) L'opération $(X, Y) \mapsto \frac{X^T Y}{M}$ définit un isomorphisme entre $\xi \otimes \xi'$ et L . Les sections s_i ont pour coefficients les coordonnées de Y dans la base X , de même pour les sections t_j . On en déduit l'égalité $\Psi = \Psi(\xi, S, T)$. □

Lemme 3. Soit L un fibré sur X tel que $h^0(L) > g$. Alors $\deg L = h^0(L) + g - 1$.

Preuve. D'après le théorème de Riemann-Roch, suffit de montrer $H^1(L) = 0$. Si ce n'est pas le cas, fixons un point $p \in X$ et considérons le fibré LL_p^k . La dimension de $H^0(LL_p^k)$ est une suite croissante de k avec des écarts de 1 au plus, tandis que c'est l'inverse pour $H^1(LL_p^k)$. Or pour k assez grand, ce dernier espace est nul, il existe donc k tel que $h^1(LL_p^k) = 1$. Par dualité de Serre, $h^0(KL^{-1}L_p^{-k}) = 1$ et en particulier son degré est positif, à savoir $2g - 2 - \deg LL_p^k \geq 0$. D'après Riemann-Roch appliqué à LL_p^k on a l'inégalité contradictoire suivante:

$$g - 1 < h^0(LL_p^k) - 1 = \deg LL_p^k - g + 1 \leq 2g - 2 - g + 1 = g - 1.$$

□

Regardons l'exemple où X est une courbe elliptique. Il existe alors un revêtement double $p : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ ramifié en 4 points. On peut écrire l'équation de X sous la forme $z^2 = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$. Le fibré $L = p^*\mathcal{O}(2)$ est de degré 4 et donc convient pour la construction précédente. En posant $V = H^0(X, L)$ qui est de dimension 4, le plongement $X \mapsto \mathbb{P}V^*$ s'écrit $[x, y, z] \mapsto [x^2, xy, y^2, z]$. Son image est l'intersection des quadriques $q_1 = au^2 + 4buv + 6cv^2 + 4dvw + ew^2 - t^2$ et $q_2 = uw - v^2$ où on a posé $u = x^2, v = xy, w = y^2, t = z$.

On aura $N = 2$ et la matrice Ψ sera une matrice de $M_2(V)$. Précisons sa forme: elle s'écrit

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A, B, C, D \in V$ sont linéairement indépendants par lignes et par colonnes et vérifient que $AD - BC$ est une combinaison linéaire de q_1 et q_2 .

On va maintenant utiliser la description de $\text{Pic}^d X$ fournie par la proposition 11 pour identifier $\text{Pic}^d X$ à un quotient algébrique.

Considérons le groupe $G = \text{SL}_N(\mathbb{C})^2$ qui agit naturellement sur $M_N(H^0(L))$ par la formule $(g, h) \cdot \Psi = g\Psi h^{-1}$. De plus, il préserve le sous-espace \mathcal{X} des matrices de rang 1 sur K . Notons que l'espace \mathcal{X} est défini par les équations $\Psi_{ii}\Psi_{jj} - \Psi_{ij}\Psi_{ji} = 0 \in H^0(L^2)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$ et donc définit une sous-variété affine de $M_N(H^0(L))$. Etant définie par des équations homogènes, on peut aussi considérer $\mathbb{P}\mathcal{X}$ comme une sous-variété projective de $\mathbb{P}M_N(H^0(L))$.

On note $U \subset \mathcal{X}$ l'ouvert de \mathcal{X} des matrices vérifiant la condition d'indépendance des lignes et des colonnes.

Proposition 12. *Les éléments de U sont stables, ceux de $\mathcal{X} \setminus U$ instables.*

Preuve. Soit $\Psi \in \mathcal{X}$ et $(\lambda, \mu) : \mathbb{C}^* \rightarrow G$ un sous-groupe à un paramètre déstabilisant, c'est-à-dire vérifiant $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\Psi\mu(t)^{-1} = 0$. Quitte à changer de base au départ et à l'arrivée, on peut écrire $\lambda(t) = \text{diag}(t^{a_1}, \dots, t^{a_N})$ et $\mu(t) = \text{diag}(t^{b_1}, \dots, t^{b_N})$. Cela s'écrit $\lim_{t \rightarrow 0} t^{a_i - b_j} \Psi_{ij} = 0$ pour tous i, j . Posons $a_{i_0} = \min\{a_i\}$ et $b_{j_0} = \max\{b_j\}$: si $b_{j_0} < a_{i_0}$ alors on aura $b_j < a_i$ pour tous i, j et $\sum b_j < \sum a_i$ ce qui est impossible car on a implicitement supposé que ces deux sommes étaient nulles. Ainsi, $a_{i_0} - b_{j_0} \leq 0$ et du coup, $\Psi_{i_0 j_0} = 0$.

Choisissons une section rationnelle non nulle ψ de K . Comme Ψ est de rang 1 sur K , cela implique qu'on peut trouver $s_0, \dots, s_N, t_0, \dots, t_N \in K$ telles que $\Psi_{ij} = s_i t_j \psi$. L'annulation de $\Psi_{i_0 j_0}$ implique donc l'annulation d'une ligne ou d'une colonne de Ψ . Ceci n'arrive que si Ψ viole l'une des conditions (ii) ou (iii). Ainsi, les éléments instables ne sont pas dans U . Réciproquement, on voit bien que les éléments de $\mathcal{X} \setminus U$ sont instables. Il reste à montrer que les éléments de U sont stables (on sait donc qu'ils sont semi-stables).

Supposons que $\Psi \in U$ soit non stable, c'est-à-dire que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\Psi\mu(t)^{-1}$ existe (elle ne peut pas faire 0). Reprenant la formule ci-dessus, la seule possibilité pour que la limite existe, sachant que Ψ_{ij} n'est jamais nul est d'avoir $a_i \geq b_j$ pour

tous i, j . C'est impossible vu que $\sum a_i = \sum b_j = 0$ et que ces entiers ne sont pas tous nuls. \square

On peut donc conclure que le quotient projectif $p : U \rightarrow U//G$ est un bon quotient au sens où les fibres sont les G -orbites. Ces mêmes fibres s'identifient à $\text{Pic}^d X$. On a donc

$$\text{Pic}^d X \simeq U//G.$$

Regardons l'exemple des courbes elliptiques traité ci-dessus. La quantité $\det \Psi \in S^2 V$ est invariante par l'action du groupe et définit une forme quadratique dans l'espace $\mathcal{Q} = \text{Vect}\{q_1, q_2\}$. On en déduit une application $\text{Pic}^2 X \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{Q}$.

On pourrait montrer que l'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme analytique mais il faudrait étudier la lissité des quotients ce qui est un peu technique. Parlons plutôt du diviseur Θ et de la raison pour laquelle il s'appelle ainsi. Par définition, le diviseur $\Theta \subset \text{Pic}^{g-1} X$ est défini comme le lieu $\{\xi, H^0(\xi) \neq 0\}$. C'est donc l'image de l'application $X^{g-1} \rightarrow \text{Pic}^{g-1}$ qui envoie (p_1, \dots, p_{g-1}) vers $L_{p_1} \cdots L_{p_{g-1}}$. En translatant Θ par un fibré E de degré $d + 1 - g$, on construit un diviseur dans $\text{Pic}^d X$.

Choisissons p_1, \dots, p_N N points dans X et considérons $f_i : H^0(\xi) \rightarrow \mathbb{C}, g_i : H^0(\xi') \rightarrow \mathbb{C}$ des applications d'évaluation en p_i .

Lemme 4. *Posons $f = \sum f_i g_i$. On a $\det f(\Psi(\xi, S, T)) = \det(f_i(s_j)) \det(g_i(t_j))$.*

Preuve. On a $f(s_i t_j) = \sum_k f_k(s_i) f_k(t_j)$. On reconnaît là un produit de matrices. \square

L'expression $\det f(\Psi) = 0$ définit une hypersurface G -invariante dans X et passe donc au quotient en un diviseur de $U//G \simeq \text{Pic}^d X$. Cette fonction s'annule précisément pour les couples (ξ, ξ') tels qu'une des deux applications d'évaluation $(f_1, \dots, f_N) : H^0(\xi) \rightarrow k^N$ ou $(g_1, \dots, g_N) : H^0(\xi') \rightarrow k^N$ n'est pas bijective. Chacune de ces deux conditions s'écrit $H^0(\xi L_{p_1}^{-1} \cdots L_{p_N}^{-1}) \neq 0$ ou $H^0(\xi' L_{p_1}^{-1} \cdots L_{p_N}^{-1}) \neq 0$. En posant $E = L_{p_1} \cdots L_{p_N}$ on écrit ces deux équations $\xi E^{-1} \in \Theta$ ou $L \xi^{-1} E^{-1} \in \Theta$. On résume ceci en disant que l'hypersurface de $U//G$ que l'on a construite est une réunion de deux translatés du diviseur Θ .

Proposition 13. *Soit $P(x, y, z)$ un polynôme homogène de degré d définissant une courbe lisse dans \mathbb{P}^2 et notons \mathcal{I} l'ensemble des matrices $M = (l_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ où l_{ij} sont des formes linéaires dans les variables x, y, z et $\det M = P$. Alors $\text{SL}_d(\mathbb{C})^2$ agit sur \mathcal{I} par multiplication à gauche et à droite et le quotient $\mathcal{I} // \text{SL}_d(\mathbb{C})^2$ s'identifie à $\text{Pic}^{g-1} \setminus \Theta$, que l'on appelle la jacobienne affine.*

3.2. Généralités sur les fibrés vectoriels. Un fibré de rang r sur une surface de Riemann X est par définition un faisceau de \mathcal{O}_X -modules E localement libre de rang r . L'ensemble des sections méromorphes de E est un K -espace vectoriel de dimension r noté $H_m^0(X, E)$.

On définit son déterminant par la formule $\det E(U) = \Lambda_{\mathcal{O}_X(U)}^r E(U)$ pour tout $U \subset X$. Il s'agit d'un fibré en droites: on appellera degré de E le degré de $\det(E)$.

On notera E^* le fibré dual défini pour tout $U \subset X$ par

$$E^*(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(E(U), \mathcal{O}_X(U)).$$

Etant donné deux fibrés E et F , on peut former de même les fibrés $E \oplus F$, $E \otimes F$, $\text{Hom}(E, F) \simeq E^* \otimes F$, etc.

On admettra le théorème suivant, généralisant la formule de Riemann-Roch et la dualité de Serre aux fibrés vectoriels:

Théorème 9. *Pour tout fibré de rang r E sur X on a l'égalité*

$$h^0(X, E) - h^1(X, E) = \deg(E) - r(g - 1)$$

et un appariement non dégénéré

$$H^1(X, E) \times H^0(X, E^* \otimes \Omega) \rightarrow H^1(X, \Omega) \simeq \mathbb{C}.$$

Soit F un sous-faisceau localement libre d'un faisceau localement libre E . On a l'inclusion $H_m^0(X, F) \subset H_m^0(X, E)$. On dira que F est un sous-fibré si on a pour tout $U \subset X$ l'égalité $F(U) = E(U) \cap H_m^0(F)$. Comme un exemple classique de sous-faisceau qui n'est pas un sous-fibré est le fibré $\mathcal{O}_X \subset L_p$. Ces deux fibrés ont les mêmes sections méromorphes mais sont distincts. Si F est un sous-faisceau de E la formule $F'(U) = E(U) \cap H_m^0(F)$ définit un sous-fibré de E que l'on appellera le saturé de F .

On peut comprendre différemment la différence entre un sous-fibré et un sous-faisceau. Si F est un sous-faisceau d'un faisceau localement libre de rang r E sur X et p est un point de X alors la tige de E en p notée E_p est un module libre de rang r sur l'anneau de valuation discrète (donc principal) $\mathcal{O}_{X,p}$. La tige de F en p est un sous- $\mathcal{O}_{X,p}$ -module de E_p et le sous-faisceau F est saturé si et seulement si ce sous-module est un facteur direct. On comprend ainsi que c'est la condition qui garantit que le faisceau quotient E/F soit aussi localement libre.

Cette interprétation nous donne aussi la propriété suivante: si $\phi : E \rightarrow F$ est un morphisme de fibrés alors le sous-faisceau $K = \ker \phi$ est saturé et donc défini un sous-fibré. En effet, on aura $K_p = \ker \phi_p : E_p \rightarrow F_p$ qui est par construction un facteur direct.

On observe que pour tout sous-fibré F de E l'on a l'isomorphisme $\det(E) \simeq \det(F) \otimes \deg(E/F)$ d'où on tire $\deg(E/F) = \deg(E) - \deg(F)$.

Définition 7. *On dit qu'un fibré E est indécomposable si on ne peut pas l'écrire comme somme directe de deux sous-fibrés stricts $E = E_1 \oplus E_2$.*

On dira que E est simple si $H^0(X, \text{End}(E)) = \mathbb{C} \text{Id}$.

On constate tout de suite que simple implique indécomposable, en considérant la projection de E sur E_1 parallèlement à E_2 .

Définition 8. On appelle pente d'un fibré E la quantité $\mu(E) = \frac{\deg E}{\dim E}$.

Un fibré E est dit stable si pour tout sous-fibré $F \subset E$ on a $\mu(F) < \mu(E)$.

Il est dit semi-stable si on a seulement $\mu(F) \leq \mu(E)$.

Si on note G le fibré quotient E/F , on constate que l'inégalité de stabilité s'écrit $\mu(G) > \mu(E)$. On peut donc réécrire la condition de (semi-)stabilité en termes de fibrés quotients.

Lemme 5. Soit E un fibré de rang r et L un fibré de rang 1 alors E est stable (resp. semi-stable) si et seulement si $E \otimes L$ est stable (resp. semistable).

Preuve. En effet, pour tout fibré E on a $\mu(E \otimes L) = \frac{\deg(E \otimes L)}{\dim(E \otimes L)} = \frac{\deg E + \deg L \dim E}{\dim(E)} = \mu(E) + \deg L$ et le lemme s'en suit. \square

Montrons qu'un fibré stable est simple. Supposons que $\phi \in H^0(\text{End}(E))$ est un endomorphisme du fibré E . Notons F l'image de ϕ : par semi-stabilité $\mu(F) \leq \mu(E)$. Mais F est isomorphe à un quotient d'un sous-fibré de E (le saturé du noyau de ϕ) donc $\mu(F) \geq \mu(E)$. Si $\dim F < \dim E$ alors F est un sous-faisceau strict et l'égalité des pentes contredit la stabilité de E (comme quotient ou comme sous-fibré). Ainsi $\dim F = \dim E$ puis $\deg E = \deg F$. On en déduit que le morphisme $\det \phi : \det E \rightarrow \det E$ est injectif, donc un isomorphisme, puis que ϕ est un isomorphisme.

Fixons $p \in X$ et regardons l'action de ϕ sur la fibre de E en p . Il s'agit d'un morphisme ayant au moins une valeur propre α . Le morphisme $\phi - \alpha \text{Id}$ ne peut pas être un isomorphisme, il est donc nul, ce qui conclut la preuve. On a donc la suite d'implications suivantes

$$\text{semi-stable} \iff \text{stable} \implies \text{simple} \implies \text{indécomposable}$$

Dans le cas où $X = \mathbb{P}^1$, les fibrés vectoriels sont des sommes directes de fibrés en droites: ils sont en quelque sorte aussi décomposables que possible et jamais stables. On a plus précisément le théorème suivant, du à Grothendieck.

Théorème 10. Soit E un fibré de rang r sur \mathbb{P}^1 . Alors il existe $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ tels que

$$E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r)$$

Avant de démontrer ce résultat, on introduit la classe d'extension de deux fibrés vectoriels. Etant donnée une suite exacte de faisceaux $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 0$, on en construit une deuxième en tensorisant par G^* . On aura donc

$$0 \rightarrow \text{Hom}(G, F) \rightarrow \text{Hom}(G, E) \rightarrow \text{Hom}(G, G) \rightarrow 0$$

On note δ l'image de Id_G dans $H^1(X, \text{Hom}(G, F))$ et on l'appelle la classe d'extension. Par construction, cette classe est nulle si et seulement si il existe une section de la suite exacte de faisceaux initiale.

Preuve. Le cas $r = 1$ est trivial, considérons d'abord le cas $r = 2$. Quitte à tensoriser E par un fibré en droites, on peut supposer que le degré de E est -1 ou 0 . D'après la formule de Riemann-Roch on aura alors $h^0(X, E) > 0$. Prenons donc une section $s \in H^0(X, E)$. Elle engendre un sous-faisceau saturé que l'on note M de sorte qu'on a une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow L$. Le fibré M admet une section donc $\deg M \geq 0$ et on a toujours $\deg M + \deg L = \deg E$.

La classe de l'extension est un élément $\delta \in H^1(X, L^{-1}M)$, et on a $\deg L^{-1}M = 2 \deg M - \deg E \geq -1$. Par dualité de Serre, on en déduit $H^1(X, L^{-1}M) = 0$ et l'extension est scindée, donc $E \simeq M \oplus L$.

Prenons maintenant $r > 2$ et raisonnons par récurrence en supposant $\deg E \geq 0$.

Soit M un sous-fibré de rang 1 de E : si $\deg M \geq -1$ alors $h^0(M) = \deg M + 1$ et comme $H^0(M)$ est un sous-espace de $H^0(E)$ on a $h^0(M) \leq h^0(E)$ et donc $\deg M$ est majoré. On peut donc choisir M avec un degré maximal.

Considérons la suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$ et montrons que tout sous-fibré L de F vérifie $\deg L \leq m$. En effet sa préimage \tilde{L} est un sous-fibré de rang 2 et donc d'après le cas $r = 2$, il contient un sous-fibré de rang au moins $\frac{1}{2}(\deg M + \deg L)$. On aura donc par construction $\frac{1}{2}(m + \deg L) \leq m$ et on a l'inégalité souhaitée.

Par récurrence, $F = \bigoplus_{i=1}^{r-1} L_i$ avec $\deg L_i \leq m$. La classe de l'extension est un élément de $H^1(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{r-1} L_i^{-1}M)$. Or par construction on a pour tout i : $\deg L_i^{-1}M \geq 0$ et donc la classe d'obstruction s'annule et le théorème est démontré. \square

3.3. Espace des modules des fibrés de rang 2. Soit E un fibré de rang 2 sur X vérifiant les deux hypothèses suivantes:

- (i) $H^1(E) = 0$
- (ii) E est engendré par ses sections globales.

En vertu du premier point, on a $h^0(E) = \deg E + 2 - 2g$. Notons N cette quantité et choisissons une base s_1, \dots, s_N de sections de E . Le deuxième point est équivalent au fait que le morphisme de fibré $\sigma = (s_1, \dots, s_N) : \mathcal{O}_X^N \rightarrow E$ est surjectif.

Définition 9. Notons $L = \det E$. La matrice $(s_i \wedge s_j) \in M_N(H^0(L))$ est anti-symétrique. On l'appelle la matrice de Gieseker $T(E, S)$ associée au fibré E muni de son marquage $S = (s_1, \dots, s_N)$.

Notre première observation est que cette matrice encode bien le fibré E au sens de la proposition suivante:

Proposition 14. Soit N un entier fixé et L un fibré de degré $N + 2g - 2$. Soit E un fibré de rang 2 vérifiant $\det E = L$ et les conditions (i) et (ii). Pour tout marquage S , la matrice $T(E, S)$ vérifie les conditions suivantes:

- (1) Elle est de rang 2 sur K .
- (2) Ses colonnes sont linéairement indépendantes dans $H^0(L)^N$ (ou de manière équivalente ses lignes).

Preuve. Considérons deux sections ϕ_1, ϕ_2 formant une base de $H_m^0(E)$. On peut écrire la matrice $2 \times N$ $W = \begin{pmatrix} s_i \\ \phi_j \end{pmatrix}$ de sorte que

$$T(E, S) = W^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} W$$

dans la base $\phi_1 \wedge \phi_2$ de $H_m^0(L)$. Cela montre que $T(E, S)$ est de rang 2 sur K .

Supposons maintenant qu'on ait $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sum \lambda_i s_i \wedge s_j = 0$ pour tout j . Alors $\sum \lambda_i s_i = 0$ car son produit avec tous les s_j est nul. Comme s_i est une base, les λ_i sont tous nuls et le deuxième point est démontré. \square

On définit donc le sous-espace $X \subset M_N(H^0(L))$ comme le sous-espace des matrices antisymétriques de rang inférieur ou égal à 2 et on observe qu'il s'agit d'un sous-espace affine défini par des équations homogènes. On a rencontré presque le même exemple pour les d -uplets de vecteurs dans la Section 2.5. On peut donc écrire

$$\mathcal{X} = \{(T_{ij}) \in M_N(H^0(L)), T_{ji} + T_{ij} = 0, T_{ij}T_{kl} - T_{ik}T_{jl} + T_{il}T_{jk} = 0\}$$

La deuxième égalité vaut dans $H^0(L^2)$ pour tout quadruplet (i, j, k, l) d'indices distincts. Le groupe $SL_N(\mathbb{C})$ agit naturellement sur \mathcal{X} par la formule $g.T = gTg^T$. L'espace des modules de fibrés sera simplement le quotient projectif $X^{ss} // G$. Le problème est d'identifier les points du quotient.

Proposition 15. *Supposons que $\deg L \geq 4g - 1$ et que T est un point semi-stable de \mathcal{X} . Alors il existe un fibré E semi-stable tel que $\det E = L$ et un marquage S tel que $T(E, S) = T$.*

Preuve. Observons que T ne peut pas être nulle car elle est semi-stable ni de rang 1 car une matrice antisymétrique est de rang pair, elle est donc de rang 2.

On définit E comme l'image de $T : \mathcal{O}_X^N \rightarrow L^N$. Il est de rang 2 par hypothèse sur T . En notant s_i les sections images des sections canoniques de \mathcal{O}_X^N , on obtient N sections de E qui engendrent un espace vectoriel $V \subset H^0(E)$ de dimension N .

Montrons que $h^1(E) = 0$. Si tel n'était pas le cas, par dualité de Serre, on aurait $h^0(E^*\Omega) > 0$. Donnons nous une section non nulle de $E^*\Omega$, c'est-à-dire un morphisme de fibrés $\phi : E \rightarrow \Omega$ et notons M le sous-fibré en droites $\ker \phi$. On a une application induite $\phi_* : H^0(E) \rightarrow H^0(\Omega)$ et sa restriction $V \rightarrow H^0(\Omega)$. Son noyau est alors de dimension au moins $N - g > g$. Par un changement linéaire des s_i , on peut donc supposer que les a premières sections de sont dans M et les b suivantes n'y sont pas avec $a > b$. Comme le produit extérieur de deux éléments de M est nul, la matrice T a un bloc $a \times a$ identiquement nul.

En faisant agir le sous-groupe à un paramètre $\lambda(t) = \text{diag}(t^{-b}, \dots, t^{-b}, t^a, \dots, t^a)$, on multiplie les termes non nuls de T par une puissance strictement positive de t , ainsi T est instable, ce qui est une contradiction.

Montrons que $\det(E)$ est isomorphe à L . On considère pour cela l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X^N \times \mathcal{O}_X^N &\rightarrow L \\ (u, v) &\mapsto u^T T v \end{aligned}$$

Cette application est antisymétrique et s'annule sur le noyau de T . Elle définit donc un morphisme de faisceaux $\phi : \det(E) \rightarrow L$, c'est-à-dire une section de $H^0(\det(E)^*L)$. Il suffit pour prouver que c'est un isomorphisme d'avoir l'inégalité $\deg(\det E)^*L \leq 0$ soit encore $\deg L \leq \deg E$. Or par construction $h^0(E) \geq N = \deg L + 2 - 2g$ et par Riemann-Roch et l'annulation de $H^1(E)$, on a $h^0(E) = \deg E - 2g + 2$. On a donc bien l'isomorphisme attendu et au passage l'égalité $h^0(E) = N$. Cela prouve que $S = (s_1, \dots, s_N)$ est une base de $H^0(E)$ et donc $T = T(E, S)$.

Montrons que E est semi-stable. Sinon, il existe M , un sous-fibré instable de E , c'est-à-dire vérifiant $\mu(M) > \mu(E)$ soit $\deg M > \frac{1}{2} \deg E$. Par le théorème de Riemann-Roch appliqué à M et E et l'annulation de $H^1(E)$ on en déduit l'inégalité $h^0(M) > \frac{1}{2} h^0(E)$. On vient de voir ci-dessus que cela contredit la semi-stabilité de T . \square

Proposition 16. *Soit E un fibré semi-stable avec $\det E = L$ et $\deg L \geq 4g - 1$. Alors E vérifie (i) et (ii), et $T(E, S)$ est semi-stable. De plus, E est stable si et seulement si $T(E, S)$ l'est.*

Preuve. Montrons que $H^1(E) = 0$, sinon par dualité de Serre, il existe un morphisme non trivial $\phi : E \rightarrow \Omega$. Son noyau est un fibré en droites M qui par semi-stabilité de E doit satisfaire $\deg M \leq \frac{1}{2} \deg E = \frac{1}{2} \deg L$. Or $\deg M = \deg L - \deg \Omega = \deg L - 2g + 2$. Ces inégalités impliquent $\deg L \leq 4g - 4$, une contradiction.

Si E n'est pas engendré par ses sections, il existe p tel que l'application d'évaluation $H^0(X, E) \rightarrow E_p$ ne soit pas surjective. D'après la suite exacte de fibrés $0 \rightarrow E \otimes L_p^{-1} \rightarrow E \rightarrow E_p \rightarrow 0$ et l'annulation de $H^1(E)$, cela implique que $H^1(EL_p^{-1}) \neq 0$. Le même argument que ci-dessus, en remplaçant Ω par ΩL_p implique l'inégalité $\deg L \leq 4g - 2$, à nouveau une contradiction.

Supposons que λ est un sous-groupe à un paramètre déstabilisant T . Alors dans une base adaptée, $\lambda(t) = \text{diag}(t^{a_1}, \dots, t^{a_N})$ avec $a_1 \leq \dots \leq a_N$ et $\sum_i a_i = 0$. La condition $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)T = 0$ est équivalente à

$$a_i + a_j \leq 0 \implies s_i \wedge s_j = 0.$$

Or T ne peut pas avoir une colonne entière de 0 car E est engendré par ses sections. Donc on a $a_1 + a_N > 0$. Posons $p = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$: on a $pa_1 + (N - p)a_{p+1} \leq 0$ d'où quelle que soit la parité de N l'inégalité $a_1 + a_{p+1} \leq 0$. On aura donc $T_{1k} = 0$ pour tout $k \leq p + 1$. Notons M le fibré en droites engendré par la section s_1 . Comme $s_1 \wedge s_k = 0$ pour tout $k \leq p + 1$, les sections s_1, \dots, s_{p+1} sont des sections de M .

Donc $h^0(M) \geq p + 1$. D'après le Lemme 3, comme $h^0(M) > g$, on a $h^1(M) = 0$ et donc d'après Riemann-Roch

$$h^0(M) - \frac{1}{2}h^0(E) = \deg M - \frac{1}{2} \deg E.$$

Ainsi $\mu(M) > \mu(E)$ ce qui contredit la semi-stabilité de E .

Supposons maintenant que E est semi-stable mais pas stable. Il existe alors un sous-fibré $M \subset E$ avec $\deg M = \frac{1}{2} \deg L$. Par l'argument de la Proposition 15, on a $h^0(M) \geq \frac{1}{2}h^0(E)$. En choisissant un marquage dont les premiers vecteurs sont des sections de M , on contredit la stabilité de $T(E, S)$. Maintenant, si E est stable, il est simple. Cela implique le stabilisateur de $T(E, S)$ est réduit à $\{\pm 1\}$, donc il est fini et $T(E, S)$ est stable. \square

3.4. Exemples d'espaces de modules. Le cas du genre 2 Prenons pour X une courbe de genre 2 et $L = \Omega^3$. On a alors $\deg L = 6 \geq 4g - 2$. On ne peut pas appliquer la construction précédente mais on peut montrer que les fibrés stables ont des matrices $T(E, S)$ qui restent stables. Posons $V = H^0(X, L)$. D'après le théorème de Riemann-Roch, $\dim V = 5$ et L définit un plongement $\Phi : X \rightarrow \mathbb{P}V^*$, dont l'image est l'intersection de 4 quadriques.

Très concrètement, si X est donnée par l'équation

$$z^2 = a_0x^6 + 6a_1x^5y + 15a_2x^4y^2 + 20a_3x^3y^3 + 15a_4x^2y^4 + 20a_5xy^5 + a_6y^6$$

On la plonge dans \mathbb{P}^4 par l'application $(x, y, z) \mapsto [x^3, x^2y, xy^3, y^3, z]$ et son image est l'intersection des quadriques suivantes

$$\begin{aligned} x_4^2 &= a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + 15a_2x_0x_2 + 20a_3x_0x_3 + 15a_4x_1x_3 + 6a_5x_2x_3 + a_6x_3^2 \\ x_1x_2 &= x_0x_3 \quad x_1^2 = x_0x_2 \quad x_2^2 = x_1x_3 \end{aligned}$$

On note \mathcal{Q} le sous-espace de S^2V engendré par ces quatre quadriques.

Un fibré stable E avec $\det(E) = L$ vérifie $h^0(E) = N = 4$. Sa matrice de Gieseker est un élément de $M_4(V)$ antisymétrique et de rang 2 sur X . Cela signifie que son pfaffien s'annule sur X et donc est une combinaison linéaire des quatre quadriques définissant X .

Plus formellement, on écrit $\text{Pf}(T)e_1 \wedge \cdots \wedge e_4 = (\sum_{i < j} e_i \wedge e_j T_{ij}) = T_{12}T_{34} + T_{14}T_{23} - T_{13}T_{24} \in S^2V$. La matrice T est un point de \mathcal{X} si et seulement si $\text{Pf}(T) \in \mathcal{Q}$.

Le lemme 6 montre que l'application $\text{Pf} : \Lambda^2\mathbb{C}^4 \otimes V \rightarrow S^2V$ vérifie les conditions de la Proposition 5. Cela prouve qu'on a $S^2V = \Lambda^2\mathbb{C}^4 \otimes V // SL_4(\mathbb{C})$. Ainsi le quotient $\mathcal{X} // G$ s'identifie au sous-espace $\mathcal{Q} \subset S^2V$. Ainsi l'espace des modules cherché est simplement $\mathbb{P}\mathcal{Q}$!

Lemme 6. *Soit V un espace vectoriel de dimension 5. L'application $\text{Pf} : \Lambda^2\mathbb{C}^4 \otimes V \rightarrow S^2V$ est surjective et pour tout tenseur $q \in S^2V$ non-dégénéré, l'image réciproque $\text{Pf}^{-1}(q)$ est une orbite de $SL_4(\mathbb{C})$.*

Preuve. On commence par remarquer que $E = \Lambda^2 \mathbb{C}^4$ est muni d'une forme quadratique non-dégénérée et $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ invariante $h(x) = x \wedge x / e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. Ainsi $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ agit sur E via le groupe $O(h) \simeq O(6)$. Le morphisme $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow O(6)$ est surjectif, en particulier les SL_4 -orbites sont les $O(6)$ -orbites. Un calcul en coordonnées nous montre que le pfaffien se calcule à partir d'une base orthonormée $(x_i)_{i=1,\dots,6}$ par la formule suivante

$$\mathrm{Pf}(u) = C \sum_{i=1}^6 u(x_i)^2$$

Il est bien connu que toute forme quadratique est la somme de au plus 5 carrés, 6 a fortiori et donc Pf est surjectif.

Soit q non dégénérée. Décrivons les $u : E \rightarrow V$ vérifiant $\mathrm{Pf}(u) = q$. Un tel u est nécessairement surjectif. Soit $v \in \ker u$: si $h(v) \neq 0$ alors u induit un isomorphisme $\tilde{u} : \ker u^\perp \rightarrow V$ et la propriété du Pfaffien dit que toute base orthogonale de $(\ker u)^\perp$ est envoyée sur une base q -orthogonale de V . Cela détermine complètement u à isométrie près.

Si $h(v) = 0$, alors on peut supposer dans la base orthonormée x_i que l'on a $v = x_1 + ix_2$. Cela montre que q est somme de 4 carrés, une contradiction. \square

4. ESPACES DE MODULES ET REPRÉSENTABILITÉ

Toutes les constructions qui précèdent peuvent être interprétées comme un problème de classification d'un certain type d'objet géométrique (n -uplet de points, hypersurface, fibré en droite ou vectoriel sur une courbe fixée, etc.). On a construit dans chacun de ces cas une variété algébrique dont les points étaient en bijection avec une classe d'isomorphisme de ce type d'objet (modulo le problème des classes non-stables). C'est ce qu'on appelle un espace de modules, noté M dans cette discussion. Pourtant ces constructions ne sont pas pleinement légitimes puisque la structure algébrique de M n'est a priori pas reliée au problème de module. En particulier, M n'est pas uniquement défini.

Imaginons que l'on puisse attacher à tout élément m de M l'objet géométrique qu'il paramètre, et ce de façon compatible avec la structure algébrique. En général, on supposera qu'il existe un fibré $p : \mathcal{F} \rightarrow M$ dont la fibre au point m soit un représentant de la classe d'isomorphisme paramétrée par m . On supposera de plus que ce fibré - appelé universel - est un fibré algébrique.

Supposons maintenant qu'on ait une famille d'objets de type M paramétrée cette fois par une variété affine quelconque X . C'est-à-dire que l'on a un fibré algébrique $\mathcal{G} \rightarrow X$ tel que chaque fibre soit un objet de type M . Si à tout point x de X on associe le point $f(x) \in M$ qui est isomorphe à la fibre de \mathcal{G} en x , on espère avoir un isomorphisme de fibré $\mathcal{G} \simeq f^* \mathcal{F}$. De plus, cet isomorphisme serait compatible au changement de base $h : X' \rightarrow X$ au sens où $h^* \mathcal{G}$ devrait être

isomorphe à $h^*f^*\mathcal{F}$. Cette situation est optimale du point du problème de module. Elle se formalise de la manière suivante.

Définition 10. *Soit F un foncteur contravariant de la catégorie des schémas affines vers celle des ensembles (penser que $F(X)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés $\mathcal{G} \rightarrow X$ dont les fibres sont de type M).*

On dira que M est un espace de modules fin pour le problème F si le foncteur F est isomorphe au foncteur $\text{Hom}(\cdot, M)$.

Il faut bien prendre garde que la définition d'espace des modules fins dépend fortement de la définition du foncteur F qu'il faut donc bien préciser pour chaque problème. Notons de plus que M , s'il existe est défini de manière unique par cette propriété. Malheureusement, les espaces de modules fins existent rarement, en particulier quand il y a des points non stables dans M .

4.1. La grassmannienne. Si la relation d'isomorphisme parmi les objets de M est triviale, l'espace des modules naturel est en général fin. C'est le cas de la grassmannienne $G(r, n)$ des r -plans dans \mathbb{C}^n , des hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, etc. Penchons nous toutefois sur le cas de la grassmannienne pour formaliser dans ce cas la nature du foncteur F .

On peut munir la grassmannienne d'une structure projective de deux manières différentes. La première, plus classique, est le plongement de Plücker. Soit $E \subset V = \mathbb{C}^n$ un sous-espace de dimension r engendré par e_1, \dots, e_r . Alors la classe de $w = e_1 \wedge \dots \wedge e_r$ dans $\mathbb{P}\Lambda^r V$ ne dépend que de E et définit une injection $i : G(r, n) \rightarrow \mathbb{P}\Lambda^r V$. Son image est une sous-variété projective : on peut montrer que $[w] \in \mathbb{P}\Lambda^r V$ est dans l'image de $G(r, n)$ si et seulement si le rang de l'application $\wedge w : V \rightarrow \Lambda^{r+1} V$ ne dépasse pas $n - r$. Cette condition est bien fermée.

On peut construire un faisceau localement libre de rang r \mathcal{F} sur $G(r, n)$ dont la fibre en E est E . L'idée est de retrouver l'espace E via sa coordonnée de Plücker w comme le noyau de l'application $\wedge w$. Formellement, si U est un ouvert de $G(r, n)$ et w une section de $i^*\mathcal{O}(-1)$ qui ne s'annule pas, $\mathcal{F}(U)$ sera le noyau du morphisme de faisceaux $\wedge w : \mathcal{O}_{G(r, n)} \otimes V \rightarrow \mathcal{O}_{G(r, n)}(1) \otimes \Lambda^{r+1} V$.

La deuxième méthode utilise la théorie des invariants: considérons l'action de $\text{SL}_r(\mathbb{C})$ sur l'espace des matrices $M_{r, n}(\mathbb{C})$ par multiplication à gauche. De manière plus invariante, on fait agir g sur $u \in \text{Hom}(\mathbb{C}^r, V)$ par $g.u = u \circ g^{-1}$. Une application immédiate du critère de Hilbert-Mumford montre que u est semi-stable ssi il est stable ssi il est de rang r . On en déduit que le quotient projectif $M_{r, n}(\mathbb{C})//\text{SL}_r(\mathbb{C})$ est une variété projective dont les points sont les classes d'équivalence de $u : \mathbb{C}^r \rightarrow V$ injectifs. L'application $M_{r, n}(\mathbb{C})//\text{SL}_r(\mathbb{C}) \rightarrow G(r, n)$ définie par $[u] \rightarrow \text{Im}(u)$ définit l'isomorphisme souhaité et munit $G(r, n)$ d'une structure de variété projective.

Définissons maintenant le foncteur F . A une variété affine, on souhaite associer les classes d'isomorphismes de fibrés $\mathcal{F} \rightarrow X$ dont les fibres sont des sous-espaces vectoriels de dimension r de \mathbb{C}^n . Autrement dit, \mathcal{F} doit être un sous-faisceau de

\mathcal{O}_X^n localement libre de rang r . Posons donc

$$F(X) = \{\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_X^n, \text{ faisceau localement libre de rang } r\} / \sim .$$

Sur une base affine X , en notant $A = \mathbb{C}[X]$, le faisceau \mathcal{G} est associé à un A -module $M = H^0(X, \mathcal{G})$ localement libre de rang r . On a de plus $M \subset A^n$. On peut donc réécrire F comme le foncteur covariant suivant sur la catégorie des \mathbb{C} -algèbres de type fini:

$$F(A) = \{M \subset A^n, A\text{-module localement libre de rang } r\} / \sim$$

Montrons que le foncteur F est isomorphe au foncteur $\text{Hom}(\cdot, G(r, n))$. On a un morphisme fonctoriel évident $\text{Hom}(X, G(r, n)) \rightarrow F(X)$ qui à f associe la classe d'isomorphisme du tiré en arrière $f^*\mathcal{F}$. Pour montrer l'isomorphisme des foncteurs, on construit l'application réciproque. Etant donné un sous-faisceau $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_X^n$ localement libre de rang r , construisons $f : X \rightarrow G(r, n)$ tel que $\mathcal{G} \simeq f^*\mathcal{F}$.

Recouvrons X par des ouverts U_i sur lesquels on peut trouver une base s_1^i, \dots, s_r^i de $H^0(U_i, \mathcal{G})$. L'expression $s_1^i \wedge \dots \wedge s_r^i$ définit une section de $\Lambda^r V$ qui ne s'annule jamais. On pose alors $f_i : U_i \rightarrow G(r, n)$ l'image projective de ce morphisme. Par construction, $\mathcal{G}_x = \mathcal{F}_{f_i(x)}$ et de plus, les f_i se recollent en une fonction algébrique $f : X \rightarrow G(r, n)$. On a donc montré la proposition suivante:

Proposition 17. *Le foncteur F est représenté par la grassmannienne $G(r, n)$ ou la grassmannienne $G(r, n)$ est un espace de module fin pour les sous-espaces de dimension r dans \mathbb{C}^n .*

4.2. Le groupe de Picard. Fixons une courbe algébrique C , un degré d et montrons que $\text{Pic}^d(C)$ est un espace de module fin pour les fibrés en droites de degré d sur C . Commençons par formaliser le problème en définissant le foncteur F . Intuitivement, pour une variété affine X , $F(X)$ doit être les classes d'isomorphismes de fibrés $\mathcal{G} \rightarrow X$ dont chaque fibre est un fibré en droites sur C . Plus précisément, on va demander à $\mathcal{E} \in F(X)$ d'être un faisceau inversible sur $X \times C$. Ainsi pour tout $x \in X$, sa restriction à $\{x\} \times C$, sera un faisceau inversible sur C .

Notons $p : X \times C \rightarrow X$ la première projection. Si L est un fibré de rang 1 sur X alors $\mathcal{E} \otimes p^*L$ est toujours un fibré sur $X \times C$ qui est isomorphe à \mathcal{E} en restriction à $\{x\} \times C$ pour tout $x \in X$. On pose donc

$$F(X) = \text{Pic}^d(X \times C) / \text{Pic}(X).$$

Il s'agit bien d'un foncteur: si on a $f : X \rightarrow Y$ et un fibré de rang 1 \mathcal{E} sur $Y \times C$, on en déduit un fibré de rang 1 $(f \times 1)^*\mathcal{E}$ sur $X \times C$.

Rappels sur les images directes

Si \mathcal{E} est un faisceau sur $X \times C$, $p_*\mathcal{E}$ est un faisceau sur X défini par $p_*\mathcal{E}(U) = H^0(p^{-1}(U), \mathcal{E})$. C'est un faisceau cohérent sur X , donc c'est le faisceau associé au A -module $H^0(X, \mathcal{E})$ où on a posé $A = \mathbb{C}[X]$.

Plus généralement, la donnée $U \mapsto H^p(p^{-1}(U), \mathcal{E})$ est un préfaisceau dont le faisceau associé est noté $R^p f_*\mathcal{E}$. Dans notre cas, ces faisceaux sont nuls pour $p > 1$.

Comme précédemment, le faisceau $R^1 f_* \mathcal{E}$ est le faisceau associé à un A -module que l'on note $H^1(X, \mathcal{E})$ et qu'on appelle première image directe du faisceau \mathcal{E} .

La propriété fondamentale de ces images directes est que si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux sur $X \times C$, elle induit une suite exacte longue de A -modules :

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

On admettra les résultats suivants:

Proposition 18. *Soit \mathcal{E} un faisceau localement libre de rang r sur $X \times C$.*

- (1) *Les A -modules $H^0(X, \mathcal{E})$ et $H^1(X, \mathcal{E})$ sont finiment engendrés.*
- (2) *Pour tout morphisme $f : Y \rightarrow X$ on a des morphismes $\phi_p : f^* H^p(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^p(Y, f^* \mathcal{E})$ surjectifs pour $p = 1$.*
- (3) *$H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ si et seulement si $H^1(C, \mathcal{E}_x) = 0$ pour tout $x \in X$.*
- (4) *Si $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ alors $H^0(X, \mathcal{E})$ est un A -module localement libre et l'application ϕ_0 est un isomorphisme.*
- (5) *Les applications $X \rightarrow \mathbb{N}$ définies par $x \mapsto \dim H^p(C, \mathcal{E}_x)$ sont semi-continues supérieurement.*
- (6) *L'application $X \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $x \mapsto \deg \mathcal{E}_x$ est localement constante.*

Proposition 19. *Soit $L \in \text{Pic}^{2d}(C)$ avec $d \geq 2g$ et posons $N = d + 1 - g$. Notons J_d la variété projective des matrices $N \times N$ de rang 1 à coefficients dans $H^0(C, L)$ quotientée par $\text{SL}_N(\mathbb{C})^2$.*

On a un morphisme de foncteur $F \rightarrow \text{Hom}(\cdot, J_d)$. De plus, J_d est universel au sens où pour tout Y et morphisme de foncteur $F' \rightarrow \text{Hom}(\cdot, Y)$, on a un morphisme $J_d \rightarrow Y$ qui fait commuter ces foncteurs. On dit que J_d est un espace de modules grossier.

Preuve. Soit Ξ un fibré sur $X \times C$ qui est de degré d sur chaque fibre $\{x\} \times C$. Notons $A = \mathbb{C}[X]$ et $q : X \times C \rightarrow C$ la deuxième projection. On note $L_X = q^* L$ et $\Xi' = L_X \otimes \Xi^{-1}$.

Par hypothèse sur les degrés, on a $H^1(X, \Xi) = H^1(X, \Xi') = 0$, ainsi les deux faisceaux $H^0(X, \Xi)$ et $H^0(X, \Xi')$ sont localement libres par la Proposition 18 (4). On restreint X pour que ces A -modules soient libres de rang N .

Prenons alors deux bases $S = (s_1, \dots, s_N)$ et $T = (t_1, \dots, t_N)$ de $H^0(X, \Xi)$ et $H^0(X, \Xi')$ et formons la matrice $\Psi = (s_i t_j) \in H^0(X, L_X) = A \otimes H^0(C, L)$. Cela nous définit un morphisme $X \rightarrow M_N(H^0(X, L))$ à valeurs dans les matrices de rang 1, puis par passage au quotient, un morphisme $X \rightarrow J_d$.

On observe que sur les intersections des ouverts de cartes, les deux applications définies indépendamment diffèrent par le choix des deux bases. Elles coïncident donc dans le quotient J_d et définissent une application dite classifiante $X \rightarrow J_d$.

Si on modifie Ξ en $\Xi \otimes q^* M$ où M est un fibré en droites sur X , la matrice associée sera simplement multipliée par un scalaire (dépendant de $x \in X$), en

tous cas, elle définira la même application classifiante. On a donc construit un morphisme de foncteurs $F \rightarrow \text{Hom}(\cdot, J_d)$.

Pour montrer l'universalité, on observe qu'il existe un fibré de rang 1 Q sur $C \times M_N^1(H^0(C, L))$ dont la fibre en (c, M) est l'image de la matrice $M(c)$. Si Y est candidat à être un espace de modules, il lui correspond donc un morphisme $M_N^1(H^0(C, L)) \rightarrow Y$. Comme Q est trivial sur les orbites de $\text{SL}_N(\mathbb{C})^2$, le morphisme doit être constant sur ces orbites et donc par propriété universelle des quotients, on a un morphisme $J_d = M_N^1(H^0(C, L))//\text{SL}_N(\mathbb{C})^2 \rightarrow Y$, ce qui montre que J_d est bien un espace de modules grossier. \square

On peut montrer de plus que J_d est un espace de modules fin. Pour cela on construit un fibré universel dit de Poincaré P_d sur $J_d \times C$ tel que son image par l'application classifiante soit l'identité. Il reste alors à montrer que pour tout fibré \mathcal{E} sur $X \times C$ classifié par une application $\phi : X \rightarrow J_d$ on a un isomorphisme naturel $\mathcal{E} \simeq (\phi \times 1)^*P_d$.

REFERENCES

- [A50] S. Aronhold. Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variablen. *J.Reine u. Angew. Math.* **39** (1850) 140-159.
- [Bo69] A. Borel. Linear algebraic groups. Benjamin, 1969.
- [Br10] M. Brion Introduction to actions of algebraic groups. *Les cours du CIRM*, **1**, no. 1, (2010), 1-22.
- [D03] I. Dolgachev Lectures on Invariant Theory *London Mathematical Society Lecture Note Series*, no. 296, 2003.
- [D12] I. Dolgachev Classical Algebraic Geometry - A modern view. *Cambridge University Press*, 2012.
- [Du10] J. J. Duistermaat. Discrete Integrable Systems, QRT Maps ans Elliptic Surfaces. Springer, 2010.
- [He54] C. Hermite. Fonctions homogènes à deux indéterminées. *Cambridge and Dublin Math. Journal*, May 1854. Œuvres de Charles Hermite (ed. Emile Picard), Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [L97] J. Le Potier. Lectures on Vector Bundles *Cambridge studies in advanced mathematics*
- [M03] S. Mukai An Introduction to Invariants and Moduli *Cambridge studies in advanced mathematics*
- [OS89] P. J. Olver, C. Shakiban. Graph Theory and Classical Invariant Theory *Advances in Mathematics* **75** (1989) 212-245.
- [P89] K. H. Parshall. Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory *The History of Modern Mathematics*, vol. 1, Proceedings of the Symposium on the History of Modern Mathematics. Vassar College, Poughkeepsie, New-York, 1989.
- [P76] C. Procesi. The Invariant Theory of $n \times n$ Matrices. *Advances in Mathematics*, **19** (1976), p.306-381.